Algèbre bilinéaire et Intégration

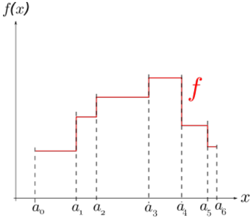
par

Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise

Année 2019-2020

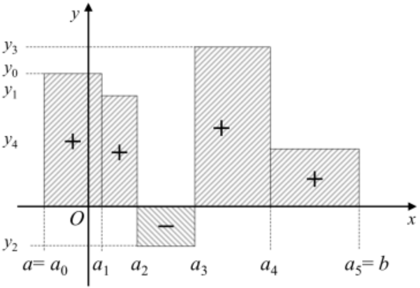
Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a < b$ deux réels. Soit $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$, une famille finie de points de $[a, b]$ telle que $a_0 = a$, $a_n = b$, et $a_{i-1} < a_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. On dit alors que σ est une **subdivision** de $[a, b]$. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision σ de $[a, b]$ et des réels c_i pour $i = 1, \ldots, n$, tels que $f \equiv c_i$ sur $]a_{i-1}, a_i[$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ (les valeurs aux points a_i étant, selon le choix, fixées comme égales à c_i ou c_{i+1}).



Pour une fonction f en escalier comme ci-dessus, qui vaut c_i sur les intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ d'une subdivision $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$, on définit

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})c_i \ .$$

C'est l'aire (signée) hachurée sur le graphique ci-dessous (ici, par rapport à nos notations, $y_i = c_{i+1}$). L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ ne dépend pas de la subdivision σ.



Définition

Soient $a < b$ deux réels. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que $|f - \varphi_\varepsilon| \leq \psi_\varepsilon$ dans $[a, b]$ et $\int_a^b \psi_\varepsilon(x)dx < \varepsilon$.

Lemme

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si et seulement si il existe des suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ de fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que $|f - \varphi_n| \leq \psi_n$ sur $[a, b]$ pour tout n, et $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx = 0$.

Preuve : On obtient le lemme à partir de la définition en posant $\varepsilon = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour chaque n on a deux fonctions en escalier $\varphi_n, \psi_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ telles que $|f - \varphi_n| \leq \psi_n$ dans $[a, b]$ et $\int_a^b \psi_n(x)dx < \frac{1}{n}$. La réciproque est immédiate. CQFD.

Définition

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, $a < b$ deux réels, et si $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ sont deux suites de fonctions en escalier comme dans le lemme précédent, on pose

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx \ .$$

La limite existe toujours et la définition ne dépend pas du choix des suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$.

Preuve : (1) On montre que la limite existe. Soient p, q deux entiers. On a $|\varphi_q - \varphi_p| \leq |f - \varphi_p| + |f - \varphi_q|$. Donc

$$|\varphi_q - \varphi_p| \leq \psi_p + \psi_q$$

sur $[a, b]$. On vérifie facilement que pour des fonctions en escalier $\tilde{f}, \tilde{g}$ sur un intervalle $[a, b]$, si $\tilde{f} \leq \tilde{g}$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b \tilde{f}(x)dx \leq \int_a^b \tilde{g}(x)dx \ .$$

Preuve suite : De cette identité on tire facilement que pour toute fonction en escalier $\tilde{f}$ sur $[a,b]$,

$$\left|\int_a^b \tilde{f}(x)dx\right| \leq \int_a^b |\tilde{f}(x)|dx \ .$$

On vérifie de même facilement que si $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont en escalier sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b \left(\tilde{f}+\tilde{g}\right)(x)dx = \int_a^b \tilde{f}(x)dx + \int_a^b \tilde{g}(x)dx \ .$$

Il suit de tout ceci que

$$\left|\int_a^b \varphi_q(x)dx - \int_a^b \varphi_p(x)dx\right| \leq \int_a^b \psi_p(x)dx + \int_a^b \psi_q(x)dx \ ,$$

et puisque $\int_a^b \psi_p(x)dx \to 0$ lorsque $p \to +\infty$ et $\int_a^b \psi_q(x)dx \to 0$ lorsque $q \to +\infty$, on en déduit que la suite des intégrales $\int_a^b \varphi_n(x)dx$ est une suite de Cauchy réelle. Toute suite de Cauchy réelle converge. La limite existe donc.

Preuve suite : (2) On montre l'indépendance de la définition par rapport au choix des suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$. Supposons que l'on ait deux familles $(\varphi_n)_n, (\psi_n)_n$ et $(\hat{\varphi}_n)_n, (\hat{\psi}_n)_n$ de suites de fonctions en escalier telles que

$$|f - \varphi_n| \leq \psi_n \;\text{ et }\; |f - \hat{\varphi}_n| \leq \hat{\psi}_n \text{ dans } [a, b], \text{ pour tout } n,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \hat{\psi}_n(x)dx = 0 \; .$$

On écrit que

$$\begin{aligned} |\varphi_n - \hat{\varphi}_n| &\leq |f - \varphi_n| + |f - \hat{\varphi}_n| \\ &\leq \psi_n + \hat{\psi}_n \end{aligned}$$

dans $[a, b]$, pour tout n. Comme précédemment, cela entraîne que

$$\left| \int_a^b \varphi_n(x)dx - \int_a^b \hat{\varphi}_n(x)dx \right| \leq \int_a^b \psi_n(x)dx + \int_a^b \hat{\psi}_n(x)dx \; ,$$

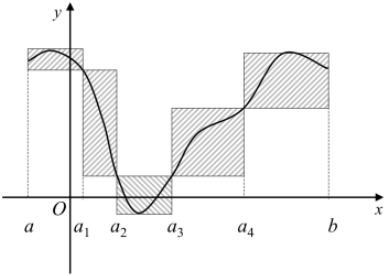
et donc que

Preuve suite et fin :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \hat{\varphi}_n(x)dx \ .$$

D'où l'indépendance de la définition par rapport au choix des suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$. CQFD.

Dans le graphique qui suit, f est encadrée par deux fonctions en escalier :$\psi_1 \leq f \leq \psi_2$, et si $\phi = \frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2)$ et $\psi = \frac{1}{2}(\psi_2-\psi_1)$, alors $|f-\phi| \leq \psi$ (un encadrement du type de ceux rencontrés ici).



1. Sommes de Riemann

On appelle **subdivision pointée** de $[a, b]$ tout couple (σ, ξ) constitué d'une subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ et d'une famille $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ de points de $[a, b]$ tels que

$$a_{i-1} \leq \xi_i \leq a_i$$

pour tout $i = 1, \dots, n$. On appelle **pas d'une subdivision** $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ le réel positif

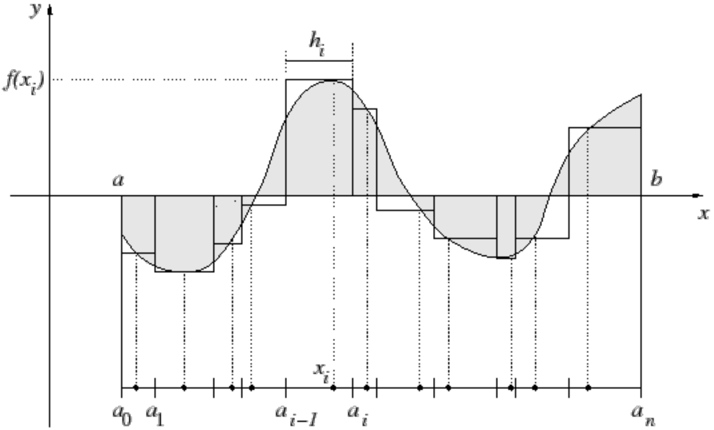
$$\delta(\sigma) = \max_{i=1,\dots,n} |a_i - a_{i-1}| \ .$$

Si maintenant $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction, et (σ, ξ) est une subdivision pointée de $[a, b]$, on définit

$$S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) f(\xi_i) \ .$$

On dit que $S(f, \sigma, \xi)$ est la **somme de Riemann** de f associée à (σ, ξ).

Sur un graphique, les sommes de Riemann ressemblent à cela (ici, par rapport à nos notations, $x_i = \xi_i$) :



On donne le théorème fondamental suivant sans preuve.

Théorème

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \;/\; \forall (\sigma, \xi) \in \mathcal{S}, \delta(\sigma) < \eta$$
$$\Rightarrow \left| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon \;,$$

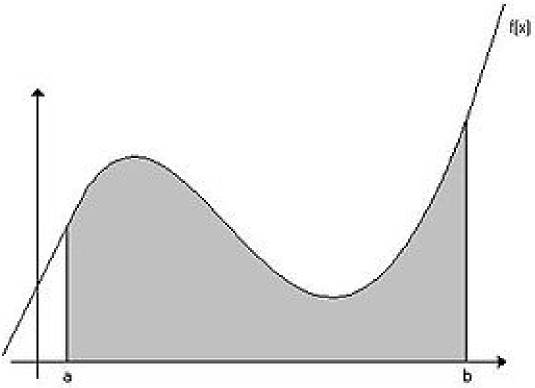
où $\mathcal{S}$ parcourt l'ensemble des subdivisions pointées de $[a, b]$.

Il suit de ce théorème que si f est intégrable au sens de Riemann, alors pour toute suite $((\sigma_n, \xi_n))_n$ de subdivisions pointées de $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} S(f, \sigma_n, \xi_n)$$

dès que $\lim_{n \to +\infty} \delta(\sigma_n) = 0$.

En vertue de ce qui a été dit, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est en fait (peut être pensée) comme l'aire (signée) de la surface bloquée entre l'axe des x et le graphe de la fonction :



2. Continuité et intégrabilité

Théorème

Soient $a < b$ deux réels. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.

Preuve : On utilise qu'une fonction continue sur un compact (ici un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$) y est en fait uniformément continue. Donc on a, en vertue de ce résultat, que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x, y \in [a, b], |y - x| < \eta$$
$$\Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon \ .$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$ de pas $\delta(\sigma) < \eta$. On définit la fonction en escalier

$$\varphi_\varepsilon \equiv f(a_{i-1}) \text{ sur } [a_{i-1}, a_i[$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$.

Preuve suite : On a

$$|f - \varphi_\varepsilon| < \varepsilon$$

sur $[a, b]$ en vertue de l'uniforme continuité. La fonction $\psi_\varepsilon \equiv \varepsilon$ sur $[a, b]$ est elle aussi en escalier sur $[a, b]$ (puisque constante). On a

$$\int_a^b \psi_\varepsilon(x)dx = \varepsilon(b - a) \ .$$

Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, f est bien intégrable au sens de Riemann. CQFD.

3. Propriétés élémentaires des intégrales

Lemme

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$. Alors f est bornée au sens où il existe $K > 0$ telle que $|f(x)| \leq K$ pour tout $x \in [a, b]$.

Preuve : La propriété est évidente puisque, en particulier, il existe $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions en escalier (donc bornées) telles que $|f - \varphi| \leq \psi$ sur $[a, b]$ (et $\int_a^b \psi(x)dx < 1$ par exemple). Donc $|f| \leq |\varphi| + \psi$ sur $[a, b]$, et si $K > 0$ est tel que $|\varphi| + \psi \leq K$ sur $[a, b]$, on récupère le résultat. CQFD.

Lemme (Relation de Chasles)

Soient $a < b < c$ trois réels. Une fonction $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, c]$ si et seulement si f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$. De plus on a la relation de Chasles : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

Preuve : On peut toujours insérer b dans une subdivision de $[a, c]$. On en déduit facilement que si f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, c]$ alors f est aussi intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$. La réciproque est tout aussi évidente. Pour des fonctions en escalier $\varphi : [a, c] \to \mathbb{R}$ on vérifie facilement que $\int_a^c \varphi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_b^c \varphi(x)dx$. On en déduit (il n'y a pas de difficulté) que l'identité s'étend aux fonctions intégrables au sens de Riemann. CQFD.

Lemme

Soient $a < b$ deux réels. Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$. Si $f \leq g$ alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \ .$$

En particulier, l'intégrale d'une fonction positive ou nulle est positive ou nulle.

Preuve : Soient $(\varphi_n)_n, (\psi_n)_n$ et $(\hat{\varphi}_n)_n, (\hat{\psi}_n)_n$ des suites de fonctions en escalier telles que

$$|f - \varphi_n| \leq \psi_n \ \text{ et } \ |g - \hat{\varphi}_n| \leq \hat{\psi}_n \text{ dans } [a, b], \text{ pour tout } n,$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b \hat{\psi}_n(x)dx = 0 \ .$$

On écrit que

$$\begin{aligned} \varphi_n &\leq \varphi_n - f + f \\ &\leq |f - \varphi_n| + g \\ &\leq |f - \varphi_n| + |g - \hat{\varphi}_n| + \hat{\varphi}_n \\ &\leq \psi_n + \hat{\psi}_n + \hat{\varphi}_n \end{aligned}$$

sur $[a, b]$. Comme il n'y a là que des fonctions en escalier, on peut écrire que

$$\int_a^b \varphi_n(x)dx \leq \int_a^b \psi_n(x)dx + \int_a^b \hat{\psi}_n(x)dx + \int_a^b \hat{\varphi}_n(x)dx \ ,$$

et en passant à la limite en $n \to +\infty$, on obtient l'inégalité recherchée. CQFD.

Lemme (bis)

Soient $a < b$ deux réels. Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$. Si $f \leq g$ alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \ .$$

et il y a égalité si et seulement si $f = g$. En particulier, si $f \geq 0$ est continue et si $\int_a^b f(x)dx = 0$, alors $f = 0$.

Preuve : On sait déjà que l'inégalité est vraie. En considérant $h = g - f$ il suffit de montrer que si $h \geq 0$ est continue et si $\int_a^b h(x)dx = 0$, alors $h = 0$. Mais si h n'est pas la fonction nulle, alors il existe $c \in [a, b]$ telle que $h(c) > 0$. Sans perdre en généralité on peut supposer que $c \in]a, b[$. Par continuité il existe alors $\eta > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que $h \geq \varepsilon_0$ sur $[c - \eta, c + \eta]$.

Par Chasles et comparaisons on a alors que

$$\begin{aligned}\int_a^b h(x)dx &= \int_a^{c-\eta} h(x)dx + \int_{c_\eta}^{c+\eta} h(x)dx + \int_{c+\eta}^{b} h(x)dx \\ &\geq \int_{c-\eta}^{c+\eta} h(x)dx \\ &\geq \int_{c-\eta}^{c+\eta} \varepsilon_0 dx \\ &= 2\varepsilon_0\eta\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Donc h est obligatoirement la fonction nulle. CQFD.

Lemme

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$. Alors $|f|$ est aussi intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$, et $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Preuve : L'intégrabilité de $|f|$ s'obtient en remarquant que si $|f - \varphi| \leq \psi$ sur $[a,b]$ alors $||f| - |\varphi|| \leq \psi$ sur $[a,b]$, et en remarquant que si φ est en escalier, alors $|\varphi|$ l'est aussi. Pour l'inégalité on remarque que $f \leq |f|$ et $-f \leq |f|$ de sorte que, avec les lemmes précédents,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \text{ et}$$

$$-\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \; .$$

Ce n'est rien d'autre que l'inégalité voulue. CQFD.

Lemme (bis)

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Alors

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

avec égalité si et seulement si f est de signe constant.

Preuve : On sait déjà que l'inégalité est vraie. Supposons qu'il y a égalité. Sans perdre en généralité, quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. Alors

$$\int_a^b \left(|f(x)| - f(x)\right) dx = 0 \ .$$

Or $|f| - f \geq 0$ et avec les lemmes précédents on obtient donc que $|f| = f$. En particulier, f est positive ou nulle. CQFD

Lemme

Soient $a < b$ deux réels et $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$. La fonction $\Phi : \mathcal{L}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(f) = \int_a^b f(x)dx$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Preuve : L'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ hérite d'une sructure naturelle d'espace vectoriel en tant que sous espace vectoriel de l'espace de toutes les fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Il est clair que si $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont en escalier, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_a^b (\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(x)dx = \int_a^b \varphi_1(x)dx + \lambda \int_a^b \varphi_2(x)dx \ .$$

L'égalité passe ensuite facilement aux fonctions de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. CQFD.

Exercice : Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. On suppose que $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)^2 dx$. Que peut-on dire sur f ?

Solution : On a donc

$$\int_0^1 \left(f(x) - f(x)^2\right) dx = \int_0^1 f(x)\left(1 - f(x)\right) dx = 0 \ .$$

Or $f \geq 0$ et $1 - f \geq 0$. Donc par continuité (cf lemmes précédents), $f(1-f) = 0$ est la fonction nulle.

On montre maintenant que si $f(1-f)$ est la fonction nulle, alors soit $f = 0$ est la fonction nulle soit $f = 1$ est la fonction constante 1. Supposons que $f(1-f) = 0$ est la fonction nulle. Si f n'est jamais nulle, alors $1 - f$ est forcèment la fonction nulle et donc f est la fonction constante 1. On a donc ce que l'on souhaite montrer. De même, si f est la fonction nulle, on a ce que l'on souhaite montrer. Reste un cas à traiter.

Plus précisément il reste à traiter du cas où f n'est ni la fonction nulle, ni jamais nulle. Dans ce cas restant il existe $c < d$ dans $[a, b]$ avec $f(c) = 0$ et $f(d) \neq 0$ (ou $f(c) \neq 0$ et $f(d) = 0$). Comme $f(x) \neq 0$ et $f(x)\,(1 - f(x)) = 0$ entraînent que $f(x) = 1$, on est ramené à la situation où il existe $c < d$ dans $[a, b]$ avec $f(c) = 0$ et $f(d) = 1$ (ou $f(c) = 1$ et $f(d) = 0$). Le théorème des valeurs intermédiaires implique alors qu'il existe aussi $e \in]c, d[$ tel que $f(e) = \frac{1}{2}$. Mais alors $f(e)\,(1 - f(e)) \neq 0$, une contradiction.

En conclusion, seules deux fonctions répondent à notre problème : la fonction nulle et la fonction constante égale à 1. $\square$

Exercice : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \ .$$

Solution : On utilise qu'une fonction continue sur un compact (un fermé borné dans le cas de $\mathbb{R}$ fonctionne) est bornée et atteint ses bornes. En particulier donc, il existe $c_1, c_2 \in [a, b]$ tels que

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$$

pour tout $x \in [a, b]$. Mais alors, en intégrant cette double inégalité,

$$f(c_1) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(c_2) \ .$$

Le théorème des valeurs intermédiaires permet ensuite d'affirmer qu'il existe $c \in [c_1, c_2]$ (ou $[c_2, c_1]$ si $c_2 < c_1$) tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \ .$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Théorème (Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral)

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann. Pour $t \in [a, b]$, on pose

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx \ ,$$

avec la convention que $F(a) = 0$. Alors $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$. Si de plus f est continue sur $[a, b]$, alors F est dérivable sur $]a, b[$ et $F'(t) = f(t)$ pour tout $t \in]a, b[$.

Pour mémoire une primitive d'une fonction f est une fonction F qui est dérivable de dérivée f. Ce théorème a ceci de remarquable qu'il établit un lien entres primitives et aires des surfaces délimitées par l'axe des abscisses et les graphes des fonctions continues.

Preuve : (1) On démontre la continuité de F. Pour fixer les idées, soit $t_0 \in]a, b[$. Par relation de Chasles,

$$\left| \int_a^t f(x)dx - \int_a^{t_0} f(x)dx \right| \leq \left| \int_{t_0}^t f(x)dx \right|$$
$$\leq \left| \int_{t_0}^t |f(x)|dx \right| ,$$

où l'on adopte la convention que $\int_{t_0}^t = -\int_t^{t_0}$ si $t < t_0$. On sait que f est bornée sur $[a, b]$, et donc il existe $K > 0$ telle que $|f(x)| \leq K$ pour tout $x \in [a, b]$. Par suite

$$\left| \int_a^t f(x)dx - \int_a^{t_0} f(x)dx \right| \leq K \left| t - t_0 \right| ,$$

et on voit que F est continue en t_0. Elle est même lipschitzienne sur $[a, b]$.

Preuve suite : (2) On démontre la différentiablité de F, et le fait que F soit une primitive de f, sous l'hypothèse supplémentaire que f est continue sur $[a,b]$. Soit $t_0 \in]a,b[$. On écrit que

$$\int_a^t f(x)dx - \int_a^{t_0} f(x)dx - (t-t_0)f(t_0)$$
$$= \int_{t_0}^t (f(x) - f(t_0))\, dx \ .$$

Comme f est continue sur $[a,b]$,

$$\lim_{\eta\to 0^+} \sup_{\{x/|x-t_0|<\eta\}} |f(x) - f(t_0)| = 0 \ .$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\left| \int_{t_0}^t (f(x) - f(t_0))\, dx \right| \le \left| \int_{t_0}^t |f(x) - f(t_0)|\, dx \right| \le \varepsilon |t - t_0|$$

pour tout t tel que $|t - t_0| < \eta$. On en déduit que

Preuve suite et fin :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ / \ \forall t \in]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$$
$$\left| \int_a^t f(x)dx - \int_a^{t_0} f(x)dx - (t - t_0)f(t_0) \right| < \varepsilon |t - t_0| \ .$$

Cela entraîne que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ / \ \forall t \in]t_0 - \eta, t_0 + \eta[, t \neq t_0,$$
$$\left| \frac{\int_a^t f(x)dx - \int_a^{t_0} f(x)dx}{t - t_0} - f(t_0) \right| < \varepsilon \ .$$

En particulier,

$$\lim_{t \to t_0, t \neq t_0} \frac{\int_a^t f(x)dx - \int_a^{t_0} f(x)dx}{t - t_0} = f(t_0) \ ,$$

ce qui prouve que F est dérivable en t_0 de dérivée en ce point $F'(t_0) = f(t_0)$. CQFD.

Corollaire

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ (au sens classique où f est en fait définie et C^1 sur un intervalle ouvert un peu plus grand que $[a,b]$). Alors $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.

Preuve : Les fonctions f et $t \to \int_a^t f'(x)dx$ sont deux primitives de f'. Deux primitives d'une même fonction diffèrent forcément d'une constante. Donc il existe C telle que

$$f(t) = \int_a^t f'(x)dx + C$$

pour tout $t \in [a,b]$. En prenant $t = a$ (ou $t \to a^+$) on voit que $C = f(a)$. En prenant ensuite $t = b$ on récupère le corollaire. CQFD.

Corollaire (Formule d'intégration par parties)

Soient $a < b$ deux réelles et $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$ (au sens classique où u et v sont en fait définies et C^1 sur un intervalle ouvert un peu plus grand que $[a, b]$). Alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \ ,$$

où $[uv]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Preuve : On a la formule de dérivation produit

$$(uv)' = u'v + uv' \ .$$

Le corollaire précédent permet d'écrire que

$$\int_a^b (uv)'(x)dx = [uv]_a^b \ .$$

D'où le résultat. CQFD.

5. Quelques primitives usuelles

$$\int x^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \text{ pour } n \neq -1 \ ,$$
$$\int \cos(x) = \sin(x) \ , \ \int \sin(x) = -\cos(x) \ ,$$
$$\int e^x = e^x \ ,$$
$$\int \frac{1}{x} = \ln(x) \text{ sur } \mathbb{R}^{+\star} \ ,$$
$$\int \frac{1}{1+x^2} = \text{Arctg}(x) \ .$$

Exercice : Montrer que $\int_0^1 xe^x dx = 1$.

Solution : On intègre par parties. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. Alors

$$u(x) = x \quad , \quad v'(x) = e^x$$
$$u'(x) = 1 \quad , \quad v(x) = e^x$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x dx &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - [e^x]_0^1 \\ &= e - (e-1) \\ &= 1\end{aligned}$$

$\square$

6. Formule de changement de variables

Théorème

Soient I, J deux intervalles réels fermés bornés, $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R})$ une fonction de classe C^1 sur I telle que $\varphi(I) \subset J$ et $f \in C^0(J, \mathbb{R})$ une fonction continue sur J. Alors

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt$$

pour tous $\alpha, \beta \in I$, avec la convention que $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = -\int_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\alpha)}$ si $\varphi(\alpha) > \varphi(\beta)$.

Preuve : La fonction

$$\Phi(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^{y} f(t)dt$$

est la primitive de f qui s'annule en $\varphi(\alpha)$. La fonction

$$\Psi(y) = \int_{\alpha}^{y} f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx$$

est la primitive de $x \to f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)$ qui s'annule en α. Par dérivation des fonction composées,

$$\left(\Phi \circ \varphi\right)'(y) = f\left(\varphi(y)\right)\varphi'(y)$$

et $\Phi \circ \varphi$ s'annule en α. Donc

$$\Psi = \Phi \circ \varphi$$

et c'est ce que l'on voulait démontrer. CQFD.

Fin du chapitre 1 - Intégration