Algèbre bilinéaire et Intégration

par
Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise
Année 2019-2020

1. Un peu de topologie de $\mathbb{R}^2$.

On place sur $\mathbb{R}^2$ la distance euclidienne d. Alors $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par l'équation

$$d(a, b) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

pour tous points $a = (x_a, y_a)$ et $b = (x_b, y_b)$ de $\mathbb{R}^2$.

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}^2$ un point de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_n)_n$ une suite de points de $\mathbb{R}^2$. On dit que $(x_n)_n$ converge vers a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, d(a, x_n) < \varepsilon \ .$$

On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$.

Soient $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$ un réel strictement positif. On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r le sous ensemble $B_a(r)$ de $\mathbb{R}^2$ constitué des points de $\mathbb{R}^2$ dont la distance au point a est strictement inférieure à r. Donc $B_a(r) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ d(a,x) < r\right\}$.

Définition (Ouverts et fermés)

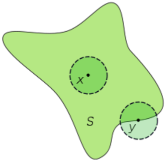
Un sous ensemble $A \subset \mathbb{R}^2$ est dit un ouvert de $\mathbb{R}^2$ si

$$\forall a \in A, \exists r_a > 0 \ / \ B_a(r_a) \subset A \ .$$

Donc $A \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ si tout point de A est centre d'une boule ouverte entièrement contenue dans A. Un sous ensemble $A \subset \mathbb{R}^2$ est dit un fermé de $\mathbb{R}^2$ si son complémentaire $\mathbb{R}^2 \backslash A$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Par convention, $\emptyset$ et $\mathbb{R}^2$ sont à la fois ouverts et fermés.

La **frontière** d'un sous ensemble $A \subset \mathbb{R}^2$est l'ensemble des points $a \in \mathbb{R}^2$ qui sont tels que pour tout $r > 0$, la boule ouverte $B_a(r)$ contient à la fois des points de A et de son complémentaire $\mathbb{R}^2 \backslash A$.

Un point $a \in A$ est par contre un **point intérieur** à A s'il existe $r_a > 0$ tel que $B_a(r_a) \subset A$.



Ici x est un point intérieur au patatoïde S, tandis que y est un point frontière.

Remarques : (1) Un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est un patatoïde qui ne contient aucun des points de sa frontière (tous les points de l'ensemble sont des points intérieurs à l'ensemble).

(2) Un fermé de $\mathbb{R}^2$ est un patatoïde qui contient tous les points de sa frontière.

(3) Un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ peut très bien n'être ni ouvert, ni fermé (contenir certains points de sa frontière et pas d'autres).

Tout point de la frontière d'un ensemble est limite d'une suite de points de l'ensemble. Et toute limite de points d'un ensemble est soit un point intérieur, soit un point frontière. On en déduit le résultat suivant.

Théorème

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$. Alors A est un fermé de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de points de A, si $(x_n)_n$ converge dans $\mathbb{R}^2$, alors sa limite est forcément dans A.

Les carrés $]a, b[\times]c, d[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$. Les carrés $[a, b] \times [c, d]$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$.

Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille de sous ensembles de $\mathbb{R}^2$. On dit que $(U_i)_{i\in I}$ est un **recouvrement** de A si $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.

Un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de A est un **recouvrement ouvert** de A si les U_i sont tous des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

2. Sous ensembles compacts de $\mathbb{R}^2$

Définition

Un sous ensemble $K \subset \mathbb{R}^2$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si de tout recouvrement ouvert de K on peut extraire un sous recouvrement qui est fini. Autrement dit, K est un compact de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de K, il existe $J \subset I$ un sous ensemble fini de I pour lequel $(U_i)_{i \in J}$ est encore un recouvrement ouvert de K.

Le théorème suivant a lieu.

Théorème

Les compacts de $\mathbb{R}^2$ sont précisément les fermés bornés de $\mathbb{R}^2$. De plus, dans un compact, toute suite possède une sous suite convergente.

Les carrés $[a, b] \times [c, d]$ (a, b, c, d des réels) sont des compacts de $\mathbb{R}^2$.

Etant donnée une suite $(x_n)_n$ on appelle sous suite de $(x_n)_n$ toute suite obtenue à partir d'une sélection des x_n. Une sous suite de $(x_n)_n$ est alors une suite du type $(x_{\varphi(n)})_n$, où $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même.

$$\begin{array}{cccccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & \dots \\
\cancel{x_1} & x_2 & x_3 & \cancel{x_4} & x_5 & \cancel{x_6} & \cancel{x_7} & x_8 & x_9 & \dots \\
- & x_{\varphi(1)} & x_{\varphi(2)} & - & x_{\varphi(3)} & - & - & x_{\varphi(4)} & x_{\varphi(5)} & \dots
\end{array}$$

Pour toute application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ de $\mathbb{N}$ dans lui-même, $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (le résultat se démontre facilement par récurrence sur n).

Un sous ensemble A de $\mathbb{R}^2$ est dit borné s'il existe $R > 0$ tel que $d(0, x) \leq R$ pour tout $x \in A$, où d est la distance euclidienne et 0 est le $0 = (0, 0)$ de $\mathbb{R}^2$.

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$. Soit $a \in A$ un point de A. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue au point a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in A,\ d(a,x) < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \ .$$

Par extension on dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A.

Autrement dit, f est continue au point a si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de $f(a)$, pourvu que x soit suffisamment proche de a.

On démontre (relativement) facilement que $f : A \to \mathbb{R}$ est continue au point a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de points de A, si $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$.

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est uniformément continue sur A si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x, y \in A, \ d(x,y) < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon \ .$$

La continuité sur A se traduit par la phrase mathématique

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall y \in A, \ d(x,y) < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon \ .$$

Dans cette phrase le η dépend à la fois de ε et de x. Dans l'uniforme continuité le η devient uniforme par rapport à x.

Une fonction uniformément continue est continue. La réciproque (qui est fausse en générale) est vraie sur les compacts.

Théorème

Une fonction continue sur un compact y est uniformément continue.

4. Petit précis de continuité

Les fonctions coordonnées $(x, y) \to x$ et $(x, y) \to y$ sont continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Les fonctions constantes sont continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

La somme et le produit de fonctions continues et une fonction continue.

Le quotient de deux fonctions continues est une fonction continue là où le dénominateur ne s'annule pas.

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue et si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, alors $g \circ f$ est continue.

On regroupe ces propriétés sous les termes de **propriétés générales sur la continuité.**

Ainsi, par propriétés générales sur la continuité, les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \to x^3y^2$, $(x, y) \to 1 + x^2y$, $(x, y) \to x^3y^2 + \cos(x^2y^4)$, $(x, y) \to \ln(1 + x^2y^6)$, $(x, y) \to \frac{x^5y^7}{1+x^2y^4}$ etc.

5. Dérivées partielles

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(a, b) \in \Omega$ un point de Ω. Comme Ω est un ouvert, il existe $r > 0$ pour lequel $B_{(a,b)}(r) \subset \Omega$.

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère les fonctions partielles f_a, f_b, fonctions d'une variable réelles (donc dont la variable est dans une partie ou dans tout $\mathbb{R}$) définies par $f_a(y) = f(a, y)$ et $f_b(x) = f(x, b)$. On vérifie facilement que f_a est définie sur au moins l'intervalle $]b - r, b + r[$ et que f_b est définie sur au moins l'intervalle $]a - r, a + r[$.

Définition (Dérivées partielles)

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, (a, b) un point de Ω et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur Ω. On appelle dérivée partielle de f par rapport à x au point (a, b), si elle existe, la dérivée de la fonction f_b au point a. On la note $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$. De même, on appelle dérivée partielle de f par rapport à y au point (a, b), si elle existe, la dérivée de la fonction f_a au point b. On la note $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

On a donc, lorsqu'elles existent,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f_b'(a) \ ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = f_a'(b) \ .$$

Par exemple, si

$$f(x,y) = x^3y^2 + \cos(xy) \ ,$$

alors les dérivées partielles de f existent en tout point de $\mathbb{R}^2$, et pour tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 - y\sin(xy) \ ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y - x\sin(xy) \ .$$

Note : Attention, la différentiablité d'une fonction f en un point (a, b) ne se traduit pas par la seule existence des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ en ce point. Il faut en plus demander que

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y-b) \\ + \|(x-a, y-b)\| o(1) \end{aligned}$$

où $\|(x-a, y-b)\| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ et où $o(1) \to 0$ lorsque $(x, y) \to (a, b)$. On parle alors de différentiablitié de f en (a, b) (et non plus de dérivabilité de f en (a, b)). La différentielle de f en (a, b) (qui remplace la dérivée en (a, b)) est l'application linéaire de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$(x, y) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)y \ .$$

Si par contre les dérivées partielles existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω alors f est effectivement différentiable sur Ω et même de classe C^1 sur Ω.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a < b$ deux réels, et $f : I \times [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur $I \times [a, b]$. On suppose que pour tout $x \in I$, la fonction $t \to f(x, t)$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$. On peut alors définir la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)dt \ .$$

La question ici est de savoir sous quelle(s) condition(s) portant sur f, la fonction F va être continue, dérivable, ou intégrable.

Théorème

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a < b$ deux réels, et $f : I \times [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur $I \times [a, b]$. Si f est continue sur $I \times [a, b]$, la fonction réelle F définie sur I par $F(x) = \int_a^b f(x, t)dt$ est alors continue sur I.

Preuve : Pour simplifier la présentation, on suppose que $I = [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$ deux réels. Cela ne change pas grand chose car la continuité est une notion locale. Le produit $I \times [a, b]$ est alors un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, donc un compact de $\mathbb{R}^2$. Il s'ensuit (cf. plus haut) que f est en fait uniformément continue sur $I \times [a, b]$. En particulier, pour x_0 donné dans I, et pour $\varepsilon > 0$ quelconque, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in I,\ \forall t \in [a, b],\ |x - x_0| < \eta \ \Rightarrow\ |f(x, t) - f(x_0, t)| < \varepsilon \ .$$

Par suite, pour tout $x \in I$ tel que $|x - x_0| < \eta$,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_a^b \big(f(x, t) - f(x_0, t)\big)\, dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x, t) - f(x_0, t)|\, dt \\ &\leq \varepsilon(b - a) \ . \end{aligned}$$

On a ainsi montré que

$$\forall x_0 \in I,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \,/\, \forall x \in I,\ |x - x_0| < \eta \ \Rightarrow\ \big|F(x) - F(x_0)\big| < \varepsilon \ ,$$

à savoir que F est continue sur I. D'où le théorème. CQFD.

Théorème

Soient $\alpha < \beta$ et $a < b$ quatre réels, et $f :]\alpha, \beta[\times[a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et continue sur $]\alpha, \beta[\times[a, b]$. On suppose que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $]\alpha, \beta[\times[a, b]$. La fonction $F :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^b f(x, t)dt$ est alors dérivable sur $]\alpha, \beta[$, de dérivée en tout point x de $]\alpha, \beta[$, la fonction $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt$.

Preuve : Soit $x_0 \in]\alpha, \beta[$. Pour tout $x \in]\alpha, \beta[$,

$$
\begin{aligned}
&F(x) - F(x_0) - (x - x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)dt \\
&= \int_a^b \left(f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right) dt \ .
\end{aligned}
$$

Si on applique maintenant le théorème des accroissements finis à la fonction $x \to f(x, t)$, on obtient que pour tout $t \in [a, b]$, et tout $x \in]\alpha, \beta[$, il existe $\theta_x^t \in]0, 1[$ tel que

Preuve suite :

$$f(x,t) - f(x_0,t) = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_x^t(x - x_0), t) \ .$$

Soit alors $\delta > 0$ tel que $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset]\alpha, \beta[$. Le produit $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [a, b]$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, et donc un compact de $\mathbb{R}^2$. Il s'ensuit que la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est uniformément continue sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [a, b]$. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, $\eta < \delta$, tel que

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[,\ \forall t \in [a, b],\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| < \varepsilon \ .$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x, t) \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\times[a, b]$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_x^t(x - x_0), t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| < \varepsilon \ ,$$

et on obtient ainsi que pour x tel que $|x - x_0| < \eta$,

Preuve suite :

$$\left|F(x) - F(x_0) - (x - x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)dt\right|$$
$$\leq \int_a^b \left|f(x,t) - f(x_0,t) - (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| dt$$
$$= |x - x_0| \int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_x^t(x - x_0), t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)\right| dt$$
$$\leq (\varepsilon|b - a|)\,|x - x_0| \ .$$

En d'autres termes, on a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ / \ 0 < |x - x_0| < \eta$$
$$\Rightarrow \ \left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)dt\right| < \varepsilon \ ,$$

d'où l'on tire que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)dt \ .$$

Preuve suite et fin : Cela signifie encore que F est dérivable au point x_0 de dérivée en ce point

$$F'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)dt \ .$$

Puisque x_0 est quelconque dans $]\alpha, \beta[$, cela démontre le théorème. CQFD.

Pour finir, on traite de l'intégrabilité de F.

Théorème

Soient $\alpha < \beta$ et $a < b$ quatre réels, et $f :]\alpha, \beta[\times[a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et continue sur $]\alpha, \beta[\times[a, b]$. Pour tout intervalle $[\alpha_1, \beta_1] \subset]\alpha, \beta[$ la fonction réelle $F :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^b f(x, t)dt$ est alors intégrable au sens de Riemann sur $[\alpha_1, \beta_1]$ et $\int_{\alpha_1}^{\beta_1} F(x)dx = \int_a^b \left(\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(x, t)dx\right)dt$.

Preuve : Posons

$$\Phi(x) = \int_a^b \Big(\int_{\alpha_1}^x f(\theta, t) d\theta\Big) dt$$

$$\Psi(x) = \int_{\alpha_1}^x \Big(\int_a^b f(\theta, t) dt\Big) d\theta \ .$$

D'après ce qui a été dit plus haut (théorème sur la continuité), la fonction $\theta \to \int_a^b f(\theta, t) dt$ est continue. Par suite, Ψ est dérivable de dérivée

$$\Psi'(x) = \int_a^b f(x, t) dt \ .$$

Par ailleurs,

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha_1}^x f(\theta, t) d\theta = f(x, t)$$

existe et est continue. De ce qui a été dit plus haut (théorème sur la dérivabilité) on tire que Φ est dérivable de dérivée

$$\Phi'(x) = \int_a^b f(x, t) dt \ .$$

Preuve suite et fin : Ainsi, $\Psi' = \Phi'$, et puisque l'on a aussi que $\Phi(\alpha_1) = \Psi(\alpha_1)$ $(= 0)$, on obtient que $\Psi = \Phi$. En particulier, $\Psi(\beta_1) = \Phi(\beta_1)$, ce qui démontre le théorème. CQFD.

Remarque : On pourra regarder ces théorèmes comme des théorèmes d'interversion. Leurs conclusions respectives équivalent à la validité des interversions

$$\lim_{x \to x_0} \int_a^b = \int_a^b \lim_{x \to x_0}$$
$$\frac{d}{dx} \int_a^b = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}$$
$$\int_\alpha^\beta \int_a^b = \int_a^b \int_\alpha^\beta \quad .$$

C'est parfois (et même souvent) sous cet angle qu'il faudra interpréter ces théorèmes.

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soient $a < b$ avec $a \geq -\infty$ et $b \leq +\infty$ et soit $f : I \times]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur $I \times]a, b[$. On suppose que pour tout $x \in I$, la fonction $t \to f(x, t)$ est localement intégrable sur $]a, b[$. On dit que l'intégrale généralisée

$$I_x = \int_a^b f(x, t)dt$$

converge normalement sur $I \times]a, b[$ s'il existe une fonction positive $g :]a, b[\to \mathbb{R}$, localement intégrable sur $]a, b[$, qui est telle que

$$\forall x \in I, \ \forall t \in]a, b[, \ |f(x, t)| \leq g(t)$$

et qui est telle que l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$ converge.

La convergence normale implique la convergence (absolue) ponctuelle : pour tout $x \in I$, l'intégrale I_x est absolument convergente dès que I_x est normalement convergente sur $I \times]a, b[$.

Théorème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soient $a < b$ avec $a \geq -\infty$ et $b \leq +\infty$ et soit $f : I \times]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et continue sur $I \times]a, b[$. On suppose que $\int_a^b f(x, t)dt$ converge normalement sur tout produit du type $[\alpha, \beta] \times]a, b[$ où $[\alpha, \beta] \subset I$. La fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^b f(x, t)dt$ est alors continue sur I.

Preuve : Soit $x_0 \in I$. Pour fixer les idées, on suppose que x_0 est intérieur à I, à savoir qu'il existe $\delta > 0$ tel que $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset I$, et on suppose que a et b sont réels. Par hypothèse, il existe $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction positive localement intégrable qui vérifie

(i) $\forall (x, t) \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times]a, b[$, $|f(x, t)| \leq g(t)$,

(ii) $\int_a^b g(t)dt$ converge.

Preuve suite : Pour $\eta > 0$ petit, et pour $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$,

$$\begin{aligned}
&|F(x) - F(x_0)| \\
&\leq \int_a^b |f(x,t) - f(x_0,t)| dt \\
&= \int_{a+\eta}^{b-\eta} |f(x,t) - f(x_0,t)| dt + \int_a^{a+\eta} |f(x,t) - f(x_0,t)| dt \\
&\quad + \int_{b-\eta}^{b} |f(x,t) - f(x_0,t)| dt \\
&\leq \int_{a+\eta}^{b-\eta} |f(x,t) - f(x_0,t)| dt + 2\int_a^{a+\eta} g(t) dt + 2\int_{b-\eta}^{b} g(t) dt \ .
\end{aligned}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ donné. Comme $\int_a^b g(t)dt$ converge, pour $\eta > 0$ suffisamment petit, on va avoir

$$\int_a^{a+\eta} g(t) dt \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{b-\eta}^{b} g(t) dt \leq \varepsilon \ .$$

Preuve suite et fin : Fixons $\eta > 0$ comme ci-dessus. Avec le même raisonnement que celui fait dans la preuve du théorème de continuité dans le cas défini, on obtient l'existence d'un $\tilde{\eta} > 0$ tel que si $|x - x_0| < \tilde{\eta}$, alors

$$\int_{a+\eta}^{b-\eta} |f(x,t) - f(x_0,t)| dt < \varepsilon \ .$$

Ainsi,

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \tilde{\eta} > 0 \ / \ \forall x \in I, \ |x - x_0| < \tilde{\eta} \ \Rightarrow \ |F(x) - F(x_0)| < 5\varepsilon \ ,$$

et F est bien continue au point x_0, par suite sur tout I (puisque x_0 est quelconque dans I). D'où le résultat. CQFD.

Pour finir, on traite de la dérivabilité de la fonction F définie dans le théorème précédent.

Théorème

Soit $f :]\alpha, \beta[\times]a, b[\to \mathbb{R}$, $a \geq -\infty$, $b \leq +\infty$, *une fonction réelle définie et continue sur* $]\alpha, \beta[\times]a, b[$. *On suppose que :*

(i) $\forall x \in]\alpha, \beta[$, $\int_a^b f(x, t)dt$ *converge,*

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}$ *existe et est continue sur* $]\alpha, \beta[\times]a, b[$,

(iii) $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt$ *converge normalement sur tout produit du type* $[\alpha_1, \beta_1]\times]a, b[$ *où* $[\alpha_1, \beta_1] \subset]\alpha, \beta[$.

La fonction $F :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ *définie par* $F(x) = \int_a^b f(x, t)dt$ *est alors dérivable sur* $]\alpha, \beta[$ *et pour tout* $x \in]\alpha, \beta[$, $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt$.

Preuve : Soient $x_0 \in]\alpha, \beta[$ et $\delta > 0$ tels que $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset]\alpha, \beta[$. Pour fixer les idées, on suppose que a et b sont réels. D'après (iii), il existe $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction positive localement intégrable sur $]a, b[$ qui est telle que :

(iv) $\forall (x, t) \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\times]a, b[$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq g(t)$,

(v) $\int_a^b g(t)dt$ converge.

Preuve suite : Pour $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ et $\eta > 0$, η petit, on écrit maintenant que

$$
\begin{aligned}
&\left| F(x) - F(x_0) - (x - x_0) \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt \right| \\
&\leq \int_a^b \left| f(x,t) - f(x_0,t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| dt \\
&= |x - x_0| \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta(x - x_0), t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| dt \\
&\leq |x - x_0| \int_{a+\eta}^{b-\eta} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta(x - x_0), t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| dt \\
&\qquad + |x - x_0| \int_a^{a+\eta} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta(x - x_0), t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| dt \\
&\qquad + |x - x_0| \int_{b-\eta}^{b} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta(x - x_0), t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| dt
\end{aligned}
$$

Preuve suite :

$$\leq |x-x_0| \int_{a+\eta}^{b-\eta} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta(x-x_0),t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| dt$$
$$+ 2|x-x_0| \int_a^{a+\eta} g(t)dt + 2|x-x_0| \int_{b-\eta}^{b} g(t)dt \ .$$

où $\theta \in]0,1[$ dépend de x et de t. On conclue ici en choisissant $\eta > 0$ petit pour que

$$\int_a^{a+\eta} g(t)dt \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{b-\eta}^{b} g(t)dt \leq \varepsilon \ ,$$

et on raisonne comme dans la preuve du théorème analogue dans le cas défini pour l'intégrale définie

$$\int_{a+\eta}^{b-\eta} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta(x-x_0),t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| dt \ .$$

On obtient alors que

Preuve suite et fin :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \tilde{\eta} > 0 \ / \ |x - x_0| < \tilde{\eta} \ \Rightarrow$$
$$\left| F(x) - F(x_0) - (x - x_0) \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)dt \right| < 5\varepsilon |x - x_0| \ ,$$

et donc que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \tilde{\eta} > 0 \ / \ |x - x_0| < \tilde{\eta} \ \Rightarrow$$
$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)dt \right| < 5\varepsilon \ ,$$

ce qui prouve le résultat. CQFD.

Fin du chapitre 3 - Intégration