Algèbre bilinéaire et Intégration

par

Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise

Année 2019-2020

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Par définition, une forme bilinéaire sur E est une application $B : E \times E \to \mathbb{R}$ qui vérifie que pour tout $x_0 \in E$ et tout $y_0 \in E$, les applications

$$x \to B(x, y_0) \quad \text{et} \quad y \to B(x_0, y)$$

sont linéaires de E dans $\mathbb{R}$. La forme bilinéaire B est dite symétrique si $B(x, y) = B(y, x)$ pour tous $x, y \in E$.

En d'autres termes, une fonction $B : E \times E \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire si la fonction est linéaire par rapport à chacune de ses variables. La plus simple des formes bilinéaires est la fonction $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $B(x, y) = xy$.

Une forme bilinéaire (non identiquement nulle) n'est jamais linéaire par rapport au couple (x, y). Par exemple, pour $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $B(x, y) = xy$, on a que

$$B(x + x', y + y') \neq B(x, y) + B(x', y')$$

dès que $x'y + xy' \neq 0$ car

$$B(x + x', y + y') - B(x, y) - B(x', y') = x'y + xy' \ .$$

En dimension finie, ce qui sera notre cas, les formes bilinéaires sont par contre, comme les applications linéaires, représentables par des matrices. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit de plus $B : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E, et soit B_{ij} les réels

$$B_{ij} = B(e_i, e_j)$$

où $i, j = 1, \ldots, n$. Si x et y sont deux vecteurs de E de coordonnées respectives $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathcal{B}$, donc $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, alors

$$B(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij} x_i y_j \ .$$

Pour démontrer cette relation on écrit que

$$\begin{aligned} B(x,y) &= B\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i B\Big(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j B(e_i, e_j) \end{aligned}$$

puisque pour tout $x_0 \in E$ et tout $y_0 \in E$, les applications

$$x \to B(x, y_0) \quad \text{et} \quad y \to B(x_0, y)$$

sont linéaires sur E. D'un point de vue matriciel cela donne lieu à la définition suivante.

Définition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit de plus $B : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E. Par définition, la matrice de B dans la base $\mathcal{B}$, notée $M_{\mathcal{B}}(B)$, est la matrice $M_{\mathcal{B}}(B) = (B_{ij})_{i,j}$ carrée d'ordre n composée des

$$B_{ij} = B(e_i, e_j) \ .$$

Elle caractérise B en ce sens que pour tous x et y dans E,

$$B(x, y) = {}^t V_{\mathcal{B}}(x) M_{\mathcal{B}}(B) V_{\mathcal{B}}(y) \ ,$$

où $V_{\mathcal{B}}(x)$ et $V_{\mathcal{B}}(y)$ représentent les matrices colonnes composées respectivement des coordonnées de x et y dans $\mathcal{B}$, et où ${}^t V_{\mathcal{B}}(x)$ est la matrice ligne transposée de $V_{\mathcal{B}}(x)$.

D'un point de vue matriciel on a écrit que

$$B(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & \dots & B_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

et , comme on s'en convaincra facilement, on retrouve la relation déjà vue

$$B(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij} x_i y_j \ .$$

Exercice : Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels d'ordre 2 et soit $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ constituée des polynômes $P_1(X) = 1$, $P_2(X) = X$ et $P_3(X) = X^2$. On considère $B : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ donnée par

$$B(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt \ .$$

Montrer que B est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}_2[X]$. Donner sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution : Il est clair que $\forall P, Q, R \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^1 (P(t) + \lambda Q(t))R(t)dt = \int_0^1 P(t)R(t)dt + \lambda \int_0^1 Q(t)R(t)dt \text{ , et}$$
$$\int_0^1 P(t)(Q(t) + \lambda R(t))dt = \int_0^1 P(t)Q(t)dt + \lambda \int_0^1 P(t)R(t)dt \text{ .}$$

Par suite,

$$B(P + \lambda Q, R) = B(P, R) + \lambda B(Q, R) \text{ et}$$
$$B(P, Q + \lambda R) = B(P, Q) + \lambda B(P, R)$$

et donc B est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}_2[X]$. La forme est aussi symétrique, i.e. $B(P, Q) = B(Q, P)$ pour tous P et Q, et

$$B(P_1, P_1) = \int_0^1 dt = 1 \text{ , } B(P_1, P_2) = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$$
$$B(P_1, P_3) = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \text{ , } B(P_2, P_1) = B(P_1, P_2) = \frac{1}{2}$$

De même,

$$B(P_2,P_2)=\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}\ ,\ \ B(P_2,P_3)=\int_0^1 t^3dt=\frac{1}{4}$$
$$B(P_3,P_1)=B(P_1,P_3)=\frac{1}{3}\ ,\ \ B(P_3,P_2)=B(P_2,P_3)=\frac{1}{4}$$
$$B(P_3,P_3)=\int_0^1 t^4dt=\frac{1}{5}\ .$$

Par suite,

$$M_{\mathcal{B}}(B)=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\ .$$

$\square$

Exercice : Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées réelles d'ordre 2. On note $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Montrer que l'application $\Phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\Phi(A, B) = \mathrm{trace}({}^t AB)$$

est une forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner sa matrice dans la base canonique (A_1, A_2, A_3, A_4) de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution : Il est clair que $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\text{trace}({}^t(A+\lambda B), C) = \text{trace}({}^tAC) + \lambda\text{trace}({}^tBC) \ , \ \text{et}$$
$$\text{trace}({}^tA(B+\lambda C)) = \text{trace}({}^tAB) + \lambda\text{trace}({}^tAC) \ .$$

Donc Φ est bien bilinéaire. On calcule

$$\Phi(A_i, A_j) = \delta_{ij}$$

où les δ_{ij} sont les symbôles de Kroenecker (1 si $i = j$, 0 sinon). Par exemple,

$$\begin{aligned}
\Phi(A_2, A_3) &= \text{trace}({}^tA_2A_3) \\
&= \text{trace}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \text{trace} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \text{trace} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

Ou encore,

$$\begin{aligned}
\Phi(A_1, A_2) &= \operatorname{trace}({}^tA_1A_2) \\
&= \operatorname{trace}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{trace} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{trace} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

Par suite

$$M_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

$\square$

Théorème

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ deux bases de E, et $B : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E. Soit $P = M_{\mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathcal{B}}$. Alors

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}}(B) = {}^t P M_{\mathcal{B}}(B) P \ ,$$

où $M_{\mathcal{B}}(B)$ est la matrice de B dans la base $\mathcal{B}$, et $M_{\tilde{\mathcal{B}}}(B)$ est la matrice de B dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$.

Preuve : Etant donné $x \in E$, soient $V_{\mathcal{B}}(x)$ et $V_{\tilde{\mathcal{B}}}(x)$ les matrices colonnes composées respectivement des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et des coordonnées de x dans $\tilde{\mathcal{B}}$. Pour x et y deux vecteurs quelconques de E, on a

$$B(x, y) = {}^t V_{\mathcal{B}}(x) M_{\mathcal{B}}(B) V_{\mathcal{B}}(y) \ ,$$

Preuve suite et fin : et

$$B(x,y) = {}^tV_{\tilde{\mathcal{B}}}(x)M_{\tilde{\mathcal{B}}}(B)V_{\tilde{\mathcal{B}}}(y) \ .$$

De plus, $V_{\mathcal{B}}(x) = PV_{\tilde{\mathcal{B}}}(x)$, et $V_{\mathcal{B}}(y) = PV_{\tilde{\mathcal{B}}}(y)$. On peut ainsi écrire que

$$\begin{aligned} B(x,y) &= {}^tV_{\mathcal{B}}(x)M_{\mathcal{B}}(B)V_{\mathcal{B}}(y) \\ &= {}^tV_{\tilde{\mathcal{B}}}(x)\left({}^tPM_{\mathcal{B}}(B)P\right)V_{\tilde{\mathcal{B}}}(y) \\ &= {}^tV_{\tilde{\mathcal{B}}}(x)M_{\tilde{\mathcal{B}}}(B)V_{\tilde{\mathcal{B}}}(y) \ . \end{aligned}$$

Puisque x et y sont quelconques, cela impose

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}}(B) = {}^tPM_{\mathcal{B}}(B)P \ ,$$

comme on le voit en prenant successivement des x et y de coordonnées dans $\tilde{\mathcal{B}}$ des n-uplets du type $(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$. Le théorème est démontré. CQFD.

Exercice : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note B la forme bilinéaire sur E définie par

$$B(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 - \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) - \frac{7}{2}(x_1y_3 + x_3y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_3 + x_3y_2)$$

pour tous $x = \sum_{i=1}^{3} x_ie_i$ et $y = \sum_{i=1}^{3} y_ie_i$.

(1) Ecrire la matrice $M_{\mathcal{B}}(B)$ de B dans $\mathcal{B}$.

(2) Montrer que les vecteurs $\tilde{e}_1 = e_1$, $\tilde{e}_2 = e_1 + 2e_2$, et $\tilde{e}_3 = 3e_1 - e_2 + e_3$ forment une base $\tilde{\mathcal{B}}$ de E. Ecrire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\tilde{\mathcal{B}}$.

(3) Calculer la matrice $M_{\tilde{\mathcal{B}}}(B)$ de B dans $\tilde{\mathcal{B}}$.

Solution : (1) La matrice $M_{\mathcal{B}}(B)$ de B dans $\mathcal{B}$ est composée des $B(e_i, e_j)$. On trouve

$$M_{\mathcal{B}}(B) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(2) On a trois vecteurs en dimension 3. Il suffit donc de montrer que la famille $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est libre. On a

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \tilde{e}_1 + \lambda_2 \tilde{e}_2 + \lambda_3 \tilde{e}_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 e_1 + \lambda_2 (e_1 + 2e_2) + \lambda_3 (3e_1 - e_2 + e_3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3) e_1 + (2\lambda_2 - \lambda_3) e_2 + \lambda_3 e_3 = 0 \end{aligned}$$

et puisque (e_1, e_2, e_3) est une base, on doit avoir que

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

En remontant de système de la dernière équation à la première, on trouve que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est donc libre, et puisque E est de dimension 3, il s'agit d'une base de E. Les colonnes de la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\tilde{\mathcal{B}}$ sont constituées des coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs de $\tilde{\mathcal{B}}$. Si $P = M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}$ est cette matrice de passage, on a donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Par formule de changement de base $M_{\tilde{\mathcal{B}}}(B) = {}^tPM_{\mathcal{B}}(B)P$. On calcule

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}(B)P &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & -10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a

$$ {}^tP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} $$

Par suite

$$ \begin{aligned} M_{\tilde{\mathcal{B}}}(B) &= {}^tPM_{\mathcal{B}}(B)P \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & -10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} . \end{aligned} $$

□

3. Dualité

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Le dual de E, noté $E^\star$, est par définition l'espace $L(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur E.

Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour $i = 1, \ldots, n$, on définit les éléments $e_i^\star \in E^\star$ par :

$$e_i^\star(e_j) = \delta_{ij}$$

pour tout $j = 1, \ldots, n$, où les δ_{ij} sont les symboles de Kroenecker. La famille $(e_1^\star, \ldots, e_n^\star)$ est alors une base de $E^\star$, dite base duale de la base $(e_1, \ldots, e_n)$. En particulier, E et $E^\star$ ont même dimension.

Preuve : Il suffit de montrer que la famille $(e_1^\star, \ldots, e_n^\star)$ est à la fois libre et génératrice dans $E^\star$. On montre tout d'abord que la famille est libre. Supposons que pour des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$,

$$\lambda_1 e_1^\star + \cdots + \lambda_n e_n^\star = 0 \ .$$

Preuve suite et fin : Alors pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$\lambda_1 e_1^\star(e_i) + \cdots + \lambda_n e_n^\star(e_i) = 0 \ ,$$

ce qui donne que $\lambda_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$ puisque $e_j^\star(e_i) = \delta_{ij}$. La famille est donc bien libre. On vérifie par ailleurs que la famille est génératrice en remarquant que pour tout $f \in E^\star$,

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i^\star \ .$$

Le membre de gauche et le membre de droite de cette identité sont en effet deux applications linéaires qui coïncident sur la base $(e_1, \dots, e_n)$, et si deux applications linéaires coïncident sur une même base, alors elles sont identiquement égales. Le théorème est démontré. CQFD.

Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors $E^{\star\star}$ s'assimile naturellement à E au sens où il existe un isomorphisme naturel de E dans $E^{\star\star}$. Cet isomorphisme Φ est défini par : pour tout $x \in E$, $\Phi(x)$ est l'élément de $E^{\star\star} = L(E^\star, \mathbb{R})$ défini par la relation $\Phi(x).(f) = f(x)$ pour tout $f \in E^\star$.

Preuve : Il suit du théorème précédent que $E^{\star\star}$ a même dimension que $E^\star$, qui a à son tour même dimension que E. Donc E et $E^{\star\star}$ ont mêmes dimensions. Pour montrer que $\Phi : E \to E^{\star\star}$ est un isomorphisme de E sur $E^{\star\star}$ il nous suffit donc de montrer que Φ est injective (on passe sur le fait que Φ est bien linéaire, ce qui est immédiat). Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et soit $(e_1^\star, \ldots, e_n^\star)$ sa base duale. Si $x = \sum_i x_i e_i$ est tel que $\Phi(x) = 0$, alors $\Phi(x).(e_i^\star) = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Donc $e_i^\star(x) = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Or $e_i^\star(x) = x_i$, de sorte que si $\Phi(x) = 0$, alors $x = 0$. D'où le théorème. CQFD.

4. Rang d'une forme bilinéaire

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $B : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E. On note B_1 et B_2 les applications de E dans $E^\star$ définies par : pour tout $x \in E$, $B_1(x)$ est défini par

$$B_1(x).(y) = B(x, y) \; , \; \forall y \in E$$

et, pour tout $y \in E$, $B_2(y)$ est défini par

$$B_2(y).(x) = B(x, y) \; , \; \forall x \in E \; .$$

On vérifie facilement que B_1 et B_2 sont linéaires, ce que l'on peut encore écrire sous la forme $B_1 \in L(E, E^\star)$ et $B_2 \in L(E, E^\star)$.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}^\star = (e_i^\star, \ldots, e_n^\star)$ la base duale de $\mathcal{B}$. Soit $\eta \in E^\star$, et soient $\eta_1, \ldots, \eta_n$ les coordonnées de η dans $\mathcal{B}^\star$. On a alors l'égalité $\eta = \sum_{j=1}^n \eta_j e_j^\star$, et on obtient que $\eta(e_i) = \eta_i$ pour tout i (puisque $e_j^\star(e_i) = \delta_{ij}$). Les coordonnées d'une forme η dans la base duale $\mathcal{B}^\star$ sont les $\eta_i = \eta(e_i)$. On démontre la proposition suivante.

Proposition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, et $B : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E. Les trois quantités r_1, r_2, r_3 définies par :

(i) r_1 vaut le rang de B_1, application linéaire de E dans $E^\star$,

(ii) r_2 vaut le rang de B_2, application linéaire de E dans $E^\star$, et

(iii) r_3 vaut le rang de la matrice de B dans $\mathcal{B}$,

sont en fait égales.

Preuve : Notons $\mathcal{B}^\star$ la base duale de $\mathcal{B}$, et $M_{\mathcal{B}}(B)$ la matrice de B dans $\mathcal{B}$. On vérifie facilement que

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}^\star}(B_1) = {}^t M_{\mathcal{B}}(B) \ ,$$

où $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}^\star}(B_1)$ est la matrice de représentation de B_1 dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^\star$. En effet, les coordonnées de $B_1(e_i)$ dans $\mathcal{B}^\star$ sont (cf. ci-dessus) les $B_1(e_i).(e_j)$, à savoir exactement les B_{ij}.

Preuve suite et fin : De la même façon, on vérifie facilement que

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}^\star}(B_2) = M_{\mathcal{B}}(B) \ ,$$

où $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}^\star}(B_2)$ est la matrice de représentation de B_2 dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^\star$. En remarquant que les rangs d'une matrice et de sa transposée sont égaux (c'est évident avec la définition du rang via le déterminant des sous matrices), on obtient la proposition avec ce qui a été dit au chapitre précédent sur les rangs d'une application linéaire et de ses matrices de représentations. CQFD.

Définition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, et $B : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E. Le rang de B, noté $Rg(B)$, est l'une des trois quantités équivalentes de la proposition précédente. Il ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$.

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Une forme quadratique sur E est une application $Q : E \to \mathbb{R}$ qui s'exprime, dans chaque base de E, sous la forme d'un polynôme homogène de degré 2 des variables coordonnées.

En d'autres termes, $Q : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique si, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, il existe des réels a_{ij} tels que

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \ , \qquad (\star)$$

où n est la dimension de E, et les x_i sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$. On vérifie facilement que si $(\star)$ est vérifiée dans une base $\mathcal{B}$, elle l'est aussi (avec des a_{ij} différents !) dans toute autre base $\tilde{\mathcal{B}}$ de E. En effet, l'expression de coordonnées $\tilde{x}_i$ dans une base, en fonction des coordonnées x_i dans une autre base, est linéaire.

Exercice : Soit E de dimension 2, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E et $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ une autre base de E. On note (x_1, x_2) les coordonnées d'un vecteur X dans $\mathcal{B}$ et $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ les coordonnées de X dans $\tilde{\mathcal{B}}$. On suppose que $\tilde{e}_1 = e_1 + 2e_2$ et $\tilde{e}_2 = 3e_1 + e_2$.

(1) Exprimer x_1 et x_2 en fonction de $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_2$.

(2) Soit Q est la forme quadratique donnée dans $\mathcal{B}$ par

$$Q(X) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2 \ .$$

Donner l'expression de Q dans $\tilde{\mathcal{B}}$.

Solution : (1) On a

$$\begin{aligned} X &= \tilde{x}_1\tilde{e}_1 + \tilde{x}_2\tilde{e}_2 \\ &= \tilde{x}_1(e_1 + 2e_2) + \tilde{x}_2(3e_1 + e_2) \\ &= (\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2)e_1 + (2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2)e_2 \\ &= x_1e_1 + x_2e_2 \ . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} x_1 = \tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 \\ x_2 = 2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \ . \end{cases}$$

(2) On a donc

$$\begin{aligned} Q(X) &= 2x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2 \\ &= 2(\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2)^2 + 6(\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2)(2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) - (2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2)^2 \\ &= 2(\tilde{x}_1^2 + 9\tilde{x}_2^2 + 6\tilde{x}_1\tilde{x}_2) + 6(2\tilde{x}_1^2 + 3\tilde{x}_2^2 + 7\tilde{x}_1\tilde{x}_2) \\ &\quad - (4\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + 4\tilde{x}_1\tilde{x}_2) \\ &= (2 + 12 - 4)\tilde{x}_1^2 + (12 + 42 - 4)\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + (18 + 18 - 1)\tilde{x}_2^2 \\ &= 10\tilde{x}_1^2 + 50\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + 35\tilde{x}_2^2 \ . \end{aligned}$$

La forme quadratique Q qui était un polynôme homogène de degré 2 des variables coordonnées dans $\mathcal{B}$ est encore un polynôme homogène de degré 2 des variables coordonnées dans $\tilde{\mathcal{B}}$. Par contre, bien sûr, les coefficients changent. $\square$

Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Une fonction $Q : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique sur E si et seulement si :

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$, et

(ii) l'application $B : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par

$$B(x,y) = \tfrac{1}{2}\big(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\big)$$

est bilinéaire sur E.

Dans ce cas, B est symétrique, on a $B(x,x) = Q(x)$ pour tout x, et on dit que B est la forme bilinéaire associée à Q.

Un modèle de forme quadratique est $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $Q(x) = x^2$. La forme bilinéaire associée est $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $B(x,y) = xy$. L'identité de (ii) est l'identité remarquable

$$xy = \frac{1}{2}\left((x+y)^2 - x^2 - y^2\right) \ .$$

Une identité comme (ii) nous dit que l'on connait tous les doubles produits dès lors que l'on connait tous les carrés.

Preuve : Si Q est une forme quadratique, (i) est bien évidemment vérifiée. Par ailleurs, si $\mathcal{B}$ est une base de E, et si Q s'écrit dans $\mathcal{B}$ sous la forme $(\star)$, alors le B donné par (ii) vaut

$$B(x,y) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} + a_{ji}) x_i y_j$$

où les x_i et y_i sont les coordonnées de x et y dans $\mathcal{B}$. Il suit que (ii) est elle aussi vérifiée, à savoir que B est bien bilinéaire, si Q est quadratique. Réciproquement, supposons que (i) et (ii) soient vérifiées. En écrivant que

$$B(x,x) = \frac{1}{2}\big(Q(2x) - 2Q(x)\big) \ ,$$

et en utilisant (i), on voit que $Q(x) = B(x,x)$. Etant donnée une base $\mathcal{B}$ de E, composée de vecteurs e_i, et puisque B est bilinéaire, il existe des $a_{ij} = B(e_i, e_j)$ tels que

$$B(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j \ ,$$

Preuve suite et fin : où les x_i et y_i sont les coordonnées de x et y dans $\mathcal{B}$. Il s'ensuit que

$$Q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \ ,$$

ce qui montre que Q est bien une forme quadratique. Le théorème est démontré. CQFD.

Avec ce théorème on obtient une autre définition possible des formes quadratiques. A savoir : une application $Q : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique sur E s'il existe une forme bilinéaire symétrique B sur E pour laquelle $Q(x) = B(x, x)$. Dans ce cas B est unique et on dit alors que B est la forme bilinéaire associée à la forme quadratique Q, ou que Q est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire B.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. On vérifie facilement qu'une forme bilinéaire B sur E est symétrique si et seulement si, pour toute base de E, sa matrice dans cette base est symétrique.

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et B une forme bilinéaire symétrique sur E. On dit que deux vecteurs x et y de E sont B-orthogonaux si $B(x, y) = 0$. Si A est un sous ensemble de E, le B-orthogonal de A, noté $A^{\perp_B}$, est défini par

$$A^{\perp_B} = \left\{ y \in E \ / \ \forall x \in A, B(x, y) = 0 \right\} .$$

En d'autres termes, $A^{\perp_B}$ est l'ensemble des vecteurs de E qui sont B-orthogonaux à tous les vecteurs de A.

On vérifie facilement que pour tout sous ensemble A de E, $A^{\perp_B}$ est un sous espace vectoriel de E. Les vecteurs $x \in E$ qui vérifient que $B(x, x) = 0$ sont dits isotropes (sous entendu pour B). On pourra par ailleurs vérifier que les relations suivantes sont vraies :

(i) $\forall A \subset B \subset E$, $B^{\perp_B} \subset A^{\perp_B}$,

(ii) $\forall A, B \subset E$, $(A \cup B)^{\perp_B} = A^{\perp_B} \cap B^{\perp_B}$,

(iii) $\forall A, B \subset E$, $A^{\perp_B} + B^{\perp_B} \subset (A \cap B)^{\perp_B}$,

(iV) $\forall A \subset E$, $A^{\perp_B} = Vect(A)^{\perp_B}$, et

(v) $\forall A \subset E$, $A \subset (A^{\perp_B})^{\perp_B}$.

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et B une forme bilinéaire symétrique sur E. On dit que la base $(e_1, \dots, e_n)$ est B-othogonale si pour tous $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$, $B(e_i, e_j) = 0$. La base est dite B-orthonormale si pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $B(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, où les δ_{ij} sont les symboles de Kroenecker.

Une base B-orthonormale est une base B-orthogonale pour laquelle on a en plus que $B(e_i, e_i) = 1$ pour tout i.

Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Pour toute forme bilinéaire symétrique B sur E, il existe une base de E qui est B-orthogonale.

Preuve : Notons n la dimension de E. On démontre le théorème par récurrence sur n. Si $n = 1$, le théorème est trivialement vrai. On suppose maintenant que pour tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, et toute forme bilinéaire symétrique B sur cet espace, il existe une base de l'espace qui soit B-orthogonale. On considère alors E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$, et B une forme bilinéaire symétrique sur E. On veut montrer que E possède une base B-orthogonale. Sans perdre en généralité, on pourra supposer que B n'est pas la forme bilinéaire nulle (auquel cas le résultat est vrai, toute base de E étant B-orthogonale). Si B n'est pas identiquement nulle, il existe un vecteur e_{n+1} de E pour lequel $Q(e_{n+1}) \neq 0$, où Q est la forme quadratique associée à B. En effet, si $Q \equiv 0$ alors $B \equiv 0$. On note F le sous espace vectoriel

Preuve suite : (la droite vectorielle) de E de base e_{n+1}, et on note $F^{\perp_B}$ le B-orthogonal de F. Alors

$$F^{\perp_B} = \left\{x \in E \ / \ B(e_{n+1}, x) = 0\right\} \ ,$$

de sorte que $F^{\perp_B} = \mathrm{Ker} B(e_{n+1}, \cdot)$, où $B(e_{n+1}, \cdot)$ est la forme linéaire sur E qui à x associe $B(e_{n+1}, x)$. Cette forme linéaire est surjective, puisque non nulle, et donc de rang 1. Il suit du théorème du rang que son noyau est de dimension n, et donc que $F^{\perp_B}$ est de dimension n. On vérifie facilement que $F \cap F^{\perp_B} = \{0\}$. En effet, si $x \in F \cap F^{\perp_B}$, alors $x \in F$ entraîne que $x = \lambda e_{n+1}$, tandis que $x \in F$ et $x \in F^{\perp_B}$ entraînent que x doit être B-orthogonal à lui-même, et donc que $B(x, x) = 0$. Or $B(\lambda e_{n+1}, \lambda e_{n+1}) = \lambda^2 B(e_{n+1}, e_{n+1})$ de sorte que nécessairement $\lambda = 0$, et donc $x = 0$ (puisque $Q(e_{n+1}) = B(e_{n+1}, e_{n+1}) \neq 0$). Comme $\dim F = 1$, $\dim F^{\perp_B} = n$, $\dim E = n + 1$, et $F \cap F^{\perp_B} = \{0\}$, on a que

$$E = F \oplus F^{\perp_B} \ .$$

Preuve suite et fin : Par hypothèse de récurrence, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $F^{\perp_B}$ qui est B-orthogonale. Puisque $E = F \oplus F^{\perp_B}$, $(e_1, \dots, e_{n+1})$ est une base de E. Par ailleurs, cette base est B-orthogonale puisque $e_{n+1} \in F$ et les e_i, $i = 1, \dots, n$, sont dans $F^{\perp_B}$. On a donc montré que si la propriété d'existence d'une base B-orthogonale est vraie en dimension n, alors elle l'est aussi en dimension $n + 1$. Cela démontre le théorème par récurrence. CQFD.

A titre de remarque, il n'existe pas toujours, pas forcément de base B-orthonormale (le problème vient des vecteurs isotropes). Un contre exemple (extrême) est donné par le cas de la forme bilinéaire nulle.

Définition

Si Q est une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, on appelle rang de Q le rang de la forme bilinéaire symétrique qui lui est associée.

Théorème (Loi d'inertie de Sylvester)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, et Q une forme quadratique de rang r sur E. Il existe alors un entier $p \leq r$, et une base $\mathcal{B}$ de E, de sorte que, pour tout $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$,

$$Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2 \ .$$

De plus, p ne dépend que de Q et pas de $\mathcal{B}$ au sens où s'il existe une autre base $\tilde{\mathcal{B}}$ de E, et un entier $\tilde{p} \leq r$, tels que pour tout $x \in E$ de coordonnées $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ dans $\tilde{\mathcal{B}}$,

$$Q(x) = \tilde{x}_1^2 + \cdots + \tilde{x}_{\tilde{p}}^2 - \tilde{x}_{\tilde{p}+1}^2 - \cdots - \tilde{x}_r^2 \ ,$$

alors, nécessairement, $\tilde{p} = p$.

En d'autres termes, pour toute forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie, il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle Q s'écrit sous la forme

$$Q(x) = \sum_{\text{sur certains } i} x_i^2 - \sum_{\text{sur d'autres } i} x_i^2 \ .$$

En ce qui concerne la terminologie, l'entier p du théorème permet de définir ce que l'on appelle la signature de Q.

Définition

Une forme quadratique Q est dite de signature (p, q) si $p + q = Rg(Q)$, et s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle

$$Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2 \ .$$

La signature est indépendante de la base.

On démontre maintenant le théorème de Sylvester.

Preuve : (1) On montre pour commencer qu'il existe un entier $p \leq r$ et une base de E de sorte que, dans cette base, Q s'écrive comme dans le théorème de Sylvester. Pour cela, on note B la forme bilinéaire associée à Q, et on considère $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base B-orthogonale de E. La matrice de B dans $\mathcal{B}$ est alors diagonale, puisque $B(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$. Notons $\lambda_i = Q(e_i)$, $i = 1, \ldots, n$, les termes sur la diagonale de la matrice $M_{\mathcal{B}}(B)$ de B dans $\mathcal{B}$. Il est clair que

$$\mathrm{Rg}\big(M_{\mathcal{B}}(B)\big) \ = \ \text{Nombre de } \lambda_i \text{ non nuls} \ .$$

Si on note $r = \mathrm{Rg}(B)$, et quitte à permuter les vecteurs e_i, on peut supposer que $\lambda_i \neq 0$ si $i \leq r$, et $\lambda_i = 0$ si $i = r+1, \ldots, n$. Si x a pour coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, on a que

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 \ .$$

Preuve suite : Soit p le nombre de λ_i strictement positifs. Toujours quitte à permutter les e_i, on peut supposer que

$$\begin{aligned}\lambda_i > 0 \text{ si } 1 \leq i \leq p,\\ \lambda_i < 0 \text{ si } p+1 \leq i \leq r\ .\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned}\mu_i = \sqrt{\lambda_i} \text{ si } 1 \leq i \leq p,\\ \mu_i = \sqrt{-\lambda_i} \text{ si } p+1 \leq i \leq r\ .\end{aligned}$$

et on pose ensuite

$$\begin{aligned}\tilde{e}_i = \frac{1}{\mu_i} e_i \text{ si } 1 \leq i \leq r,\\ \tilde{e}_i = e_i \text{ si } r+1 \leq i \leq n\ .\end{aligned}$$

Alors $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ est une base B-orthogonale de E, ce qui se vérifie facilement en se souvenant que $\mathcal{B}$ l'est.

Preuve suite : Par suite, si x a pour coordonnées $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ dans $\tilde{\mathcal{B}}$, alors,

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{p} \tilde{x}_i^2 - \sum_{i=p+1}^{r} \tilde{x}_i^2$$

puisque $Q(\tilde{e}_i) = 1$ si $1 \leq i \leq p$, et $Q(\tilde{e}_i) = -1$ si $p+1 \leq i \leq r$. Cela démontre la première partie du théorème de Sylvester.

(2) On démontre maintenant la seconde partie du théorème de Sylvester. On suppose qu'il existe deux entiers p, $\tilde{p}$, et deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ de E tels que, dans $\mathcal{B}$ et dans $\tilde{\mathcal{B}}$,

$$Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2$$

et

$$Q(x) = \tilde{x}_1^2 + \cdots + \tilde{x}_{\tilde{p}}^2 - \tilde{x}_{\tilde{p}+1}^2 - \cdots - \tilde{x}_r^2 \ .$$

Preuve suite et fin : On note

E_1 le sous espace vectoriel de E de base $(e_1, \ldots, e_p)$,
E_2 le sous espace vectoriel de E de base $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$,
$\tilde{E}_1$ le sous espace vectoriel de E de base $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_{\tilde{p}})$,
$\tilde{E}_2$ le sous espace vectoriel de E de base $(\tilde{e}_{\tilde{p}+1}, \ldots, \tilde{e}_n)$.

On a clairement que

$Q(x) > 0$ si $x \in E_1 \backslash \{0\}$,
$Q(x) \leq 0$ si $x \in E_2$,
$Q(x) > 0$ si $x \in \tilde{E}_1 \backslash \{0\}$,
$Q(x) \leq 0$ si $x \in \tilde{E}_2$.

On en déduit que

$$E_1 \cap \tilde{E}_2 = \{0\} \quad \text{et} \quad \tilde{E}_1 \cap E_2 = \{0\} \ ,$$

de sorte que, par propriété de la dimension d'une somme dirècte,

$$dim E_1 + dim \tilde{E}_2 \leq n \quad \text{et} \quad dim \tilde{E}_1 + dim E_2 \leq n \ .$$

La première de ces deux inégalités entraîne que $p \leq \tilde{p}$. La seconde entraîne que $\tilde{p} \leq p$. On en déduit que $\tilde{p} = p$. La seconde partie du théorème de Sylvester est démontrée. CQFD.

Corollaire

Si Q_1 et Q_2 sont deux formes quadratiques sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et si Q_1 et Q_2 ont même signature, alors il existe $\Phi \in End(E)$ un isomorphisme de E tel que $Q_2(x) = Q_1\big(\Phi(x)\big)$ pour tout $x \in E$. Réciproquement, s'il existe une isomorphisme Φ de E tel que $Q_2(x) = Q_1\big(\Phi(x)\big)$ pour tout $x \in E$, alors Q_1 et Q_2 ont même signature.

Preuve : Si Q_1 et Q_2 ont même signature (p, q), il existe, en vertue du théorème de Sylvester, deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ de E telles que, dans ces bases,

$$Q_1(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2 \ ,$$
$$Q_2(x) = \tilde{x}_1^2 + \cdots + \tilde{x}_p^2 - \tilde{x}_{p+1}^2 - \cdots - \tilde{x}_r^2 \ .$$

Soit Φ l'isomorphisme de E qui envoie $\tilde{e}_i$ sur e_i. Alors pour tout $x = \sum_i \tilde{x}_i \tilde{e}_i$ dans E,

$$Q_1\big(\Phi(x)\big) = Q_2\big(x\big) \ .$$

Cela démontre la première partie du corollaire.

Preuve suite : Réciproquement, on considère Q_1 et Q_2 deux formes quadratiques sur E, et Φ un isomorphisme de E tels que $Q_2(x) = Q_1\big(\Phi(x)\big)$ pour tout $x \in E$. Soit (p, q) la signature de Q_2. Soit de plus $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ une base de E telle que, dans cette base,

$$Q_2(x) = \tilde{x}_1^2 + \cdots + \tilde{x}_p^2 - \tilde{x}_{p+1}^2 - \cdots - \tilde{x}_r^2 \ .$$

On note $\mathcal{B}$ la base de E formée des $e_i = \Phi(\tilde{e}_i)$. C'est bien une base puisque (cf. les cours précédents) les isomorphismes envoient les bases sur des bases. On a alors

$$\begin{aligned}
Q_1\big(\sum_i x_i e_i\big) &= Q_1\big(\Phi(\sum_i x_i \tilde{e}_i)\big) \\
&= Q_2\big(\sum_i x_i \tilde{e}_i\big) \\
&= x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2 \ .
\end{aligned}$$

Preuve suite et fin : On en déduit que, dans $\mathcal{B}$, Q_1 s'écrit sous la forme

$$Q_1(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2 \ ,$$

et donc que Q_1 est aussi de signature (p, q). Cela démontre la seconde partie du corollaire. CQFD.

Deux formes quadratiques Q_1 et Q_2 sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E sont dites **équivalentes** s'il existe un isomorphisme $\Phi \in \mathrm{End}(E)$ de E qui est tel que $Q_2(x) = Q_1\big(\Phi(x)\big)$ pour tout $x \in E$. Une formulation équivalente du corollaire est que : **deux formes quadratiques sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes si et seulement si elles ont même signature.**

Exercice : Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_3 - 6x_1x_2$$

(1) Pourquoi Q est-elle une forme quadratique ?

(2) Quelle est la forme bilinéaire symétrique B associée à Q ? Quelle est la matrice M de B dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?

(3) Décomposer Q en sommes et différences de carrés de façon à écrire Q sous la forme $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$ où $\tilde{Q}$ est une forme quadratique facile à manipuler et Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(4) Quelle est la signature de Q ?

(5) Caractériser les vecteurs isotropes de Q, à savoir les vecteurs x pour lesquels $Q(x) = 0$.

Solution : (1) Q est une forme quadratique car Q est un polynôme homogène de degré 2 des variables coordonnées (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

(2) On écrit

$$\begin{aligned} Q(X) &= x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_3 - 6x_1x_2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + (x_2x_3 + x_3x_2) \\ &\quad - (x_1x_3 + x_3x_1) - 3(x_1x_2 + x_2x_1) \end{aligned}$$

et par suite

$$Q(X) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j$$

où les a_{ij} sont symétriques et donnés par $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$, $a_{33} = -5$, $a_{12} = a_{21} = -3$, $a_{13} = a_{31} = -1$ et $a_{23} = a_{32} = 1$. On en déduit (cf. cours) que

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= x_1y_1 + x_2y_2 - 5x_3y_3 + (x_2y_3 + x_3y_2) \\ &\quad - (x_1y_3 + x_3y_1) - 3(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

La matrice de B dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice des a_{ij}. Elle est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

(3) On rappelle que

$$Q(X) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_3 - 6x_1x_2$$

On essaye d'éliminer x_1 de l'équation. On remarque que

$$(x_1 - x_3 - 3x_2)^2 = \mathbf{x_1^2} + x_3^2 + 9x_2^2 \mathbf{- 2x_1x_3} - \mathbf{6x_1x_2} + 6x_2x_3$$

On peut donc écrire que

$$\begin{aligned} Q(X) &= (x_1 - x_3 - 3x_2)^2 - (x_3^2 + 9x_2^2 + 6x_2x_3) + x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - 3x_2 - x_3)^2 - 8x_2^2 - 6x_3^2 - 4x_2x_3 \end{aligned}$$

On élimine maintenant x_2 des trois termes $8x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_2x_3$. On écrit pour cela que

$$8x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_2x_3 = 8\left(x_2 + \frac{1}{4}x_3\right)^2 + \frac{11}{2}x_3^2$$

Par suite

$$Q(X) = (x_1 - 3x_2 - x_3)^2 - 8\left(x_2 + \frac{1}{4}x_3\right)^2 - \frac{11}{2}x_3^2$$

Soit $\tilde{Q}$ la forme quadratique

$$\tilde{Q}(X) = x_1^2 - 8x_2^2 - \frac{11}{2}x_3^2$$

et soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 - 3x_2 - x_3, x_2 + \frac{1}{4}x_3, x_3\right)$$

Alors

$$Q(X) = \tilde{Q}\left(\Phi(X)\right)$$

pour tout $X \in \mathbb{R}^3$. Il reste à montrer que Φ est un isomorphisme.

Si on note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure. Son déterminant vaut (cf. cours précédents) $\det(M) = 1$. Donc M est inversible ($1 \neq 0$) et donc Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(4) Comme Φ est un isomorphisme, Q et $\tilde{Q}$ sont équivalentes. Par suite elles ont même signature. En changeant la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ en la base

$$\hat{\mathcal{B}} = \left(e_1, \frac{1}{2\sqrt{2}} e_2, \sqrt{\frac{2}{11}} e_3 \right)$$

l'expression de $\tilde{Q}$ dans cette base devient

$$\tilde{Q}(X) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

Sa signature est $(1, 2)$. La signature de Q est donc aussi $(1, 2)$.

(5) Les vecteurs isotropes de $\tilde{Q}$ sont facilement caractérisables dans $\hat{\mathcal{B}}$. Il s'agit du cône $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\mathcal{C} = \left\{ X \text{ de coordonnés } x_1, x_2, x_3 \text{ dans } \hat{\mathcal{B}} \text{ tels que } x_2^2 + x_3^2 = x_1^2 \right\}$$

Si on note $\mathcal{I}$ l'ensemble des vecteurs isotropes de Q, puisque $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$, on voit que

$$Q(X) = 0 \Leftrightarrow \Phi(X) \in \mathcal{C}$$

et on récupère donc, puisque Φ est un isomorphisme, que

$$\mathcal{I} = \Phi^{-1}(\mathcal{C})$$

Cette relation caractérise les vecteurs isotropes de Q.

Fin du chapitre 5