

Algèbre bilinéaire et Intégration

par

Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise

Année 2019-2020

Chapitre 2 - Analyse

Intégrales généralisées

1. Premières constructions

Définition

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de \mathbb{R} d'extrémités a et b , avec $a \geq -\infty$ et $b \leq +\infty$. On dit que f est localement intégrable sur I si pour tout intervalle fermé $[\alpha, \beta] \subset I$, α et β deux réels, f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[\alpha, \beta]$.

Par propriété de l'intégrale de Riemann, le résultat suivant a lieu.

Théorème

Toute fonction réelle définie et continue sur un intervalle de \mathbb{R} est localement intégrable sur cet intervalle.

Définition (Intégrales généralisées en leurs bornes supérieures)

Soit f une fonction réelle définie et localement intégrable sur un intervalle du type $[a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \leq +\infty$. On appelle intégrale généralisée de f sur $[a, b[$ la limite quand x tend vers b par valeurs inférieures, si elle existe et si elle est finie, de la fonction F définie sur $[a, b[$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt .$$

On pose alors

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt ,$$

et on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente. Si la limite n'existe pas, ou si elle n'est pas finie, on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est divergente.

Définition (Intégrales généralisées en leurs bornes inférieures)

Soit f une fonction réelle définie et localement intégrable sur un intervalle du type $]a, b]$, avec $a \geq -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$. On appelle *intégrale généralisée de f sur $]a, b]$* la limite quand x tend vers a par valeurs supérieures, si elle existe et si elle est finie, de la fonction F définie sur $]a, b]$ par

$$F(x) = \int_x^b f(t) dt .$$

On pose alors

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt ,$$

et on dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ est convergente. Si la limite n'existe pas, ou si elle n'est pas finie, on dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ est divergente.

Théorème (L'intégrale de Riemann)

(1) L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$, généralisée en $+\infty$, est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

(2) L'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$, généralisée en 0, est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Preuve : (1) La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$. En particulier, elle est localement intégrable sur $[1, +\infty[$. Dire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge équivaut donc à dire que la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt$$

existe et est finie. Or pour $x > 1$,

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \ln(x) \quad \text{si } \alpha = 1,$$
$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right) \quad \text{si } \alpha \neq 1.$$

Preuve suite et fin : Par suite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt$ existe et est finie si et seulement si $\alpha > 1$. D'où le résultat.

(2) La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ est continue sur l'intervalle $]0, 1]$. En particulier, elle est localement intégrable sur $]0, 1]$. Dire que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge équivaut donc à dire que la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$$

existe et est finie. Or pour $0 < x < 1$,

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = -\ln(x) \quad \text{si } \alpha = 1,$$
$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha} (1 - x^{1-\alpha}) \quad \text{si } \alpha \neq 1.$$

Par suite, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ existe et est finie si et seulement si $\alpha < 1$. D'où le résultat. CQFD.

Définition (Intégrales généralisées en leurs deux bornes)

Soit f une fonction réelle définie et localement intégrable sur un intervalle ouvert $]a, b[$, avec $a \geq -\infty$ et $b \leq +\infty$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si, pour un certain $c \in]a, b[$, les intégrales généralisées

$$\int_a^c f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_c^b f(t)dt$$

sont toutes deux convergentes. On pose alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt ,$$

et on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est l'intégrale généralisée de f sur $]a, b[$.
La définition ne dépend pas du choix de c .

La définition ne dépend pas de c en ce sens que l'assertion

$$\exists c \in]a, b[/ \int_a^c f(t)dt \text{ et } \int_c^b f(t)dt \text{ convergent}$$

équivalent à l'assertion

$$\forall c \in]a, b[, \int_a^c f(t)dt \text{ et } \int_c^b f(t)dt \text{ convergent .}$$

On le voit avec la relation de Chasles dans la mesure où si $c_1 < c_2$ sont deux points de $]a, b[$, alors pour tout $a < x < c_1$,

$$\int_x^{c_2} f(t)dt = \int_x^{c_1} f(t)dt + \int_{c_1}^{c_2} f(t)dt$$

et pour tout $c_2 < x < b$,

$$\int_{c_1}^x f(t)dt = \int_{c_1}^{c_2} f(t)dt + \int_{c_2}^x f(t)dt .$$

A partir de là, on voit que

$$\int_a^{c_1} f(t)dt \text{ converge} \iff \int_a^{c_2} f(t)dt \text{ converge}$$
$$\int_{c_1}^b f(t)dt \text{ converge} \iff \int_{c_2}^b f(t)dt \text{ converge} .$$

D'où l'affirmation. De plus,

$$\int_a^{c_2} f(t)dt + \int_{c_2}^b f(t)dt$$
$$= \int_a^{c_1} f(t)dt + \int_{c_1}^{c_2} f(t)dt + \int_{c_1}^b f(t)dt - \int_{c_1}^{c_2} f(t)dt$$
$$= \int_a^{c_1} f(t)dt + \int_{c_1}^b f(t)dt .$$

Si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge, alors pour tout $a < c < b$, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

Remarque : La convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ n'est pas équivalente à l'existence et à la finitude de la limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f(t)dt$$

si a et b sont des réels, ou à l'existence et à la finitude de la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^{+x} f(t)dt$$

si $a = -\infty$ et $b = +\infty$. Pour tout $x > 0$ on a par exemple que

$$\int_{-x}^{+x} tdt = 0 ,$$

tandis que $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$ diverge.

Des exemples : (1) En vertu de ce qui a été dit au sujet de l'intégrale de Riemann, et dans la mesure où un réel ne peut être tout à la fois strictement plus grand que un et strictement plus petit que un, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ diverge pour tout réel α .

(2) L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ converge et vaut π . En effet, d'une part

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \text{Arctg}x$$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctg}x$ existe et vaut $\frac{\pi}{2}$. D'autre part,

$$\int_x^0 \frac{1}{1+t^2} dt = -\text{Arctg}x$$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctg}x$ existe et vaut $-\frac{\pi}{2}$.

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$$

sont deux intégrales convergentes qui valent toutes deux $\frac{\pi}{2}$. On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$$

converge et vaut π .

(3) L'intégrale généralisée $\int_0^1 \ln(t) dt$ (généralisée en 0) est convergente et vaut -1 . En effet, $x \ln(x) - x$ est une primitive de $\ln(x)$. Donc

$$\int_x^1 \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_x^1 = x - x \ln(x) - 1$$

qui a pour limite -1 lorsque $x \rightarrow 0^+$.

2. Intégrales absolument convergentes

Définition

Soit f une fonction réelle définie et localement intégrable sur un intervalle de \mathbb{R} d'extrémités $a \geq -\infty$ et $b \leq +\infty$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument si l'intégrale généralisée $\int_a^b |f(t)|dt$ converge.

Le résultat suivant a lieu.

Théorème

Toute intégrale absolument convergente est convergente.

Preuve : Pour simplifier on va traiter du cas où l'intégrale est généralisée en b , et où $b < +\infty$. Soit $F(x) = \int_a^x |f(t)|dt$ et

$G(x) = \int_a^x f(t)dt$. On suppose que F a une limite finie lorsque $x \rightarrow b$ par valeurs inférieures, et on veut montrer que G a aussi une limite finie lorsque $x \rightarrow b$ par valeurs inférieures. On utilise les deux résultats suivant d'analyse :

(i) $F(x)$ (resp. $G(x)$) ont une limite lorsque $x \rightarrow b$ par valeurs inférieures si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de points de I , si $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = b$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n)$ (resp. $\lim_{n \rightarrow +\infty} G(x_n)$) existe,

(ii) une suite réelle $(F(x_n))_n$ (resp. $(G(x_n))_n$) est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Soit $(x_n)_n$ une suite donnée quelconque de points de I qui tend vers b . La suite $(F(x_n))_n$ converge par hypothèse et en vertu de (i) ci-dessus. En vertu de (ii) la suite est donc de Cauchy.

Preuve suite et fin : On a pour tous $p, q \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |G(x_q) - G(x_p)| &= \left| \int_a^{x_q} f(t)dt - \int_a^{x_p} f(t)dt \right| \\ &= \left| \int_{x_p}^{x_q} f(t)dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_p}^{x_q} |f(t)|dt \right| \\ &= \left| \int_a^{x_q} |f(t)|dt - \int_a^{x_p} |f(t)|dt \right| \\ &= |F(x_q) - F(x_p)| . \end{aligned}$$

Comme $(F(x_n))_n$ est de Cauchy, on en déduit que $(G(x_n))_n$ est aussi de Cauchy. D'où, avec (ii), la convergence de $\int_a^b f(t)dt$.
CQFD.

3. Critères de convergence pour les fonctions positives

On ne considère dans cette section que des fonctions réelles positives définies et localement intégrable sur des intervalles du type $[a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \leq +\infty$. Des théorèmes analogues s'écrivent sans difficulté pour des fonctions positives définies et localement intégrables sur des intervalles du type $]a, b]$, avec $a \geq -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$. Par suite, on obtient aussi des critères de convergence pour les fonctions positives localement intégrables lorsque les problèmes de convergence se trouvent aux deux bornes de l'intégrale.

Proposition

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive localement intégrable sur $[a, b[$. Pour que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge il faut et il suffit qu'il existe une constante réelle $M > 0$ telle que pour tout $a \leq x < b$, $\int_a^x f(t)dt \leq M$.

Preuve : Il suffit de remarquer que la positivité de f entraîne la croissance de $\int_a^x f(t)dt$. Une fonction croissante sur $[a, b[$ a une limite finie si et seulement si elle est majorée. D'où le résultat. CQFD.

Théorème (Principe de comparaison)

Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions positives localement intégrables sur $[a, b[$. On suppose que pour tout $a \leq x < b$, $f(x) \leq g(x)$. Alors

$$\int_a^b g(t)dt \text{ converge} \implies \int_a^b f(t)dt \text{ converge} .$$

En particulier, la divergence de $\int_a^b f(t)dt$ entraîne la divergence de $\int_a^b g(t)dt$.

Preuve : En vertu de la proposition précédente, la convergence de $\int_a^b g(t)dt$ équivaut à l'existence d'une constante réelle $M > 0$ telle que pour tout $a \leq x < b$,

Preuve suite et fin :

$$\int_a^x g(t)dt \leq M .$$

De l'inégalité $f \leq g$, on tire que pour tout $a \leq x < b$,

$$\int_a^x f(t)dt \leq M ,$$

et il suit de la proposition précédente que $\int_a^b f(t)dt$ converge.
D'où le résultat. CQFD.

Théorème (Condition nécessaire à l'infini)

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive localement intégrable sur $[a, +\infty[$. On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ existe et } \int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ converge .}$$

Alors nécessairement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Preuve : Supposons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha$, et pour alléger la rédaction, supposons que $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 / \forall x \geq A, |f(x) - \alpha| < \varepsilon .$$

Sachant que f est positive, nécessairement $\alpha \geq 0$. Supposons que $\alpha > 0$. En posant $\varepsilon = \alpha/2$, on obtient l'existence d'un $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$, $f(x) \geq \alpha/2$. Pour tout $x > A$ on aurait alors

$$\int_a^x f(t)dt \geq \int_A^x f(t)dt \geq \frac{\alpha}{2}(x - A) ,$$

ce qui entraîne que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha \quad \text{et} \quad \int_a^{+\infty} f(t)dt \quad \text{converge}$$

entraînent que $\alpha = 0$. D'où le résultat. CQFD.

A propos de ce théorème, on remarquera qu'il existe des fonctions $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ positives et localement intégrables, pour lesquelles l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge mais qui n'ont pas de limite en $+\infty$. Pour le voir on pourra par exemple considérer la fonction "en peigne" $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x) = n^2x + 1 - n^3 & \text{si pour un certain } n \geq 2, n - \frac{1}{n^2} \leq x \leq n \\ f(x) = -n^2x + n^3 + 1 & \text{si pour un certain } n \geq 2, n \leq x \leq n + \frac{1}{n^2} \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction vaut 1 aux entiers n , et comme on s'en convaincra facilement, f n'a pas de limite en $+\infty$. Par contre $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge puisque la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge. Dans le cas présent

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} .$$

On le constate sans difficulté.

Remarque : Dire que la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge signifie que la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

existe et est finie. Pour démontrer cela on revient aux intégrales...
Pour tout $n \geq 1$ on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} .$$

On veut montrer que la suite (S_n) a une limite. On a $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + \frac{1}{4}$, $S_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$... Cette suite est croissante. Pour montrer qu'elle converge il suffit de montrer qu'elle est majorée. On remarque que

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt$$

puisque $\frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{k^2}$ sur $[k-1, k]$. Par suite, pour tout $n \geq 2$, et en utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}
S_n &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \\
&\leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt \\
&= 1 + \int_1^n \frac{1}{t^2} dt \quad (\text{Avec Chasles}) \\
&\leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

puisque l'intégrale de Riemann généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente. Donc (S_n) est croissante majorée. Il s'ensuit qu'elle converge. □

Théorème

Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions positives localement intégrables sur $[a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \leq +\infty$. On suppose qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que pour tout $c \leq x < b$, $g(x) \neq 0$, et on suppose que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

existe.

(1) Si $0 < \alpha < +\infty$, les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature, à savoir simultanément convergentes ou simultanément divergentes.

(2) Si $\alpha = 0$, la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$ entraîne la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$.

(3) Si $\alpha = +\infty$, la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ entraîne la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$.

Preuve : Pour alléger la rédaction, on suppose que $b < +\infty$. Dire que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$, signifie que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x, b - \eta < x < b \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \alpha \right| < \varepsilon .$$

Sachant que f et g sont positives, $\alpha \geq 0$. Supposons que $\alpha > 0$. En posant $\varepsilon = \alpha/2$, on obtient l'existence d'un $\eta > 0$ tel que pour tout $b - \eta < x < b$,

$$\frac{\alpha}{2} g(x) \leq f(x) \leq \frac{3\alpha}{2} g(x) .$$

Du principe de comparaison énoncé dans un théorème précédent, il s'ensuit facilement que les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Preuve suite et fin : Supposons maintenant que $\alpha = 0$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x, b - \eta < x < b \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon .$$

En posant $\varepsilon = 1$, on obtient ainsi l'existence d'un $\eta > 0$ tel que pour tout $b - \eta < x < b$, $f(x) \leq g(x)$. Là encore, il suit du principe de comparaison que la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$ entraîne la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$.

Enfin, si $\alpha = +\infty$, alors

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0 / \forall x, b - \eta < x < b \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \geq A .$$

En prenant $A = 1$, on obtient qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $b - \eta < x < b$, $f(x) \geq g(x)$. On applique une fois de plus le principe de comparaison, d'où l'on tire que la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ entraîne la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$. Le théorème est démontré.
CQFD.

Corollaire

Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions positives localement intégrables sur $[a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \leq +\infty$. On suppose qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que pour tout $c \leq x < b$, $g(x) \neq 0$, et on suppose que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

existe. Si $\alpha = 0$, la divergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ entraîne la divergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$, et si $\alpha = +\infty$, la divergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$ entraîne la divergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$.

Un autre corollaire au théorème est donné par le résultat important suivant.

Théorème (Critère de Riemann)

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive définie et localement intégrable sur $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$. On suppose que pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = s$ existe. Alors :

(i) Si $\alpha > 1$ et $0 \leq s < +\infty$, $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge ,

(ii) Si $\alpha \leq 1$ et $0 < s \leq +\infty$, $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge .

En particulier, si $0 < s < +\infty$, les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ sont de même nature.

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème que l'on vient de démontrer avec pour fonction g la fonction $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, sachant que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. CQFD.

4. Pour résumer

En résumé de ce qui a été dit, lorsque les problèmes d'intégrale généralisée sont sur la **borne droite**, et lorsque les fonctions sont positives :

[1/ Critère borné] Soient $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive localement intégrable sur $[a, b[$. Pour que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge il faut et il suffit qu'il existe une constante réelle $M > 0$ telle que pour tout $a \leq x < b$, $\int_a^x f(t)dt \leq M$.

[2/ Principe de comparaison] Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions positives localement intégrables sur $[a, b[$. On suppose que pour tout $a \leq x < b$, $f(x) \leq g(x)$. Alors

$$\int_a^b g(t)dt \text{ converge} \implies \int_a^b f(t)dt \text{ converge}.$$

En particulier, la divergence de $\int_a^b f(t)dt$ entraîne la divergence de $\int_a^b g(t)dt$.

[3/ Condition nécessaire à l'infini] Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive localement intégrable sur $[a, +\infty[$. On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ existe et } \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ converge.}$$

Alors nécessairement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

[4/ Par équivalences] Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions positives localement intégrables sur $[a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \leq +\infty$. On suppose qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que pour tout $c \leq x < b$, $g(x) \neq 0$, et on suppose que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

existe. Si $0 < \alpha < +\infty$, les intégrales généralisées $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont de même nature, à savoir simultanément convergentes ou simultanément divergentes.

[5/ Par comparaison] Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus, et si $\alpha = 0$, alors la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$ entraîne la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ (et contraposée). Et si $\alpha = +\infty$, la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ entraîne la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$ (et contraposée).

[6/ Critère de Riemann] Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive définie et localement intégrable sur $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$. On suppose que pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = s$ existe.

Alors :

(i) Si $\alpha > 1$ et $0 \leq s < +\infty$, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge ,

(ii) Si $\alpha \leq 1$ et $0 < s \leq +\infty$, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge .

En particulier, si $0 < s < +\infty$, les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ sont de même nature.

Toujours en résumé de ce qui a été dit, mais maintenant lorsque les problèmes d'intégrale généralisée sont sur la **borne gauche** :

[1/ Critère borné] Soient $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive localement intégrable sur $]a, b]$. Pour que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge il faut et il suffit qu'il existe une constante réelle $M > 0$ telle que pour tout $a < x \leq b$, $\int_x^b f(t)dt \leq M$.

[2/ Principe de comparaison] Soient $f, g :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions positives localement intégrables sur $]a, b]$. On suppose que pour tout $a < x \leq b$, $f(x) \leq g(x)$. Alors

$$\int_a^b g(t)dt \text{ converge} \implies \int_a^b f(t)dt \text{ converge} .$$

En particulier, la divergence de $\int_a^b f(t)dt$ entraîne la divergence de $\int_a^b g(t)dt$.

[3/ Condition nécessaire à l'infini] Soit $f :] - \infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive localement intégrable sur $] - \infty, b]$. On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ existe et } \int_{-\infty}^b f(t) dt \text{ converge.}$$

Alors nécessairement $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

[4/ Par équivalences] Soient $f, g :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions positives localement intégrables sur $]a, b]$, avec $b \in \mathbb{R}$ et $a \geq -\infty$. On suppose qu'il existe $c \in]a, b]$ tel que pour tout $a < x \leq c$, $g(x) \neq 0$, et on suppose que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

existe. Si $0 < \alpha < +\infty$, les intégrales généralisées $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont de même nature, à savoir simultanément convergentes ou simultanément divergentes.

[5/ Par comparaison] Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus, et si $\alpha = 0$, alors la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$ entraîne la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ (et contraposée). Et si $\alpha = +\infty$, la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ entraîne la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$ (et contraposée).

[6/ Critère de Riemann] Soit $f :]0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive définie et localement intégrable sur $]0, a]$, $a \in \mathbb{R}^{+\ast}$. On suppose que pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha f(x) = s$ existe. Alors :

(i) Si $\alpha < 1$ et $0 \leq s < +\infty$, $\int_0^a f(t)dt$ converge ,

(ii) Si $\alpha \geq 1$ et $0 < s \leq +\infty$, $\int_0^a f(t)dt$ diverge .

En particulier, si $0 < s < +\infty$, les intégrales $\int_0^a f(t)dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ sont de même nature.

5. Un exercice

Exercice : Montrer la convergence de l'intégrale généralisée

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt .$$

Calculer I en effectuant le changement de variables $x = \frac{1}{t}$.

Solution : La fonction $x \rightarrow \frac{\ln(x)}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\ast}$. L'intégrale est généralisée aux deux bornes 0 et $+\infty$. Soit $f : \mathbb{R}^{+\ast} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction intégrée $f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$. Cette fonction est négative pour $0 < x \leq 1$ et positive pour $x \geq 1$. Elle est donc de signe constant au voisinage des bornes et on peut donc appliquer les critères de convergence précédents. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x^2} = 1 .$$

L'intégrale généralisée $\int_0^1 \ln(t) dt$ (généralisée en 0) est convergente (cf. ci-dessus). Donc (par équivalence), I est convergente en 0.

Pour ce qui est de la convergence en $+\infty$ on remarque que pour tout $0 < \alpha < 2$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = 0 .$$

En particulier, par exemple,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} f(x) = 0 .$$

Comme $3/2 > 1$ le critère de Riemann permet alors d'affirmer que I est aussi convergente en $+\infty$. L'intégrale généralisée I est donc convergente en ses deux bornes. Au total, I est une intégrale convergente.

Reste maintenant à calculer I . Soient $0 < a < b < +\infty$. On effectue le changement de variable $x = 1/t$. Alors

$$dx = -dt/t^2 = -x^2 dt$$

et on récupère ainsi que

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt &= \int_{1/b}^{1/a} \frac{\ln(\frac{1}{x})}{1+\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^2} dx \\ &= - \int_{1/b}^{1/a} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx .\end{aligned}$$

En passant à la limite en $a \rightarrow 0^+$ et $b \rightarrow +\infty$ on obtient que $I = -I$. Donc $I = 0$. □

6. Les intégrales de Bertrand

Théorème (Intégrales de Bertrand)

Soient $a > 1$ et α, β deux réels. On considère l'intégrale $I_{\alpha\beta}$, dite de Bertrand, généralisée en $+\infty$, donnée par

$$I_{\alpha\beta} = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt .$$

Alors $I_{\alpha\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ et β quelconque, ou alors $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Preuve : Pour commencer, on suppose que $\alpha = 1$, et on montre que $I_{1\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$. Pour le voir on remarque qu'avec le changement de variables $u = \ln t$,

$$\int_a^x \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt = \int_{\ln a}^{\ln x} \frac{1}{u^\beta} du .$$

Preuve suite : On est ainsi ramené à une intégrale de Riemann généralisée en $+\infty$, dont on sait qu'elle converge si et seulement si $\beta > 1$.

On suppose maintenant que $\alpha > 1$. On montre que $I_{\alpha\beta}$ converge pour tout β . Sachant que pour tout $s > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^s} = 0 ,$$

on voit que pour $1 < \gamma < \alpha$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\gamma \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = 0 .$$

Le résultat annoncé découle alors du critère de Riemann.

Supposons pour finir que $\alpha < 1$. On montre que pour tout β , $I_{\alpha\beta}$ diverge. En effet, pour $\alpha < \gamma < 1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\gamma \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = +\infty ,$$

et là encore le résultat annoncé suit du critère de Riemann. CQFD.

7. Le critère d'Abel pour les fonctions changeant de signe.

Théorème (Le critère d'Abel)

Soient $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies et localement intégrables sur $[a, +\infty[$. On suppose que f est positive, décroissante, et tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$. On suppose par ailleurs qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x > a$, $|\int_a^x g(t)dt| \leq M$. L'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est alors convergente.

On donne un exemple d'application du critère. On considère l'intégrale généralisée en $+\infty$,

$$I = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt .$$

On prétend que cette intégrale est convergente mais pas absolument convergente. Que cette intégrale soit convergente s'obtient facilement à partir du critère d'Abel. La fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est en effet positive, décroissante, et elle tend vers 0 lorsque

$x \rightarrow +\infty$. Par ailleurs, et pour tout $x > \pi$,

$$\left| \int_{\pi}^x \sin t dt \right| = |(-\cos t)_{\pi}^x| \leq 2 ,$$

de sorte qu'il est effectivement possible d'appliquer le critère d'Abel.

A l'inverse, on remarque que pour tout $n \geq 1$ entier, et tout $t \in [(n-1)\pi, n\pi]$,

$$\begin{aligned} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt &\geq \frac{1}{n\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin t| dt \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt \\ &= \frac{2}{n\pi} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\operatorname{sint}|}{t} dt &= \sum_{p=2}^n \int_{(p-1)\pi}^{p\pi} \frac{|\operatorname{sint}|}{t} dt \\ &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{p=2}^n \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

Donc la convergence de l'intégrale généralisée $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\operatorname{sint}|}{t} dt$ devrait entraîner la convergence de la série $\sum \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\operatorname{sint}|}{t} dt$, et puisque la série harmonique de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, on tire de ce qui a été dit plus haut que l'intégrale généralisée $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\operatorname{sint}|}{t} dt$ diverge elle aussi.

En d'autres termes, l'intégrale généralisée

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sint}}{t} dt$$

est convergente mais n'est pas absolument convergente.

Fin du chapitre 2 - Intégration