Algèbre bilinéaire et Intégration

par
Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise
Année 2019-2020

Exercice 1 : (Application directe du cours) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4)$ une base de F. On note $f, g \in L(E, F)$ les applications linéaires de E dans F définies par

$$\begin{aligned}
f\big(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3\big) &= \big(2x_1 + x_2 + x_3\big)\tilde{e}_1 + \big(4x_1 + 3x_3\big)\tilde{e}_2 \\
&\quad + \big(x_1 + 3x_2 + x_3\big)\tilde{e}_3 + \big(3x_1 + x_2 + 5x_3\big)\tilde{e}_4 \\
g\big(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3\big) &= \big(x_1 - x_2 + 3x_3\big)\tilde{e}_1 - \big(2x_1 + 3x_2 - x_3\big)\tilde{e}_2 \\
&\quad + \big(5x_1 - x_2\big)\tilde{e}_3 - \big(x_1 + x_2 - x_3\big)\tilde{e}_4
\end{aligned}$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

(1) Ecrire la matrice de représentation $M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$ de f dans $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$.

(2) Ecrire la matrice de représentation $M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(g)$ de g dans $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$.

Solution : (1) Comme

$$f\left(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3\right) = \left(2x_1 + x_2 + x_3\right)\tilde{e}_1 + \left(4x_1 + 3x_3\right)\tilde{e}_2 + \left(x_1 + 3x_2 + x_3\right)\tilde{e}_3 + \left(3x_1 + x_2 + 5x_3\right)\tilde{e}_4$$

on calcule :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= 2\tilde{e}_1 + 4\tilde{e}_2 + \tilde{e}_3 + 3\tilde{e}_4 \\ f(e_2) &= \tilde{e}_1 + 0\tilde{e}_2 + 3\tilde{e}_3 + \tilde{e}_4 \\ f(e_3) &= \tilde{e}_1 + 3\tilde{e}_2 + \tilde{e}_3 + 5\tilde{e}_4 \end{aligned}$$

Par suite :

$$M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) Comme

$$g\left(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3\right) = \left(x_1 - x_2 + 3x_3\right)\tilde{e}_1 - \left(2x_1 + 3x_2 - x_3\right)\tilde{e}_2 \\ + \left(5x_1 - x_2\right)\tilde{e}_3 - \left(x_1 + x_2 - x_3\right)\tilde{e}_4$$

on calcule :

$$\begin{aligned} g(e_1) &= \tilde{e}_1 - 2\tilde{e}_2 + 5\tilde{e}_3 - \tilde{e}_4 \\ g(e_2) &= -\tilde{e}_1 - 3\tilde{e}_2 - \tilde{e}_3 - \tilde{e}_4 \\ g(e_3) &= 3\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 + 0\tilde{e}_3 + \tilde{e}_4 \end{aligned}$$

Par suite :

$$M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : (Application directe du cours) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note $f, g \in End(E)$ les endomorphismes de E définis par

$$\begin{aligned} f\big(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3\big) &= \big(x_1 + 4x_2 + x_3\big)e_1 + \big(4x_1 + 3x_3\big)e_2 \\ &\quad + \big(-x_1 + 3x_2 - 2x_3\big)e_3 \\ g\big(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3\big) &= \big(3x_1 - x_3\big)e_1 + \big(2x_1 + 4x_2 + 2x_3\big)e_2 \\ &\quad + \big(5x_1 + 4x_2 + x_3\big)e_3 \end{aligned}$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

(1) Ecrire la matrice de représentation $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ de f dans $\mathcal{B}$.

(2) Ecrire la matrice de représentation $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g)$ de g dans $\mathcal{B}$.

(3) Calculer les déterminants $\det\left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)\right)$ et $\det\left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g)\right)$. Les endomorphismes f et g sont-ils inversibles ?

Solution : (1) Comme

$$f\left(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3\right) = \left(x_1 + 4x_2 + x_3\right) e_1 + \left(4x_1 + 3x_3\right) e_2 + \left(-x_1 + 3x_2 - 2x_3\right) e_3$$

on calcule :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 + 4e_2 - e_3 \\ f(e_2) &= 4e_1 + 0e_2 + 3e_3 \\ f(e_3) &= e_1 + 3e_2 - 2e_3 \end{aligned}$$

Par suite :

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) Comme

$$g\left(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3\right) = \left(3x_1 - x_3\right) e_1 + \left(2x_1 + 4x_2 + 2x_3\right) e_2 \\ + \left(5x_1 + 4x_2 + x_3\right) e_3$$

on calcule :

$$\begin{aligned} g(e_1) &= 3e_1 + 2e_2 + 5e_3 \\ g(e_2) &= 0e_1 + 4e_2 + 4e_3 \\ g(e_3) &= -e_1 + 2e_2 + e_3 \end{aligned}$$

Par suite :

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) On a

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned} \det\left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)\right) &= 0 + 12 - 12 - 0 - 9 + 32 \\ &= 23 \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned} \det\left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g)\right) &= 12 - 8 + 0 + 20 - 24 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme $\det\left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)\right) \neq 0$, f est un isomorphisme. Comme $\det\left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g)\right) = 0$, g n'est pas un isomorphisme.

Exercice 3 : (Calculatoire sans difficulté particulière) Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension 3 de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ des réels. On considère l'application linéaire $f : E \to F$ définie par

$$f\left(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3\right) = \left(\alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha x_3\right)\tilde{e}_1 + \left(x_1 + x_2 + \beta x_3\right)\tilde{e}_2 \\ + \left(3x_1 + 2x_2 + \alpha x_3\right)\tilde{e}_3$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Ecrire la matrice de représentation de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$. Si A est cette matrice, calculer le determinant de A. Montrer que pour $\beta = 1$ l'application linéaire f est un isomorphisme de E sur F pour toutes les valeurs de α mis à part deux valeurs précises que l'on calculera. Montrer que pour $\beta = 3$ l'application linéaire f est un isomorphisme de E sur F pour tout α.

Solution : On a

$$f\left(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3\right) = \left(\alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha x_3\right)\tilde{e}_1 + \left(x_1 + x_2 + \beta x_3\right)\tilde{e}_2 + \left(3x_1 + 2x_2 + \alpha x_3\right)\tilde{e}_3$$

On calcule

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \alpha\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 + 3\tilde{e}_3 \\ f(e_2) &= \beta\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 + 2\tilde{e}_3 \\ f(e_3) &= \alpha\tilde{e}_1 + \beta\tilde{e}_2 + \alpha\tilde{e}_3 \end{aligned}$$

Par suite,

$$M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha \\ 1 & 1 & \beta \\ 3 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} \det\left(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\right) &= \alpha^2 + 2\alpha + 3\beta^2 - 3\alpha - 2\alpha\beta - \alpha\beta \\ &= \alpha^2 - \alpha + 3\beta^2 - 3\alpha\beta \end{aligned}$$

Si $\beta = 1$ alors

$$\det\left(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\right) = \alpha^2 - 4\alpha + 3$$
$$= (\alpha - 1)(\alpha - 3)$$

On sait que f est un isomorphisme si et seulement si $M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$ est inversible, et donc si et seulement si $\det\left(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\right) \neq 0$. Par suite, lorsque $\beta = 1$, f est un isomorphisme si et seulement si $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq 3$.

Si maintenant $\beta = 3$, alors

$$\det\left(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\right) = \alpha^2 - 10\alpha + 27$$

Le discriminant Δ de ce polynôme du second degré en α vaut

$$\Delta = 10^2 - 4 \times 27 = -8$$

En particulier, $\Delta < 0$ et donc $\alpha \to \alpha^2 - 10\alpha + 27$ n'a pas de zéros dans $\mathbb{R}$. En d'autres termes, $\det\left(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\right) \neq 0$ pour tout α. Et donc, si $\beta = 3$, alors f est un isomorphisme pour toute valeur de α. $\square$

Exercice 4 : (Calculatoire sans difficulté particulière) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note $f \in End(E)$ l'endomorphisme de E défini par

$$f\big(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3\big) = \big(x_1 + 4x_2 + 4x_3\big)e_1 + \big(4x_1 + 7x_2 + 8x_3\big)e_2 - \big(4x_1 + 8x_2 + 9x_3\big)e_3$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

(1) Calculer le polynôme caractéristique de f. Déterminer les valeurs propres de f.

(2) Déterminer les sous-espaces propres de f.

(3) Montrer que f est diagonalisable et donner une matrice A pour laquelle la matrice $A^{-1}M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)A$ est diagonale. Que vaut cette matrice diagonale ?

(4) Calculer $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^6$ et $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^7$.

(5) Calculer A^{-1}.

Solution : (1) On a

$$f\left(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3\right)=\left(x_1+4x_2+4x_3\right)e_1+\left(4x_1+7x_2+8x_3\right)e_2 \\ -\left(4x_1+8x_2+9x_3\right)e_3$$

On trouve

$$\begin{aligned} f(e_1)&=e_1+4e_2-4e_3\\ f(e_2)&=4e_1+7e_2-8e_3\\ f(e_3)&=4e_1+8e_2-9e_3 \end{aligned}$$

Par suite,

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}1&4&4\\4&7&8\\-4&-8&-9\end{pmatrix}$$

Si P est le polynôme caractéristique de f on a

$$P(X)=\det\begin{pmatrix}1-X&4&4\\4&7-X&8\\-4&-8&-9-X\end{pmatrix}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
P(X) &= -(X+9)(X-7)(X-1) - 8\times 16 - 8\times 16 \\
&\quad + 16(7-X) + 64(1-X) + 16(X+9) \\
&= -(X+9)(X-7)(X-1) - 2\times 8\times 16 \\
&\quad + 7\times 16 + 64 + 9\times 16 - 16X - 64X + 16X \\
&= -(X+9)(X-7)(X-1) - 64X + 64 \\
&= -(X-1)\left((X+9)(X-7) + 64\right) \\
&= -(X-1)(X^2+2X+1) \\
&= -(X-1)(X+1)^2
\end{aligned}$$

Donc f a deux valeurs propres qui sont -1 et 1.

(2) On a

$$E_1 = \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \\ -4 & -8 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

On a les équivalences,

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = x \\ 4x + 7y + 8z = y \\ -4x - 8y - 9z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 2x + 4y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} E_1 &= \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ y + z = 0, 2x + z = 0\} \\ &= \left\{ -\frac{1}{2} ze_1 - ze_2 + ze_3 \ / \ z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z\left(-\frac{1}{2} e_1 - e_2 + e_3 \right) \ / \ z \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

On pose
$$\tilde{e}_1 = -\frac{1}{2}e_1 - e_2 + e_3$$
et alors E_1 est la droite vectorielle de base $(\tilde{e}_1)$.

De même, on a
$$E_{-1} = \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \\ -4 & -8 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$
On a les équivalences,
$$\begin{cases} x + 4y + 4z = -x \\ 4x + 7y + 8z = -y \\ -4x - 8y - 9z = -z \end{cases} \quad \Leftrightarrow x + 2y + 2z = 0$$
Par suite,
$$\begin{aligned} E_{-1} &= \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ x + 2y + 2z = 0\} \\ &= \{-2(y+z)e_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-2e_1 + e_2) + z(-2e_1 + e_3) \ / \ y, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

On pose

$$\tilde{e}_2 = -2e_1 + e_2 \quad \text{et} \quad \tilde{e}_3 = -2e_1 + e_3$$

Alors $(\tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est une famille génératrice de E_{-1}. La famille est aussi libre car

$$\begin{aligned} &\lambda\tilde{e}_2 + \mu\tilde{e}_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow -2(\lambda + \mu)e_1 + \lambda e_2 + \mu e_3 = 0 \end{aligned}$$

et puisque (e_1, e_2, e_3) est une base, on trouve $\lambda = \mu = 0$. En conclusion, E_{-1} est le plan vectoriel de base $(\tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$.

(3) Clairement f est diagonalisable puisque

$$\begin{aligned}\dim E_1 + \dim E_{-1} &= 1 + 2\\ &= 3\\ &= \dim E\end{aligned}$$

De plus $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est une base de E qui diagonalise f au sens où

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et si $A = M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}$ alors

$$A^{-1} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) A = M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$$

Par définition,

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) On a

$$A^{-1}M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)A = M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$$

et donc

$$A^{-1}M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^6A = M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)^6$$

De plus

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)^6 = \begin{pmatrix} 1^6 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^6 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^6 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_3$$

Donc

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^6 &= AM_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)^6A^{-1} \\ &= A\mathrm{Id}_3A^{-1} \\ &= AA^{-1} \\ &= \mathrm{Id}_3 \end{aligned}$$

et ensuite $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^7 = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^6M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$.

(5) Pour calculer A^{-1} on procède ici avec les équivalences de systèmes :

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad A^{-1}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

On a

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{1}{2}x-2y-2z=X\\-x+y=Y\\x+z=Z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}x+2y+2z=-X\\-x+y=Y\\y+z=Y+Z\end{cases}\qquad\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}x+2(Y+Z)=-X\\-x+y=Y\\x+z=Z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}x=-X-2Y-2Z\\y=Y+x\\z=Y+Z-y\end{cases}\qquad\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2X-4Y-4Z\\y=-2X-3Y-4Z\\z=2X+4Y+5Z\end{cases}$$

Par suite,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

et donc (cf. ci-dessus)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 : (Astucieux mais classique) On considère la matrice A réelle 3×3 donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^6 et A^7.

Solution : On calcule le polynôme caractéristique de A. Posons

$$P(X) = \det \begin{pmatrix} -1-X & 1 & 2 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 1 & -4 & -1-X \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned} P(X) &= -(X-2)(X+1)^2 + 8 + 1 - 2(2-X) - 4(1+X) - (1+X) \\ &= -(X-2)(X+1)^2 - 3X \\ &= -(X-2)(X^2+2X+1) - 3X \\ &= -X^3 - 2X^2 - X + 2X^2 + 4X + 2 - 3X \\ &= 2 - X^3 \end{aligned}$$

Le théorème de Cayley-Hamilton nous donne alors que

$$A^3 = 2\mathrm{Id}_3$$

Par suite

$$A^6 = 4\mathrm{Id}_3 \text{ et } A^7 = A^6 A = 4A$$

Exercice 6 : (Faussement compliqué) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme de E, et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme réel. Si $P(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$, $k \in \mathbb{N}$, on note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par $P(f) = \sum_{i=0}^{k} a_i f^i$ où $f^0 = \mathrm{Id}_E$ (l'identité de E) et $f^i = f \circ \cdots \circ f$ (i fois).

(1) Montrer que si λ est valeur propre de f, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(f)$. Montrer que si f est diagonalisable, alors $P(f)$ l'est aussi.

(2) On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}^2$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1 e_1 + x_2 e_2) = (x_1 - \sqrt{2} x_2) e_1 + (\sqrt{2} x_1 - x_2) e_2$$

Montrer (par le simple calcul du polynôme caractéristique de f) que f n'est pas diagonalisable. Calculer ensuite $f^2 = f \circ f$ et vérifier que f^2 est diagonalisable. En déduire que pour P un polynôme, et f un endomorphisme, on peut très bien avoir que $P(f)$ est diagonalisable sans pour autant que f le soit.

Solution : (1) Dire que λ est valeur propre de f c'est dire qu'il existe $u \in E\backslash\{0\}$ tel que $f(u) = \lambda u$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a alors

$$f^p(u) = \lambda^p u$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P(f).(u) &= \sum_{i=0}^{k} a_i f^i(u) \\ &= \sum_{i=0}^{k} a_i \lambda^i u \end{aligned}$$

et on voit que $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(f)$. Dire que f est diagonalisable c'est dire qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E qui est constituée de vecteurs propres de f. Le petit calcul ci-dessus montre que si u est vecteur propre de f alors u est aussi vecteur propre de $P(f)$. La base $\mathcal{B}$ est donc aussi constituée de vecteurs propres de $P(f)$. Par suite $P(f)$ est diagonalisable dès que f l'est.

(2) La matrice de représentation de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Si on note Q le polynôme caractéristique de f alors

$$\begin{aligned} Q(X) &= \det \begin{pmatrix} 1-X & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1-X \end{pmatrix} \\ &= (X+1)(X-1)+2 \\ &= X^2+1 \end{aligned}$$

Donc f n'a pas de valeurs propres réelles. On en déduit que f n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. La matrice de représentation dans $\mathcal{B}$ de $f^2 = f \circ f$ est donnée (cf. cours) par $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f^2) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^2$. Donc

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f^2) &= \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$ et que, bien évidemment, f^2 est diagonalisable. Par suite, pour P un polynôme, et f un endomorphisme, on peut très bien avoir que $P(f)$ est diagonalisable sans pour autant que f le soit. $\square$

Exercice 7 : (Ni dur ni facile) Une matrice est dite stochastique si ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients sur chaque ligne est égale à 1. Soit A une matrice stochastique $n \times n$. Donc $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \geq 0$ pour touts $i, j = 1, \ldots, n$ et $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

(1) Montrer que si λ est valeur propre de A alors $|\lambda| \leq 1$.

(2) Montrer que 1 est valeur propre de A.

Solution : (1) Soit λ une valeur propre de A et soit $u = (u_1, \ldots, u_n)$ un vecteur propre (non nul) associé à λ. Alors

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j = \lambda u_i$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$. Soit $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $|u_{i_0}| = \max_{i=1,\ldots,n} |u_i|$. On a $|u_{i_0}| > 0$ et

$$|\lambda||u_{i_0}| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} |u_j| \leq |u_{i_0}| \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} = |u_{i_0}| \ .$$

Donc $|\lambda| \leq 1$.

(2) On vérifie que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

puisque $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Donc 1 est bien valeur propre de A et $(1, \ldots, 1)$ est un vecteur propre associé. $\square$

Exercice 8 : (Astucieux) On appelle matrice triangulaire inférieure toute matrice carrée $A = (a_{ij})$ qui est telle que $a_{ij} = 0$ pour tous $i < j$, et matrice triangulaire supérieure toute matrice carrée $A = (a_{ij})$ qui est telle que $a_{ij} = 0$ pour tous $i > j$.

(1) Montrer que le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est égal au produit de ses termes diagonaux.

(2) Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. Soit $f \in End\,(\mathbb{R}_n[X])$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par

$$f(P) = P - (X+1)P' \ .$$

Montrer que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Solution : (1) On passe des matrices triangulaires supérieures aux matrices triangulaires inférieures en prenant la transposée. La transposée n'affectant pas le déterminant on peut donc se restreindre au cas des matrices triangulaires inférieures

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n_3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

En développant le déterminant suivant la première ligne on trouve que

$$\det A_n = a_{11} \det A_{n-1} \qquad (\star)$$

où A_{n-1} est la matrice triangulaire inférieure d'ordre $n-1$ obtenue à partir de A_n en supprimant la première ligne et la première colonne de A_n. Donc la matrice des a_{ij}, $i, j \geq 2$. La relation $(\star)$ permet de mettre en place une preuve par récurrence.

Hypothèse de récurrence : Le déterminant d'une matrice de rang n triangulaire inférieure est égal au produit de ses termes diagonaux.

Amorce : on vérifie l'hypothèse au rang $n = 1$ (cas d'un réel) ou alors on commence au rang $n = 2$ pour pouvoir véritablement parler de matrice triangulaire. On a

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = ac$$

ce qui vérifie l'hypothèse de récurrence au rang $n = 2$.

Cœur : On suppose l'hypothèse vraie au rang n. Soit A une matrice triangulaire inférieure d'ordre $n + 1$. En vertue de $(\star)$, $\det(A) = a_{11}\det(B)$ où B est la matrice triangulaire inférieure d'ordre n constituée des a_{ij}, $i \geq 2$ et $j \geq 2$. Par hypothèse de récurrence,

$$\det(B) = a_{22} \times \cdots \times a_{n+1n+1}$$

Par suite

$$\det(A) = a_{11} \times \cdots \times a_{n+1n+1}$$

ce qui achève la récurrence.

(2) L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$. La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$. On calcule $f(1) = 1$ puis pour $p \geq 1$,

$$f(X^p) = X^p - p(1+X)X^{p-1} = -pX^{p-1} + (1-p)X^p \ .$$

Si on écrit les coordonnées en vecteurs colonnes on voit que

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \ f(X) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \ f(X^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \quad \ldots \text{etc.}$$

La matrice $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = (a_{ij})$ de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est donc donnée par

$$a_{ij} = 0 \text{ si } i > j \ ; \ a_{ii} = 1 - i \ ; a_{ii+1} = -i \ ; a_{ij} = 0 \text{ si } j > i+1$$

C'est donc une matrice triangulaire supérieure dont les termes sur la diagonale sont $1, 0, -1, -2, \dots, -n+1$. En raison de (1), le polynôme caractériqtique de f est donné par

$$\begin{aligned} f(X) &= \det\left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) - X\mathrm{Id}_{n+1}\right) \\ &= (X-1)X(X+1)(X+2)\dots(X+n-1) \end{aligned}$$

et ces termes sur la diagonale sont précisément les valeurs propres de f. Comme il y en a $n+1$ distinctes en dimension $n+1$, c'est que f est diagonalisable. $\square$

Exercice 9 : (Classique) Soit A la matrice 3×3 donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et soit $B = A - \mathrm{Id}_3$. Calculer B^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Solution : On a

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par suite

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et enfin on trouve que

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit facilement par récurrence que $B^n = 0$ (matrice nulle) pour tout $n \geq 3$. On a

$$A = \mathrm{Id}_3 + B$$

et les matrices Id_3 et B commutent. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$$A^n = (\mathrm{Id}_3 + B)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \mathrm{Id}_3^{n-p} B^p$$

où $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. En vertue de ce qui a été dit sur B^n, et puisque $C_n^0 = 1,\ C_n^1 = n$ et $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, on trouve que

$$\begin{aligned} A^n &= \mathrm{Id}_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$

Exercice 10 : (Calculatoire très facile) Soit A la matrice 3×3 donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculer le rang de A.

Solution : On a

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 15 + 24 + 24 - 27 - 16 - 20 = 0$$

et donc A n'est pas de rang 3. Par contre

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

est une sous matrice de A (obtenue en supprimant les premières lignes et colonnes dans A), et

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0 \ .$$

Donc $\mathrm{Rg}(A) = 2$. $\square$.

Exercice 11 : (Calculatoire) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ deux paramètres réels. On considère la matrice $A_{\alpha,\beta}$ réelle 3×3 donnée par

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs de α et β cette matrice est-elle inversible ? Si $\alpha = \beta = 2$, que vaut le rang de $A_{\alpha,\beta}$?

Solution : On calcule

$$\begin{aligned}\det A_{\alpha\beta} &= \alpha + \alpha\beta^2 + \alpha^2 - \alpha^2\beta - \alpha - \alpha\beta \\ &= \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta \\ &= \alpha(\alpha - \beta) + \alpha\beta(\beta - \alpha) \\ &= (\alpha - \beta)(\alpha - \alpha\beta) \\ &= \alpha(\alpha - \beta)(1 - \beta)\end{aligned}$$

Sachant que $A_{\alpha\beta}$ est inversible si et seulement si $\det A_{\alpha\beta} \neq 0$, on trouve que $A_{\alpha\beta}$ est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \beta$ et $\beta \neq 1$.

Si $\alpha = \beta = 2$ alors A_{22} n'est pas inversible (cf. ci-dessus). Donc $\text{Rg}(A_{22}) \neq 3$. Par contre, la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

est une sous matrice de A_{22}, obtenue en supprimant les 3ème lignes et colonnes dans A_{22}. On a $\det B = -2 \neq 0$. Donc $\text{Rg}(A_{22}) \geq 2$. On en déduit que $\text{Rg}(A_{22}) = 2$. $\square$

Fin des exercices pour les chapitres 1 à 4