

Algèbre bilinéaire et Intégration

par

Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise

Année 2019-2020

Chapitre 6

Espaces vectoriels munis d'un produit scalaire

1. Normes et produits scalaires.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. On distingue deux structures sur E : celle donnée par une norme et celle donnée par un produit scalaire.

(1) $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une norme sur E si :

$$(N1) \quad \forall x \in E, N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$(N2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x),$$

$$(N3) \quad \forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y).$$

(2) $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E si :

(S1) B est bilinéaire symétrique,

$$(S2) \quad \forall x \in E, B(x, x) \geq 0,$$

$$(S3) \quad \forall x \in E, B(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

On se réfère à la propriété (N3) sous les termes d'inégalité triangulaire. Une forme bilinéaire symétrique B qui vérifie (S2) et (S3) est dite définie positive.

Dans la pratique, ce que l'on fera dans la suite, on note plutôt $\|\cdot\|$ pour une norme, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pour un produit scalaire. Donc $N(x) = \|x\|$ et $B(x, y) = \langle x, y \rangle$. A titre d'exemples,

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \text{et} \quad \|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

sont des normes sur \mathbb{R}^n , tandis que

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n . On remarque que

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sqrt{\langle (x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle}$$

de sorte que $\|\cdot\|_1^2$ est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Les structures de produits scalaires sont plus "fortes" que les structures de normes (produit scalaire \Rightarrow norme), comme on le verra juste après l'exercice qui suit.

Exercice : On note B la forme bilinéaire sur \mathbb{R}^2 définie par

$$B(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 - 2(x_1y_2 + x_2y_1)$$

pour tous $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$. Montrer que B est un produit scalaire sur E .

Solution : On vérifie facilement que B est bilinéaire symétrique. Reste à montrer que B est définie positive. On a

$$\begin{aligned} B(x, x) &= 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 \\ &= 2(x_1 - x_2)^2 + x_2^2. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $B(x, x) \geq 0$ pour tout x et que $B(x, x) = 0$ si et seulement si $x_1 = x_2$ et $x_2 = 0$, et donc si et seulement si $x_1 = x_2 = 0$. Donc B est bien définie positive. Par suite B est un produit scalaire. □

Théorème

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. A tout produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est associé une norme $\| \cdot \|$ en posant $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ pour tout x .

La preuve de ce théorème passe par la preuve de l'inégalité dite de Cauchy-Schwarz.

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Pour tous $x, y \in E$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\| ,$$

où $\| \cdot \|$ est définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

A titre de remarque, vous avez déjà vue cette inégalité en théorie de l'intégration. L'espace $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel (même si de dimension infinie...).

La forme bilinéaire symétrique

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

est un produit scalaire sur E . Sa norme associée est donnée par

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt},$$

et on a bien que $\forall f, g \in E$,

$$\left| \int_0^1 f(t)g(t)dt \right| \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt} \sqrt{\int_0^1 g^2(t)dt},$$

ce qui illustre l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans ce cas précis.

Preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : On écrit que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et tous $x, y \in E$,

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \geq 0 .$$

Or

$$\begin{aligned} \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle &= \langle x + \lambda y, x \rangle + \lambda \langle x + \lambda y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle . \end{aligned}$$

Par suite, dire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \geq 0$, entraîne que la fonction polynôme du second degré en λ ci-dessus ne peut avoir 2 racines distinctes, et donc entraîne pour le discriminant Δ du polynôme du second degré en question que

$$\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0 .$$

Il s'ensuit que

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle ,$$

et on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'où le théorème.
CQFD.

Preuve du premier théorème : Etant donné $x \in E$, on pose

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} .$$

Il nous faut montrer que $\|\cdot\|$ vérifie les points (N1), (N2), et (N3) de la définition des normes. Le point (N1) est automatiquement vérifié dans la mesure où

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 .$$

Le point (N2) est aussi vérifié puisque

$$\begin{aligned} \langle \lambda x, \lambda x \rangle &= \lambda \langle \lambda x, x \rangle \\ &= \lambda^2 \langle x, x \rangle . \end{aligned}$$

Reste donc à montrer l'inégalité triangulaire, à savoir que pour tous $x, y \in E$,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

On écrit ici que

Preuve suite et fin :

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \quad (\text{d'après Cauchy-Schwarz}) \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Donc $\forall x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. D'où le résultat. CQFD.

Théorème (Identités remarquables)

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E , et soit $\| \cdot \|$ la norme qui lui est associée. Alors,

- (1) $\forall x, y \in E$, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$,*
- (2) $\forall x, y \in E$, $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$,*
- (3) $\forall x, y \in E$, $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\langle x, y \rangle$.*

En particulier, et d'après (1) ou (3), le produit scalaire est entièrement déterminé par la norme.

Preuve : Par définition,

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle\end{aligned}$$

d'où la première relation. De cette relation on déduit maintenant que

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle .$$

Par suite, en couplant les deux relations que l'on vient de démontrer,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 (\|x\|^2 + \|y\|^2) .$$

De même,

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\langle x, y \rangle .$$

D'où les relations (2) et (3), et le résultat. CQFD.

De (3), on tire que si $\| \cdot \|$ est une norme sur E , alors $\| \cdot \|$ provient d'un produit scalaire si et seulement si l'application

$$(x, y) \longrightarrow \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

est un produit scalaire sur E .

On constate assez facilement ici que la seule chose qu'il y ait à montrer est que cette application est bilinéaire. Si

$$B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longrightarrow \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

est cette application, il est en effet clair que $B(x, x) \geq 0$ pour tout x , et que $B(x, x) = 0$ si et seulement si $x = 0$, puisque pour tout x , $B(x, x) = \|x\|^2$.

Exercice : Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées $n \times n$. Montrer que

$$\langle M, N \rangle = \text{tr}({}^tMN)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où tr représente la trace.

Solution : Notons $M = (a_{ij})$. Alors ${}^tM = (a_{ji})$ et

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad {}^tM = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Si ${}^tMM = (b_{ij})$ alors, pour tous i, j ,

$$b_{ij} = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha i} a_{\alpha j}.$$

Il est clair que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire. Elle est symétrique car $\text{tr}M = \text{tr}{}^tM$ pour toute matrice carrée M , tandis que

$${}^t({}^tNM) = {}^tMN$$

pour toutes matrices carrées M, N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La forme est enfin

définie positive car (cf. ci-dessus)

$$\begin{aligned}\langle M, M \rangle &= \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha i}^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2\end{aligned}$$

de sorte que $\langle M, M \rangle \geq 0$ pour toute matrice carrée M et de sorte que $\langle M, M \rangle = 0$ si et seulement si $M = 0$. Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. □

2. Orthogonalité

On aborde maintenant les notions d'orthogonalité et d'orthonormalité déjà rencontrées pour les formes bilinéaires quelconques. Soit E est un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux (sous entendu pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$) si $\langle x, y \rangle = 0$. Si maintenant X est un sous ensemble de E , on définit l'orthogonal de X (toujours sous entendu pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et que l'on note X^\perp) par

$$X^\perp = \left\{ y \in E / \forall x \in X, \langle x, y \rangle = 0 \right\} .$$

En d'autres termes, X^\perp est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de X . On vérifie facilement que pour tout sous ensemble X de E , X^\perp est un sous espace vectoriel de E . De même, on vérifie facilement que :

- (P1) $\forall X \subset Y, Y^\perp \subset X^\perp,$
- (P2) $\forall X, Y, (X \cup Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp,$
- (P3) $\forall X, X \subset (X^\perp)^\perp.$

Théorème (Théorème de Pythagore)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et soit $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Deux vecteurs x et y de E sont alors orthogonaux si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Preuve : Pour tous $x, y \in E$,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle,$$

où $\| \cdot \|$ est la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Il s'ensuit clairement que $\langle x, y \rangle = 0$ si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. D'où le résultat. CQFD.

3. Bases orthonormées

On traite de la notion de base orthonormale, et surtout du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Définition

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et soit $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On dit qu'une famille (e_1, \dots, e_n) de vecteurs de E est :

- (i) orthogonale si pour tous $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$,
- (ii) orthonormale si pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$,

où les symboles de Kroenecker δ_{ij} sont définis par $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Si E est de dimension finie, et si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , on parle alors de base orthogonale et de base orthonormale.

Remarque : Une famille orthonormale est une famille orthogonale dont les vecteurs sont de normes 1 pour la norme associée au produit scalaire. Etant donnée (e_1, \dots, e_n) une famille orthogonale de vecteurs non nuls, on obtient une famille orthonormale $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ en posant pour tout i ,

$$\tilde{e}_i = \frac{1}{\|e_i\|} e_i ,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme associée au produit scalaire. Lorsqu'il y a un seul produit scalaire, la terminologie est bien choisie. Sinon, on parlera de famille orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et de famille orthonormale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposition

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre. En particulier, toute famille orthonormale de vecteurs de E est libre, et si E est de dimension finie n , et si \mathcal{B} est une famille orthonormale de E composée de n vecteurs, alors \mathcal{B} est une base de E .

Preuve : Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire placé sur E . Il suffit de démontrer que si (e_1, \dots, e_n) est une famille orthogonale de E composée de vecteurs non nuls (i.e. $e_i \neq 0$ pour tout i) alors (e_1, \dots, e_n) est libre.

Une famille orthonormale étant forcément composée de vecteurs non nuls (puisque de normes 1), on en déduira que toute famille orthonormale de vecteurs de E est libre.

Sachant par ailleurs qu'une famille libre de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n est une base, on en déduira de plus que si E est de dimension finie n , et si \mathcal{B} est une famille orthonormale de E composée de n vecteurs, alors \mathcal{B} est une base de E .

Soit donc maintenant (e_1, \dots, e_n) une famille orthogonale de E composée de vecteurs non nuls. Supposons que pour des $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réels,

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0 .$$

Preuve suite et fin : Alors, pour tout $i_0 = 1, \dots, n$,

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, e_{i_0} \right\rangle = 0 .$$

Or, la famille étant orthogonale,

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, e_{i_0} \right\rangle &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle e_i, e_{i_0} \rangle \\ &= \lambda_{i_0} \|e_{i_0}\|^2 , \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Comme $e_{i_0} \neq 0$, $\|e_{i_0}\| \neq 0$, et donc, forcément $\lambda_{i_0} = 0$. Puisque i_0 est quelconque dans $\{1, \dots, n\}$, on en déduit que $\lambda_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$. D'où le fait que la famille (e_1, \dots, e_n) est libre. La proposition est démontrée. CQFD.

On sait déjà (voir le chapitre précédent en algèbre bilinéaire) que si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie munie d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, alors E possède une base orthogonale (e_1, \dots, e_n) pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Les vecteurs d'une base étant forcément non nuls, on en déduit l'existence d'une base orthonormale $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ en posant

$$\tilde{e}_i = \frac{1}{\|e_i\|} e_i ,$$

où $\| \cdot \|$ est la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Tout espace vectoriel de dimension finie possède donc une base orthonormale. On propose ici une "autre" preuve de ce résultat basée sur ce que l'on appelle le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Partant d'une base quelconque, on la "transforme" en une base orthonormale. . .

Théorème

Tout espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire possède une base orthonormale.

Preuve (avec le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt) : Soient E l'espace vectoriel en question et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire placé sur E . Soit (e_1, \dots, e_n) une base quelconque de E . A partir de (e_1, \dots, e_n) on construit une base orthonormale $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ en appliquant ce que l'on appelle le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Pour commencer, on pose

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1 ,$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On construit maintenant le second vecteur. On pose

$$x = e_2 - \langle e_2, \tilde{e}_1 \rangle \tilde{e}_1 .$$

On vérifie que $\langle x, \tilde{e}_1 \rangle = 0$. On a $x \neq 0$ car e_2 n'est pas colinéaire à e_1 . On pose alors

$$\tilde{e}_2 = \frac{1}{\|x\|} x .$$

On a ainsi $\|\tilde{e}_1\| = \|\tilde{e}_2\| = 1$, et $\langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \rangle = 0$, de sorte que $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est une famille orthonormale. Si $n = 2$, le procédé s'arrête.

Preuve suite : Sinon, $n \geq 3$, et on cherche à déterminer λ et μ réels pour que le vecteur

$$x = e_3 + \lambda \tilde{e}_1 + \mu \tilde{e}_2$$

soit orthogonal à \tilde{e}_1 et \tilde{e}_2 . On trouve ici que

$$\langle x, \tilde{e}_1 \rangle = \langle e_3, \tilde{e}_1 \rangle + \lambda \quad \text{et que} \quad \langle x, \tilde{e}_2 \rangle = \langle e_3, \tilde{e}_2 \rangle + \mu .$$

Le vecteur

$$x = e_3 - \langle e_3, \tilde{e}_1 \rangle \tilde{e}_1 - \langle e_3, \tilde{e}_2 \rangle \tilde{e}_2$$

est alors orthogonal aux vecteurs \tilde{e}_1 et \tilde{e}_2 . Il est non nul car $e_3 \notin \text{Vect}(e_1, e_2)$. On pose

$$\tilde{e}_3 = \frac{1}{\|x\|} x ,$$

de sorte que $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est une famille orthonormale. Si $n = 3$, le procédé s'arrête, on a là une base orthonormale $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ de E .

Preuve suite et fin : Sinon, $n \geq 4$, et on continue jusqu'à obtenir une famille orthonormale composée d'autant de vecteurs que la dimension n de E . De façon un peu plus précise, et si les $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k)$ sont construits comme ci-dessus, avec $k < n$, n la dimension de E , on cherche des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ pour que le vecteur

$$x = e_{k+1} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \tilde{e}_i$$

soit orthogonal aux vecteurs \tilde{e}_i , $i = 1, \dots, k$. On trouve ici que

$$\lambda_i = -\langle e_{k+1}, \tilde{e}_i \rangle .$$

On sait que $x \neq 0$ car $e_{k+1} \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. On pose

$$\tilde{e}_{k+1} = \frac{1}{\|x\|} x ,$$

de sorte que $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k, \tilde{e}_{k+1})$ est une famille orthonormale. En répétant ce procédé on construit une famille orthonormale composée de n vecteurs, n la dimension de E . Cette famille est forcément une base orthonormale de E . D'où le résultat. CQFD.

Il existe une formule simple donnant les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale . C'est l'objet du résultat suivant.

Lemme

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit de plus $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Si $x \in E$ a pour coordonnées (x_1, \dots, x_n) dans \mathcal{B} , alors $x_i = \langle x, e_i \rangle$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Preuve : Par définition des coordonnées,

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n .$$

Par suite, pour tout i ,

$$\langle x, e_i \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \langle e_j, e_i \rangle ,$$

et puisque $\langle e_j, e_i \rangle = \delta_{ij}$, on obtient que $\langle x, e_i \rangle = x_i$. Le résultat est démontré. CQFD.

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale pour un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, le produit scalaire (et la norme associée) dans cette base prend l'expression du produit scalaire euclidien (et de la norme euclidienne). Avec les notations usuelles,

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i .\end{aligned}$$

En particulier, on récupère aussi que $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice : Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2. On place sur $\mathbb{R}_2[X]$ la forme bilinéaire symétrique

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx .$$

(1) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

(2) Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution : (1) Il est clair que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire symétrique et que $\langle P, P \rangle \geq 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Si

$$\langle P, P \rangle = \int_0^1 P(x)^2 dx = 0$$

alors $P(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ puisqu'un polynôme est une fonction continue. En particulier les coefficients du polynôme sont nuls puisqu'un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont les coefficients ne sont pas nuls a au plus deux racines. Il en aurait ici une infinité, d'où la nullité des coefficients. En bref, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

(2) $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. On va appliquer Gram-Schmidt à cette base. On a $\|1\| = 1$. On pose $P_1 = 1$ le polynôme constant égal à 1. On pose $P = X - \lambda P_1$ et on cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ de sorte que $\langle P_1, P \rangle = 0$. On a

$$\begin{aligned}\langle P_1, P \rangle &= \int_0^1 (x - \lambda) dx \\ &= \frac{1}{2} - \lambda.\end{aligned}$$

On veut donc $\lambda = \frac{1}{2}$. Et alors

$$\begin{aligned}\|P\|^2 &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) dx \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

On pose alors

$$P_2 = 2\sqrt{3} \left(X - \frac{1}{2} \right) .$$

On pose ensuite

$$P = X^2 - \lambda P_2 - \mu P_1$$

et on cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ pour que $\langle P_2, P \rangle = 0$ et $\langle P_1, P \rangle = 0$. On a

$$\begin{aligned} \langle P_1, P \rangle &= \int_0^1 (x^2 - \lambda P_2(x) - \mu P_1(x)) dx \\ &= \int_0^1 x^2 dx - \mu \\ &= \frac{1}{3} - \mu \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned}
\langle P_2, P \rangle &= \int_0^1 (x^2 - \lambda P_2(x) - \mu P_1(x)) P_2(x) dx \\
&= \int_0^1 x^2 P_2(x) dx - \lambda \\
&= 2\sqrt{3} \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) x^2 dx - \lambda \\
&= 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) - \lambda \\
&= \frac{\sqrt{3}}{6} - \lambda .
\end{aligned}$$

On veut donc

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1}{3} .$$

On a en particulier calculé

$$\int_0^1 x^2 P_2(x) dx = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

On a aussi calculé

$$\int_0^1 x^2 P_1(x) dx = \frac{1}{3}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \|P\|^2 &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{\sqrt{3}}{6} P_2(x) - \frac{1}{3} P_1(x) \right)^2 dx \\ &= \int_0^1 x^4 dx - \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^1 x^2 P_2(x) dx - \frac{2}{3} \int_0^1 x^2 P_1(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{12} \int_0^1 P_2(x)^2 dx + \frac{\sqrt{3}}{9} \int_0^1 P_2(x) P_1(x) dx + \frac{1}{9} \int_0^1 P_1(x)^2 dx \\ &= \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\|P\|^2 &= \frac{1}{5} - \frac{1}{12} - \frac{1}{9} \\ &= \frac{9 \times 4 - 3 \times 5 - 4 \times 5}{4 \times 5 \times 9} \\ &= \frac{1}{4 \times 5 \times 9} \\ &= \frac{1}{180}\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned}P_3 &= 3\sqrt{20} \left(X^2 - \left(X - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3} \right) \\ &= 3\sqrt{20} \left(X^2 - X + \frac{1}{6} \right) .\end{aligned}$$

La famille (P_1, P_2, P_3) est alors une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$. \square

4. Orthogonalité et sous espaces vectoriels

Les idées contenues dans le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt s'adaptent facilement pour démontrer le résultat suivant.

Théorème

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Toute famille orthonormale de vecteurs de E se complète en une base orthonormale de E .

Preuve : Notons n la dimension de E , et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire placé sur E . Soit (e_1, \dots, e_k) une famille orthonormale. Elle est libre (car orthonormale) donc $k \leq n$. Si $k = n$, c'est une base et il n'y a rien à ajouter. Sinon $k < n$ et la famille n'est pas génératrice. Du coup, c'est une idée que l'on a souvent utilisée, il existe un vecteur x de E tel que $x \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. En particulier, $x \neq 0$. On pose

Preuve suite et fin :

$$y = x - \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i ,$$

où les $\lambda_i \in \mathbb{R}$ sont choisis de sorte que $\langle e_i, y \rangle = 0$ pour tout $i = 1, \dots, k$. Donc, $\lambda_i = \langle e_i, x \rangle$ puisque

$$\langle e_i, y \rangle = \langle e_i, x \rangle - \lambda_i .$$

Comme $x \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, on a $y \neq 0$. On pose

$$e_{k+1} = \frac{1}{\|y\|} y ,$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors (e_1, \dots, e_{k+1}) est une famille orthonormale composée de $k + 1$ vecteurs. Dès lors, soit $k + 1 = n$, et on a en fait une base de E , soit $k + 1 < n$ et on recommence jusqu'à obtenir (il s'agit d'un processus fini) une famille orthonormale qui soit composée de n vecteurs, et donc une base orthonormale de E . D'où le résultat. CQFD.

Théorème

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Pour tout sous espace vectoriel F de E , on a $E = F \oplus F^\perp$.

Preuve : Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire placé sur E . Il est déjà clair que la somme de F et F^\perp est nécessairement directe. En effet, $F \cap F^\perp = \{0\}$ car si $x \in F$ et $x \in F^\perp$, alors $\langle x, x \rangle = 0$ de sorte que $x = 0$. Par ailleurs, F est un espace vectoriel de dimension finie. Il possède donc une base orthonormale (e_1, \dots, e_k) , k la dimension de F . On complète cette base en une base orthonormale (e_1, \dots, e_n) de E , n la dimension de E . Alors, clairement,

$$F^\perp = \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n) .$$

Les e_{k+1}, \dots, e_n sont en effet dans F^\perp . Comme (e_{k+1}, \dots, e_n) est une famille libre (toute sous famille d'une famille libre étant une famille libre) on en déduit que $\dim F^\perp \geq n - k$. Or $\dim(F \oplus F^\perp) \leq \dim E$ et $\dim(F \oplus F^\perp) = \dim F + \dim F^\perp$. Donc $\dim F^\perp \leq n - k$ puis $\dim F^\perp = n - k$ et on récupère bien que $E = F \oplus F^\perp$. Le théorème est démontré. CQFD.

Fin du chapitre 6