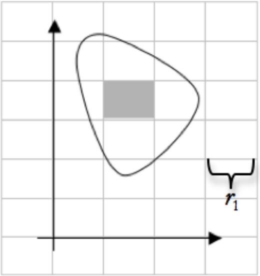
Algèbre bilinéaire et Intégration

par
Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise
Année 2019-2020

Soit Ω un domaine (un patatoïde) de $\mathbb{R}^2$. On considère un quadrillage de $\mathbb{R}^2$ en rectangles de tailles $\varepsilon_1 = \Delta x$ et $\varepsilon_2 = \Delta y$. On a alors le schéma suivant :

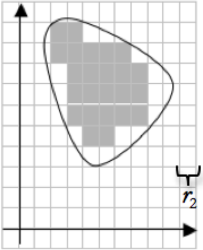


Ici $\Delta x = \Delta y = r_1$.
Une cellule est grisée.

On note m_{ij} les centres des rectangles qui constituent le quadrillage de $\mathbb{R}^2$. On considère alors la somme de Riemman :

$$S^{f}_{\Omega,\Delta x,\Delta y} = \sum_{i,j} f(m_{ij})\Delta x \Delta y \ ,$$

où la somme est effectuée sur les i, j pour lesquels le rectangle correspondant Rect_{ij} est entièrement inclus dans Ω (à savoir $\mathrm{Rect}_{ij} \subset \Omega$).



Ici $\Delta x = \Delta y = r_2$.

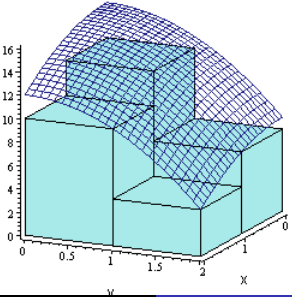
On a alors le théorème/définition suivant.

Définition

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine fermé borné de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur Ω. Les sommes de Riemann $S^f_{\Omega,\Delta x,\Delta y}$ convergent lorsque $\Delta x \to 0$ et $\Delta y \to 0$ vers une quantité notée

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} S^f_{\Omega,\Delta x,\Delta y}$$

et que l'on appelle intégrale double de f sur Ω.



Lemme (Propriétés premières de l'intégrale double)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *un domaine fermé borné de* $\mathbb{R}^2$.

1) $\forall f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ *continues,* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\iint_\Omega (f+g)(x,y)dxdy = \iint_\Omega f(x,y)dxdy + \iint_\Omega g(x,y)dxdy \ ,$$

$$\iint_\Omega (\lambda f)(x,y)dxdy = \lambda \iint_\Omega f(x,y)dxdy \ ,$$

2) $\forall f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ *continues, si* $f \leq g$, *alors*

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy \leq \iint_\Omega g(x,y)dxdy \ ,$$

3) $\forall f : \Omega \to \mathbb{R}$ *continue,*

$$\left| \iint_\Omega f(x,y)dxdy \right| \leq \iint_\Omega |f(x,y)|\, dxdy \ .$$

On a aussi la relation de Chasles étendue.

Lemme

Si Ω se découpe en deux domaines ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ si on oublie les problèmes de bord), alors
$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega_1} f(x,y)dxdy + \iint_{\Omega_2} f(x,y)dxdy.$

Et aussi les propriétés suivantes.

Lemme

(1) $\iint_\Omega 1dxdy = Aire(\Omega)$,

(2) Si $f \geq 0$, $\iint_\Omega f(x,y)dxdy = 0 \;\Leftrightarrow\; f \equiv 0$ *(f continue).*

Théorème (Fubini Sur Rectangle)

Si f est continue sur un rectangle $\Omega = [\alpha, \beta] \times [a, b]$, alors

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,y)dy \right) dx$$
$$= \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,y)dx \right) dy \ .$$

La dernière égalité a déjà été vue au chapitre précédent. Le théorème de Fubini ramène ainsi le calcul d'une intégrale double au calcul d'intégrales simples. Il y a des versions plus étendues de ce théorème.

Un domaine en piles de $\mathbb{R}^2$ est un domaine A du type

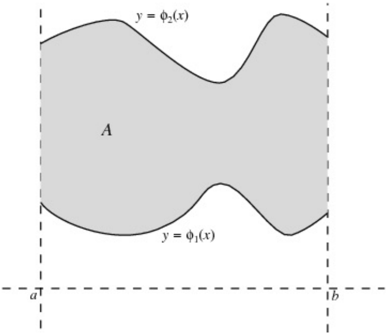
$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \leq x \leq b \ , \ \ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) \right\} \ ,$$

où $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues avec $\phi_1 \leq \phi_2$.

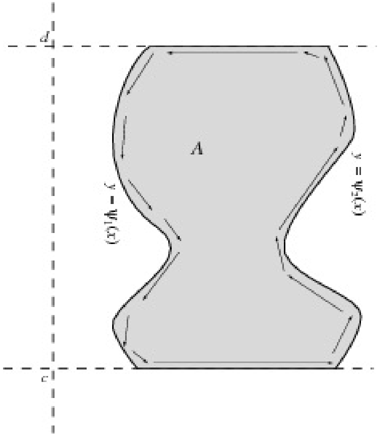
Un domaine en tranches de $\mathbb{R}^2$ est un domaine A du type

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \le y \le b \ , \quad \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\} \ ,$$

où $\psi_1, \psi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues avec $\psi_1 \le \psi_2$.



Domaine en piles



Domaine en tranches

Théorème (Fubini généralisé)

Si Ω est un domaine en piles, à savoir un domaine de la forme $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \leq x \leq b \ , \ \ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\right\}$, où $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont continues avec $\phi_1 \leq \phi_2$, alors

$$\iint_\Omega f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx$$

pour toute fonction continue $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Si Ω est un domaine en tranches, $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \leq y \leq b \ , \ \ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\right\}$, où $\psi_1, \psi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont continues avec $\psi_1 \leq \psi_2$, alors

$$\iint_\Omega f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx \right) dy$$

pour toute fonction continue $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

2. Changement de variables dans les intégrales doubles

On considère tout d'abord une application $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Donc $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, où $\Phi_1, \Phi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ si :

(1) les dérivées partielles $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}$ et $\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}$ existent en tout point de $\mathbb{R}^2$,

(2) les dérivées partielles $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}$ et $\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ en tant qu'applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

On dit que Φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ si :

(1) Φ est bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$,

(2) Φ et Φ^{-1} sont de classe C^1.

Ces définitions se généralisent facilement au cas où l'on remplace $\mathbb{R}^2$ par un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ (et on peut parler d'application de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, ou encore de C^1-difféomorphisme d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$).

La matrice jacobienne en un point (x, y) d'une application Φ de classe C^1 est la matrice

$$M_j(\Phi).(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(x, y) \; . \end{pmatrix}$$

Théorème (Changement de variables)

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^2$ et soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un C^1-difféomorphisme. Alors

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} f(x, y) dxdy \\ & = \iint_{\Phi^{-1}(\Omega)} (f \circ \Phi)(x, y) \times |det M_j(\Phi).(x, y)| \, dxdy \end{aligned}$$

pour toute fonction continue $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Fin du chapitre 4 - Intégration