# Algèbre bilinéaire et Intégration

par

Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise

Année 2019-2020

Soient $p$, $q$ deux entiers, et soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ une matrice réelle à $p$ lignes et $q$ colonnes. Soit aussi $k$ un entier tel que $k \leq \min(p, q)$. On appelle sous matrice carrée d'ordre $k$ de $A$ toute matrice réelle carrée $M$ d'ordre $k$, qui s'écrit sous la forme

$$M = \left(a_{i_s j_t}\right)$$

où $s, t$ parcourent $\{1, \ldots, k\}$, les $i_1, \ldots, i_k$ sont une selection d'indices dans $\{1, \ldots, p\}$, et les $j_1, \ldots, j_k$ sont une selection d'indices dans $\{1, \ldots, q\}$.

En d'autres termes, une sous matrices carrée d'ordre $k \leq \min(p, q)$ d'une matrice $A$ à $p$ lignes et $q$ colonnes est n'importe quelle matrice carrée d'ordre $k$ que l'on obtient à partir de $A$ en supprimant $p - k$ lignes et $q - k$ colonnes dans $A$ (ou, de façon équivalente, en sélectionnant $k$ lignes et $k$ colonnes dans $A$).

Si par exemple

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \end{pmatrix}$$

alors $M$ est la sous matrice $3 \times 3$ de $A$ obtenue en supprimant à $A$ la ligne 2 et les colonnes 1 et 4 (ou de façon équivalente en selectionnant dans $A$ les lignes 1, 3, 4 et les colonnes 2, 3, 5) :

$$A = \begin{pmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \color{red}{a_{14}} & a_{15} \\ \color{red}{a_{21}} & \color{red}{a_{22}} & \color{red}{a_{23}} & \color{red}{a_{24}} & \color{red}{a_{25}} \\ \color{red}{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & \color{red}{a_{34}} & a_{35} \\ \color{red}{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & \color{red}{a_{44}} & a_{45} \end{pmatrix} \quad ,$$

en rouge ce qui est supprimé.

## Définition

*Soient $p$, $q$ deux entiers, et soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ une matrice réelle non nulle à $p$ lignes et $q$ colonnes. Le rang de $A$, noté $Rg(A)$, est par définition le plus grand entier $r \leq \min(p,q)$ pour lequel on peut trouver une sous matrice carrée d'ordre $r$ de $A$ qui soit inversible.*

Par convention, on pose $\mathrm{Rg}(A) = 0$ si $A$ est une matrice nulle. Dès que $A$ est non nulle, $\mathrm{Rg}(A) \geq 1$ (il y a au moins une sous matrice $1 \times 1$ qui soit inversible...à savoir au moins un coefficient de $A$ qui est non nul). Une définition équivalente du rang $\mathrm{Rg}(A)$ de $A$ est

$$\mathrm{Rg}(A) = \max\Big\{ r \in \mathbb{N} \;/\; \exists M \text{ sous matrice carrée d'ordre } r \text{ de } A \text{ avec } \det(M) \neq 0 \Big\}.$$

Si $p = q$, on a bien sûr que $A$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Rg}(A) = p$.

**Exercice :** Soit $a, b, c$ trois réels non tous nuls et soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} .$$

Calculer le rang de $A$.

**Solution :** Le déterminant de cette matrice vaut

$$\Delta = a^2b^2c^2 + a^2b^2c^2 + a^2b^2c^2 - a^2b^2c^2 - a^2b^2c^2 - a^2b^2c^2 = 0 .$$

La matrice n'est donc pas de rang 3. Notons $\Delta_{ij}$ le déterminant de la matrice où l'on a supprimé la ième ligne et la jème colonne. Alors

$$\Delta_{11} = b^2c^2 - b^2c^2 \ , \ \Delta_{12} = abc^2 - abc^2 \ , \ \Delta_{13} = ab^2c - ab^2c$$

$$\Delta_{21} = bac^2 - bac^2 \ , \ \Delta_{22} = a^2c^2 - a^2c^2 \ , \ \Delta_{23} = a^2bc - a^2bc$$

$$\Delta_{31} = b^2ac - b^2ac \ , \ \Delta_{32} = a^2bc - a^2bc \ , \ \Delta_{33} = a^2b^2 - a^2b^2 \ .$$

Tous les sous déterminants $2 \times 2$ sont donc nuls. Donc le rang de la matrice n'est pas non plus égal à 2. Comme $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ le rang de la matrice est au moins égal à 1 (un des coefficients de la matrice est non nul). On en déduit que $\mathrm{Rg}(A) = 1$. $\square$

# 1. Le theórème fondamental sur le rang des matrices et des applications linéaires

**Théorème (Théorème fondamental sur le rang des matrices et des applications linéaires)**

*Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{B}$ une base de $E$, $\tilde{\mathcal{B}}$ une base de $F$, et $f \in L(E, F)$ une application linéaire de $E$ dans $F$. Alors*

$$Rg\big(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\big) = Rg\big(f\big) \ .$$

*En d'autres termes, le rang d'une application linéaire coïncide avec le rang de l'une quelconque de ses matrices de représentations.*

La preuve de ce théorème est difficile. On la donne en appendice de ce chapitre.

**Exercice :** Soient $E, F$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions respectives 4 et 3, $\mathcal{B}$ une base de $E$, $\tilde{\mathcal{B}}$ une base de $F$, $f \in L(E, F)$ une application linéaire de $E$ dans $F$ et $A = M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}$ la matrice de représentation de $f$ dans $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\alpha, \beta$ sont deux réels. Déterminer les valeurs de $\alpha$ et $\beta$ pour lesquelles $f$ est surjective.

**Solution :** En vertue du theórème fondamental sur le rang des matrices et des applications linéaires il suffit de trouver les valeurs de $\alpha$ et $\beta$ pour lesquelles la matrice $A$ est de rang 3 ($f$ est surjective si et seulement si $Rg(f) = 3$). La matrice $A$ a quatre sous matrices $3 \times 3$ que l'on obtient en supprimant les colonnes 1, puis 2, puis 3, puis 4. Les quatre sous matrices $3 \times 3$ de $A$ sont donc les matrices :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & \beta \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \beta \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

Leurs déterminants sont donnés par

$$\det A_1 = \alpha - 4\beta - 6 \ , \ \det(A_2) = 6\beta - \alpha - 2$$
$$\det(A_3) = \beta - 4 \ , \ \det(A_4) = \alpha - 22 \ .$$

Il est donc déjà clair que $A$ est de rang 3 si $\alpha \neq 22$ ou $\beta \neq 4$ puisque dans le premier cas $\det A_4 \neq 0$ tandis que $\det A_3 \neq 0$ dans le second. Reste à remarquer que si $\alpha = 22$ et $\beta = 4$ alors $\det(A_1) = \det(A_2) = \det(A_3) = \det(A_4) = 0$. Donc $f$ est surjective si et seulement si $\alpha \neq 22$ ou $\beta \neq 4$. $\square$

# 2. Matrices équivalentes

**Définition**

*Soient $p$, $q$ deux entiers, et soient $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ deux matrices réelles à $p$ lignes et $q$ colonnes. On dit que les matrices $A$ et $B$ sont équivalentes s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ carrée inversible d'ordre $p$, et une matrice $Q \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ carrée inversible d'ordre $q$, telles que $B = PAQ$.*

On vérifie que cette relation est bien une relation d'équivalence : en posant $P = \mathrm{Id}_p$ et $Q = \mathrm{Id}_q$, on voit qu'une matrice $A$ est bien équivalente à elle-même. Par ailleurs, si $B = PAQ$, et si $P$ et $Q$ sont inversibles, alors $A = (P^{-1})B(Q^{-1})$ de sorte que si $A$ est équivalente à $B$, alors $B$ est équivalente à $A$. Pour finir, si $B = PAQ$, et si $C = \hat{P}B\hat{Q}$, alors

$$C = (\hat{P}P)A(Q\hat{Q}) \ .$$

Le produit de deux matrices inversibles étant encore une matrice inversible, $\hat{P}P$ et $Q\hat{Q}$ sont des matrices inversibles. Il suit que si $B$

est équivalente à $A$, et si $C$ est équivalente à $B$, alors $C$ est équivalente à $A$. La relation d'équivalence de matrices est bien une relation d'équivalence.

A titre de remarque, considérons $E, F$ deux espaces vectoriels de dimensions finies, considérons $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ deux bases de $E$, et considérons $\tilde{\mathcal{B}}_1$, $\tilde{\mathcal{B}}_2$ deux bases de $F$. Considérons de plus $f \in L(E, F)$ une application linéaire de $E$ dans $F$. Les matrices de représentations $M_{\mathcal{B}_1 \tilde{\mathcal{B}}_1}(f)$ et $M_{\mathcal{B}_2 \tilde{\mathcal{B}}_2}(f)$ sont alors équivalentes. Cette propriété suit du théorème de changement de bases pour les matrices de représentations. Donc :

**Proposition**

*Deux matrices de représentations d'une même application linéaire sont toujours équivalentes.*

Une autre remarque élémentaire est la suivante. Etant donnés $s$ et $t$ deux entiers, notons $\mathrm{O}_{s,t}$ la matrice nulle à $s$ lignes et $t$ colonnes. Notons de même $\mathrm{Id}_r$ la matrice identité $r \times r$. Pour $p$ et $q$ deux entiers, et $r \leq \min(p, q)$, on construit la matrice $A_r$ de $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$ en posant

$$A_r = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & \mathrm{O}_{r,q-r} \\ \mathrm{O}_{p-r,r} & \mathrm{O}_{p-r,q-r} \end{pmatrix} .$$

Alors, clairement, $A_r$ est de rang $r$. C'est même la plus simple des matrices de rang $r$ que l'on puisse imaginer... Le théorème qui suit est une réciproque à cette remarque : puisqu'il affirme que toute matrice de $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$ qui est de rang $r$ est équivalente à $A_r$.

## Théorème

*Si une matrice $A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$ est de rang $r$, alors elle est équivalente à la matrice*

$$A_r = \begin{pmatrix} Id_r & O_{r,q-r} \\ O_{p-r,r} & O_{p-r,q-r} \end{pmatrix}$$

*où $Id_r$ est la matrice identité $r \times r$, et $O_{s,t}$ est la matrice nulle à $s$ lignes et $t$ colonnes.*

Preuve : On considère $E$ et $F$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $q$ et $p$, $\mathcal{B}_1$ une base de $E$, et $\tilde{\mathcal{B}}_1$ une base de $F$. On considère de plus $f \in L(E, F)$ définie par la propriété que $M_{\mathcal{B}_1 \tilde{\mathcal{B}}_1}(f) = A$. Le théorème du rang nous dit que

$$\mathrm{dimKer}(f) + \mathrm{Rg}(f) = \mathrm{dim}E \ ,$$

tandis qu'il suit du théorème précédent que $\mathrm{Rg}(f) = r$, où $r = \mathrm{Rg}(A)$. Ainsi, $\mathrm{dimKer}(f) = q - r$.

Preuve suite et fin : En utilisant le théorème de la base incomplète, en considérant une base de Ker$(f)$ puis en la complétant, on construit facilement une base $\mathcal{B}_2 = (e_1^2, \ldots, e_q^2)$ de $E$ pour laquelle $(e_{r+1}^2, \ldots, e_q^2)$ est une base de $Ker(f)$. Il suit que la famille $\big(f(e_1^2), \ldots, f(e_r^2)\big)$ est une base de Im$(f)$. Elle est en effet clairement génératrice pour Im$(f)$, et elle a autant d'éléments que la dimension de Im$(f)$ (qui vaut, par définition, Rg$(f)$). On applique de nouveau le théorème de la base incomplète pour fabriquer une base $\tilde{\mathcal{B}}_2$ de $F$ dont les $r$ premiers vecteurs sont les $f(e_i^2)$, $i = 1, \ldots, r$. Alors, par construction même,

$$M_{\mathcal{B}_2\tilde{\mathcal{B}}_2}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & \mathrm{O}_{r,q-r} \\ \mathrm{O}_{p-r,r} & \mathrm{O}_{p-r,q-r} \end{pmatrix}$$

Les matrices $M_{\mathcal{B}_1\tilde{\mathcal{B}}_1}(f)$ et $M_{\mathcal{B}_2\tilde{\mathcal{B}}_2}(f)$ étant équivalentes d'après le théorème de changement de base (cf. remarque ci-dessus), il suit que $A$ est bien équivalente à $A_r$. Le théorème est démontré. CQFD.

## Corollaire

*Si $A, B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$ ont même rang, alors elles sont équivalentes. Inversement, deux matrices équivalentes ont même rang.*

Preuve : Si $A$ et $B$ ont même rang, disons $r$, elles sont toutes deux équivalentes à la matrice $A_r$ du théorème précédent. La relation d'équivalence de matrices étant une relation d'équivalence, elles sont équivalentes entres elles. Inversement, supposons que les matrices $A$ et $B$ sont équivalentes, et donc supposons qu'il existe des matrices inversibles $P$ et $Q$ telles que $B = PAQ$. On considère $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $q$, $F$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $p$, $\mathcal{B}$ une base de $E$, $\tilde{\mathcal{B}}$ une base de $F$, $f \in L(E, F)$ telle que $M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f) = A$, $g \in L(E, F)$ telle que $M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(g) = B$, $\varphi \in End(E)$ telle que $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi) = Q$, et $\psi \in End(F)$ telle que $M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(\psi) = P$. Alors, en vertue du théorème de composition des matrices de représentations, et comme $B = PAQ$,

$$
\begin{aligned}
M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(g) &= M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(\psi) M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f) M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi) \\
&= M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(\psi) M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f \circ \varphi) \\
&= M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(\psi \circ f \circ \varphi)
\end{aligned}
$$

de sorte que $g = \psi \circ f \circ \varphi$. Or $\varphi$ et $\psi$ sont des isomorphismes puisque $P$ et $Q$ sont des matrices inversibles. Cela entraîne que $\mathrm{Rg}(g) = \mathrm{Rg}(f)$, puis que $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(B)$ en vertue de ce qui a été dit plus haut. Pour voir que $\mathrm{Rg}(g) = \mathrm{Rg}(f)$, on applique tout simplement la définition du rang, et on remarque qu'un isomorphisme ne change pas la dimension d'un sous espace vectoriel (si $X$ est un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel $Y$, et si $\Phi$ est un isomorphisme de $Y$ sur $Z$, alors $\Phi$ réalise un isomorphisme de $X$ sur $\Phi(X)$ de sorte que $\Phi(X)$ a même dimension que $X$). En particulier, le corollaire est démontré. CQFD.

**Exercice :** Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$ qui est de rang $r$ s'écrit comme somme de $r$ matrices de rang 1.

**Solution :** On a vu que $A$ est équivalente à la matrice

$$A_r = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & \mathrm{O}_{r,q-r} \\ \mathrm{O}_{p-r,r} & \mathrm{O}_{p-r,q-r} \end{pmatrix}$$

où $\mathrm{Id}_r$ est la matrice identité $r \times r$, et $\mathrm{O}_{s,t}$ est la matrice nulle à $s$ lignes et $t$ colonnes. Donc il existe $P$ et $Q$ inversibles telles que

$$A = PA_rQ \ .$$

Pour $i = 1, \ldots, r$ notons $A_r(i)$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient à la $i$ème ligne et $i$ème colonne qui vaut 1. Clairement $Rg(A_r(i)) = 1$, et de façon toute aussi claire, $A_r = \sum_{i=1}^{r} A_r(i)$. On peut écrire que

$$A = \sum_{i=1}^{r} PA_r(i)Q$$

et les matrices $PA_r(i)Q$ sont de rang 1 puisqu'elles sont équivalentes aux matrices $A_r(i)$ qui sont de rang 1. $\square$

# 3. Preuve du heórème fondamental sur le rang des matrices et des applications linéaires

Preuve : On découpe la preuve en deux étapes. On montre en première étape que

(1) $\mathrm{Rg}\big(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\big) \leq \mathrm{Rg}\big(f\big)$

On montre en seconde étape que

(2) $\mathrm{Rg}\big(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\big) \geq \mathrm{Rg}\big(f\big)$.

On commence par montrer la première étape. C'est la plus simple des deux.

(1) On montre que $\mathrm{Rg}\big(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\big) \leq \mathrm{Rg}\big(f\big)$. Notons $k = \mathrm{Rg}\big(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\big)$, $(e_1, \ldots, e_m)$ les vecteurs de $\mathcal{B}$, et $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ les vecteurs de $\tilde{\mathcal{B}}$. Dire que $k = \mathrm{Rg}\big(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\big)$, c'est dire que $M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$ possède une sous matrice carrée d'ordre $k$ qui est inversible.

Preuve suite : Si $M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f) = (a_{ij})_{i,j}$, notons $M = (a_{i_s j_t})_{s,t}$ la (une des) sous matrice(s) d'ordre $k$ de $M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$ qui est inversible. Pour montrer que $\mathrm{Rg}\big(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\big) \leq \mathrm{Rg}\big(f\big)$, il suffit de montrer que la famille $\big(f(e_{j_1}), \ldots, f(e_{j_k})\big)$ est libre. En effet, si cette famille est libre, on devra avoir $k \leq \dim \mathrm{Im}(f)$, et donc $k \leq \mathrm{Rg}(f)$. Pour montrer que cette famille est libre, supposons que pour des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$,

$$\lambda_1 f(e_{j_1}) + \cdots + \lambda_k f(e_{j_k}) = 0 \ .$$

Alors

$$\sum_{i=1}^{n} \Big( \sum_{t=1}^{k} \lambda_t a_{ij_t} \Big) \tilde{e}_i = 0 \ .$$

Puisque les $\tilde{e}_i$ forment une base de $F$, on récupère que

$$\sum_{t=1}^{k} \lambda_t a_{ij_t} = 0$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$. En particulier, pour tout $s = 1, \ldots, k$, $\sum_{t=1}^{k} \lambda_t a_{i_s j_t} = 0$, ce qui s'écrit encore $M\Lambda = 0$, où $\Lambda$ est la matrice à $k$ lignes et une colonne composée des $\lambda_t$, et 0 est la matrice

Preuve suite : nulle à une colonne et $k$ lignes. Comme $M$ est inversible, $M\Lambda = 0$ entraîne que $\Lambda = 0$, ce qui prouve que la famille $\big(f(e_{j_1}), \dots, f(e_{j_k})\big)$ est libre. Comme déjà dit, cela entraîne à son tour que $\mathrm{Rg}\big(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\big) \leq \mathrm{Rg}\big(f\big)$.

(2) Plus difficile, on montre que $\mathrm{Rg}\big(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\big) \geq \mathrm{Rg}\big(f\big)$. On note $(e_1, \dots, e_m)$ les vecteurs de $\mathcal{B}$, et $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ les vecteurs de $\tilde{\mathcal{B}}$. Une remarque déjà utilisée dans les cours précédents est la suivante : si on note $k = \mathrm{Rg}(f)$, le rang de $f$, alors il existe $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, m\}$ pour lesquels la famille $\big(f(e_{j_1}), \dots, f(e_{j_k})\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$. Pour le voir, on sait que la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Si elle est libre, c'est une base de $Im(f)$ et la propriété est vraie. Si elle n'est pas libre, un des vecteurs de la famille s'exprime comme combinaison linéaire des autres. On peut alors le retirer à la famille sans changer sons caractère de famille génératrice. Et ainsi de suite jusqu'à obtenir une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ ayant autant de vecteurs que la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, ce qui en fait une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Preuve suite : A partir de cette propriété, on montre que $\mathrm{Rg}\big(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\big) \geq \mathrm{Rg}\big(f\big)$ en raisonnant par récurrence sur l'entier

$$r = \dim F - \mathrm{Rg}(f)$$

et donc sur $r = n - k$. Etant donné $r$ un entier, la propriété à démontrer au rang $r$ s'énonce : si $E$, $F$ sont deux espaces vectoriels de dimensions finies, si $\mathcal{B}$ est une base de $E$, si $\tilde{\mathcal{B}}$ est une base de $F$, si $f \in L(E, F)$ est une application linéaire de $E$ dans $F$, et si $\dim F - \mathrm{Rg}(f) = r$, alors $\mathrm{Rg}\big(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\big) \geq \mathrm{Rg}\big(f\big)$. On démontre tout d'abord que la propriété est vraie au rang $r = 0$. Puis on démontre que si la propriété est vraie aux rangs $0, 1, \ldots, r-1, r$, alors elle est aussi vraie au rang $r + 1$.

Supposons tout d'abord que $r = 0$. Soit $(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$ la sous famille de $\mathcal{B}$ donnée par la propriété ci-dessus, donc qui est telle que la famille $\big(f(e_{j_1}), \ldots, f(e_{j_k})\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$. Si $E_k$ est le sous espace vectoriel de $E$ de base $\mathcal{B}_k = (e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$, et si $f_k$ est la restriction de $f$ à $E_k$, la matrice de représentation $M_{\mathcal{B}_k\tilde{\mathcal{B}}}(f_k)$ de $f_k$ dans les bases $\mathcal{B}_k$ et $\tilde{\mathcal{B}}$ est une sous matrice carrée d'ordre $k$

de la matrice $M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$. Elle s'obtient en selectionnant les colonnes $j_1, \ldots, j_k$ de cette matrice. Or $f_k : E_k \to F$ est surjective (par construction), et $\dim E_k = \dim F$ (par hypothèse, puisque $r = 0$). Donc $f_k$ est un isomorphisme de $E_k$ sur $F$. Donc $M_{\mathcal{B}_k\tilde{\mathcal{B}}}(f_k)$ est inversible. Donc, en particulier, puisque cette matrice est d'ordre $k$, $\mathrm{Rg}\big(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\big) \geq k = \mathrm{Rg}(f)$. Si $r = 0$, on a donc bien que $\mathrm{Rg}\big(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\big) \geq \mathrm{Rg}\big(f\big)$.

Supposons maintenant la propriété à démontrer vraie aux ordres $0, 1, \ldots, r-1, r$. On veut montrer que la propriété est alors aussi vraie à l'ordre $r+1$. On suppose donc que $r+1 = n-k$. On note là encore $(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$ la sous famille de $\mathcal{B}$ donnée par la propriété ci-dessus, donc qui est telle que la famille $\big(f(e_{j_1}), \ldots, f(e_{j_k})\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$. Comme $k < n$, il existe forcément un vecteur $\tilde{e}_{i_0}$ de $\tilde{\mathcal{B}}$ qui est tel que

$$\tilde{e}_{i_0} \notin \mathrm{Vect}\big(f(e_{j_1}), \ldots, f(e_{j_k})\big) \qquad (1)$$

Pour $j = 1, \ldots, m$, soit $\lambda_j$ la $i_0$ème coordonnée de $f(e_j)$ dans $\tilde{\mathcal{B}}$.

Preuve suite : On définit l'application linéaire $g : E \to F$ en posant

$$g(e_j) = f(e_j) - \lambda_j \tilde{e}_{i_0}$$

pour tout $j = 1, \ldots, m$. Soit de plus $F_{n-1}$ le sous espace vectoriel de $F$ de base la famille $\tilde{\mathcal{B}}_{n-1}$ composée des $\tilde{e}_i$, $i \neq i_0$. Alors $g \in L(E, F_{n-1})$. Une première propriété évidente est la suivante :

(i) $M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}_{n-1}}(g)$ est une sous matrice de $M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$

au sens où la matrice $M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}_{n-1}}(g)$ s'obtient à partir de $M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$ en supprimant à cette matrice sa $i_0$ème ligne. Une autre propriété de $g$ est la suivante :

(ii) $\mathrm{Rg}(g) \geq \mathrm{Rg}(f)$.

Cette propriété suit de la relation (1). Avec cette relation on vérifie en effet facilement que le famille $\left(g(e_{j_1}), \ldots, g(e_{j_k})\right)$ est libre. Pour le voir, on remarque que si

$$\lambda_1 g(e_{j_1}) + \cdots + \lambda_k g(e_{j_k}) = 0$$

Preuve suite : alors

$$\sum_{t=1}^{k} \lambda_t f(e_{j_t}) = \lambda e_{i_0} \ ,$$

où $\lambda = \sum_{t=1}^{k} \lambda_t \lambda_{j_t}$. Du coup (1), entraîne que $\lambda = 0$, puis on obtient que les $\lambda_t$ doivent tous être nuls puisque les $f(e_{j_t})$, $t = 1, \ldots, k$, forment une famille libre. Il suit que $\mathrm{Rg}(g) \geq k$, et donc que $\mathrm{Rg}(g) \geq \mathrm{Rg}(f)$, ce qui démontre (ii).

On avait $r + 1 = \dim F - \mathrm{Rg}(f)$. Puisque $\dim F_{n-1} = dimF - 1$, et $\mathrm{Rg}(g) \geq \mathrm{Rg}(f)$, on en déduit que

$$\dim F_{n-1} - \mathrm{Rg}(g) \in \big\{1, \ldots, r\big\} \ .$$

Par hypothèse de récurrence, il existe ainsi une sous matrice carrée d'ordre $\mathrm{Rg}(g)$ de la matrice $M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}_{n-1}}(g)$ qui est inversible. Avec (i), on en déduit qu'il existe une sous matrice carrée d'ordre $\mathrm{Rg}(g)$ de la matrice $M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$ qui est inversible. Donc,

$$\mathrm{Rg}\big(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\big) \geq \mathrm{Rg}\big(g\big) \geq \mathrm{Rg}\big(f\big)$$

et on a montré que si la propriété à démontrer était vraie aux

Preuve suite et fin : ordres $0, \dots, r$, alors elle l'était aussi à l'ordre $r+1$.

Par récurrence, sachant que la propriété à démontrer est vraie à l'ordre 0, et sachant que si la propriété est vraie aux ordres $0, \dots, r$, alors elle est vraie à l'ordre $r+1$, on obtient que la propriété est toujours vraie. On a donc montré que à la fois $\mathrm{Rg}\big(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\big) \leq \mathrm{Rg}\big(f\big)$ et $\mathrm{Rg}\big(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\big) \geq \mathrm{Rg}\big(f\big)$, ce qui démontre le théorème. CQFD

**Fin du chapitre 4**