Algèbre bilinéaire et Intégration

par

Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise

Année 2019-2020

Dans toute la suite, on ne considère que des espaces vectoriels réels, à savoir sur le corps $\mathbb{R}$ des réels. On signale tout de même qu'il existe une théorie analogue pour les espaces vectoriels complexes.

Etant donné un ensemble E, une loi interne notée $+$ sur E est une application de $E \times E \to E$. A un couple $(x, y) \in E \times E$ elle associe un élément de E noté $x + y$.

Une loi externe sur E, construite sur $\mathbb{R}$, est une application de $\mathbb{R} \times E \to E$. A un couple $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$ elle associe un élément de E noté λx.

On adopte donc une notation additive pour la loi interne et une notation multiplicative pour la loi externe.

Définition

Soit E un ensemble muni d'une loi interne notée $+$, agissant de $E \times E$ dans E, et d'une loi externe $\times$ sur $\mathbb{R}$, agissant de $\mathbb{R} \times E$ dans E. On dit que E muni de ces deux lois est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel si $(E, +)$ est un groupe abélien, et si la loi externe $\times$ qui à $(t, x) \in \mathbb{R} \times E$ associe tx vérifie :

(i) (Distributivité dans $\mathbb{R}$) $\forall t, t' \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $(t + t')x = tx + t'x$;

(ii) (Distributivité dans E) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x, x' \in E$,
$t(x + x') = tx + tx'$;

(iii) (Associativité dans $\mathbb{R}$) $\forall t, t' \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $t(t'x) = (tt')x$;

(iv) (Neutralité) $\forall x \in E$, $1 \times x = x$.

Un sous ensemble F de E est dit un sous espace vectoriel de E si F muni des deux lois (internes et externes) de E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Pour rappel, un groupe abélien $(E, +)$ est un ensemble E muni d'une loi interne $+$, i.e. agissant de $E \times E$ dans E, qui vérifie :
(i) (Associativité) $\forall x, y, z \in E$, $(x + y) + z = x + (y + z)$;
(ii) (Elément neutre) $\exists 0 \in E$ tel que $\forall x \in E$, $x + 0 = 0 + x = x$;
(iii) (Inverse) $\forall x \in E$, $\exists -x \in E$ tel que $x + (-x) = (-x) + x = 0$;
(iv) (Caractère Abélien) $\forall x, y \in E$, $x + y = y + x$.
Le 0 de (ii) est appelé élément neutre (et vecteur nul dans le cadre de la théorie des espaces vectoriels). Des propriétés simples qui suivant de la définition d'un espace vectoriel sont les suivantes :
(P1) $\forall x \in E$, $0 \times x = 0$;
(P2) $\forall x \in E$, $(-1) \times x = -x$;
(P3) $\forall t \in \mathbb{R}$, $t \times 0 = 0$;
(P4) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $tx = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $x = 0$.

Exercice : Démontrer les propriétés (P1)-(P4).

Solution : On vérifie (P1) en écrivant que

$$(0+0)\times x = 0\times x = 0\times x + 0\times x$$

de sorte que, nécessairement, $0\times x = 0$. Dans (P1), le premier 0 est le 0 de $\mathbb{R}$, le second 0 est celui de E (vecteur nul, elément neutre de $+$). Une fois (P1) démontrée, on obtient (P2) :

$$0 = (1+(-1))\times x = x + (-1)\times x$$

de sorte que $(-1)\times x = -x$, par définition même de $-x$. Pour (P3) on écrit avec (P2) que

$$t\times 0 = t\times(x+(-x)) = t\times x + (-1)\times(t\times x) = 0\ .$$

Pour démontrer (P4) il suffit de montrer que si $t\neq 0$ et si $tx=0$, alors $x=0$. Pour cela, en supposant que $t\neq 0$ et $tx=0$, on écrit

$$0 = \frac{1}{t}\times(t\times x) = 1\times x = x$$

D'où $tx=0$ si et seulement si $t=0$ ou $x=0$, le "ou" n'étant bien sûr pas exclusif dans la mesure où $0\times 0=0$. $\square$

En bref, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est un ensemble E muni d'une addition qui permet d'additionner ces éléments entres eux (comme on le fait dans $\mathbb{R}$), et d'une loi externe qui permet de multiplier les éléments de E par des réels...

Les éléments d'un espace vectoriel sont aussi appelés des vecteurs.

Exemple 1 : $\mathbb{R}^2$ muni des lois internes et externes

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et

$$\lambda \times (x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le 0 ici est le couple $(0, 0)$. L'exemple s'étend facilement à $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Pour $n = 3$, on aura par exemple que $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ et $\lambda \times (x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$. Le 0 est maintenant le triplet $(0, 0, 0)$. Etc pour $n \geq 4$.

Exemple 2 : L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel lorsque muni des deux lois

$$\text{Addition interne : } \big(f+g\big)(x) = f(x) + g(x);$$
$$\text{Multiplication externe : } \big(t \times f\big)(x) = tf(x).$$

Là encore, les vérifications des propriétés (i)-(iv) de groupe abélien, et des propriétés (i)-(iv) pour la multiplication externe, sont très simples. Le 0 est ici l'application nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Lemme

Soient E_1 et E_2 deux espace vectoriels munis de lois internes et externes notées $+_i$ et $\times_i$, $i = 1, 2$. Soit $E = E_1 \times E_2$ le produit cartésien de E_1 et E_2 constitué des couples (x, y) où $x \in E_1$ et $y \in E_2$. On munit E des deux lois $+$ et $\times$ définies par :

$$\textit{Addition interne : } (x,y) + (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x +_1 \tilde{x}, y +_2 \tilde{y});$$
$$\textit{Multiplication externe : } t \times (x,y) = (t \times_1 x, t \times_2 y).$$

Alors E muni de ces deux lois est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Soit E un ensemble que l'on suppose être un $\mathbb{R}$-espace vectoriel lorsque muni de deux lois $+$ et $\times$. Soit de plus F un sous ensemble de E. Par définition, on l'a vu, F est un sous espace vectoriel de E si F muni de ces deux lois est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Cela suppose déjà que les lois $+$ et $\times$ de E soient bien des lois respectivement internes et externes pour F. Et donc que :
(1) $\forall x, y \in F$, $x + y \in F$;
(2) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in F$, $tx \in F$.
Ce n'est pas obligatoirement le cas pour un sous ensemble quelconque de E comme on le verra dans les exercices qui suivent.

Remarques : (1) Si F est un sous espace vectoriel, alors forcément $0 \in F$.
(2) Si F est un sous espace vectoriel, alors pour tout $x \in F$ on a que $-x \in F$.

Proposition (Caractérisation des sous espaces vectoriels :)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de deux lois $+$ et $\times$. Soit F un sous ensemble de E. Alors F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si
(1) $\forall x, y \in F,\ x + y \in F$;
(2) $\forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in F,\ tx \in F$.
Cela se caractérise encore par le fait que pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$, et tous $x, y \in F$, $tx + t'y \in F$.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni des deux lois de l'exemple 2. Le sous ensemble $C^0(\mathbb{R})$ de E constitué des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est alors par exemple un sous espace vectoriel de E. L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes réels est aussi un sous espace vectoriel de E. L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré au plus n est lui encore aussi un sous espace vectoriel de E. On a $\mathbb{R}_n[X] \subset_{sev} \mathbb{R}[X] \subset_{sev} C^0(\mathbb{R})$, l'inclusion $\subset_{sev}$ signifiant "est un sous espace vectoriel de".

Exercice : Montrer que le sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ donné par $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y - z = 0\right\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Solution : On applique la proposition de caractérisation des sous espaces vectoriels. Soient $(x, y, z) \in F$ et $(x', y', z') \in F$ deux points quelconques de F et $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel quelconque. On a que $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \in F$ car

$$x+x+2(y+y')-(z+z') = (x+2y-z)+(x'+2y'-z') = 0+0 = 0 \ .$$

De même, $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in F$ car

$$(\lambda x) + 2(\lambda y) - (\lambda z) = \lambda(x + 2y - z) = \lambda \times 0 = 0 \ .$$

Donc F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. $\square$

Exercice : Montrer que le sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ donné par $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y - z = 1\right\}$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Solution : Les points $(1, 0, 0)$ et $(0, 0, -1)$ sont dans F. Pourtant $(1, 0, 0) + (0, 0, -1) = (1, 0, -1)$ n'est pas dans F. $\square$

Exercice : Montrer que le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ donné par $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy = 0\right\}$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Solution : Les points $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont dans F. Pourtant $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$ n'est pas dans F. $\square$

Exercice : Montrer que le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ donné par $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x^2\right\}$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Solution : Le point $(1, 1)$ est dans F. Par contre $(2, 2) = 2 \times (1, 1)$ n'est pas dans F. $\square$

Exercice : Montrer que le sous ensemble F de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes réels P pour lesquels $P(0) = P(1)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Solution : On vérifie facilement que la somme de deux polynômes de F est encore un polynôme de F et que le produit d'un polynôme de F par un réel quelconque est encore un polynôme de F. $\square$

1.1 Intersections de sous espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel muni de deux lois $+$ et $\times$, et soient $F_1, \ldots, F_k$ des sous espaces vectoriels de E. Alors $F_1 \cap \cdots \cap F_k$ est encore un sous espace vectoriel de E. La propriété se démontre très facilement. Bien sûr, on peut avoir que $F_1 \cap \cdots \cap F_k = \{0\}$.

1.2 Union de sous espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel muni de deux lois $+$ et $\times$, et soient F_1, F_2 deux sous espaces vectoriels de E. En général, $F_1 \cup F_2$ N'EST PAS un sous espace vectoriel de E.

Proposition

Soit E un espace vectoriel muni de deux lois $+$ et $\times$, et soient F_1, F_2 deux sous espaces vectoriels de E. Alors $F_1 \cup F_2$ est un sous espace vectoriel de E si et seulement si $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.

Preuve : Si $F_1 \subset F_2$, ou $F_2 \subset F_1$, alors $F_1 \cup F_2 = F_1$ ou F_2, et donc $F_1 \cup F_2$ est bien un sous espace vectoriel de E. A l'inverse, on raisonne par l'absurde en supposant que $F_1 \cup F_2$ est un sous espace vectoriel de E, mais que $F_1 \not\subset F_2$ et $F_2 \not\subset F_1$. Soit $x \in F_2 \backslash F_1$ et $y \in F_1 \backslash F_2$. Puisque nous avons supposé que $F_1 \cup F_2$ est un sous espace vectoriel, $x + y \in F_1 \cup F_2$, et donc, soit
(1) $x + y \in F_1$, soit
(2) $x + y \in F_2$.
Si (1) a lieu, alors $x \in F_1$ puisque $y \in F_1$ et F_1 est un sous espace vectoriel de E. Si (2) a lieu, alors $y \in F_2$ puisque $x \in F_2$ et F_2 est un sous espace vectoriel de E. Dans les deux cas, on aboutit à une contradiction. Donc $F_1 \cup F_2$ sous espace vectoriel $\Rightarrow F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$. D'où la proposition. CQFD

1.2 Sommes de sous espace vectoriels

Soit E un espace vectoriel muni de deux lois $+$ et $\times$, et soient F_1, F_2 deux sous espaces vectoriels de E. On définit la somme $F_1 + F_2$ des sous espaces F_1 et F_2 par

$$F_1 + F_2 = \left\{ x + y \in E \text{ tels que } x \in F_1, y \in F_2 \right\} .$$

On vérifie alors très facilement que $F_1 + F_2$ est encore un sous espace vectoriel de E. En effet, soient z et $\tilde{z}$ deux éléments de $F_1 + F_2$. On peut écrire que $z = x + y$ et $\tilde{z} = \tilde{x} + \tilde{y}$, où $x, \tilde{x} \in F_1$ et $y, \tilde{y} \in F_2$. Dès lors, si $t, \tilde{t} \in \mathbb{R}$, alors

$$tz + \tilde{t}\tilde{z} = (tx + \tilde{t}\tilde{x}) + (ty + \tilde{t}\tilde{y})$$

et donc, puisque $tx + \tilde{t}\tilde{x} \in F_1$ et $ty + \tilde{t}\tilde{y} \in F_2$, on a que $tz + \tilde{t}\tilde{z} \in F_1 + F_2$. D'où le fait que $F_1 + F_2$ est un sous espace vectoriel de E.

Exercice : Soient A, B, C trois sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On suppose que $A \cap B = A \cap C$, $A + B = A + C$ et $B \subset C$. Montrer que $B = C$.

Solution : Il suffit de montrer que $C \subset B$. Soit $c \in C$ quelconque dans C. Comme $0 \in A$ et $c = 0 + c$ on a que $c \in A + C$. Comme $A + B = A + C$, on a que $c \in A + B$. Donc il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $c = a + b$. On a $B \subset C$, donc $b \in C$. On a aussi $c - b = a$, et comme C est un sous espace vectoriel, $c - b \in C$. Comme $a \in A$, on en déduit que $c - b \in A \cap C$. Or $A \cap C = A \cap B$. Donc $c - b \in A \cap B$ et, en particulier, $c - b \in B$. Ainsi il existe $b' \in B$ tel que $c - b = b'$. Soit $c = b + b'$, et comme B est un sous espace vectoriel, $c \in B$. $\square$

Par définition, on dit que la somme $F_1 + F_2$ est dirècte, et on écrit $F_1 \oplus F_2$, si $\forall z \in F_1 + F_2$, $\exists! x \in F_1$, et $\exists! y \in F_2$ tels que $z = x + y$. En d'autres termes, la somme $F_1 + F_2$ est dirècte si les éléments de la somme $F_1 + F_2$ se décomposent de façon unique en somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2.

Exemple : Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de ses lois usuels $+$ et $\times$. Soient de plus $F_1 = \{(x, y, z) \in E \ / \ z = 0\}$, $F_2 = \{(x, y, z) \in E \ / \ x = 0\}$, et $F_3 = \{(x, y, z) \in E \ / \ x = y = 0\}$.
On vérifie facilement que F_1, F_2, et F_3 sont des sous espaces vectoriels de E, que $E = F_1 + F_2$ et que $E = F_1 + F_3$. La somme $F_1 + F_2$ n'est pas dirècte. En effet, on peut tout à la fois écrire que $(x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z)$ et que $(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, z)$, avec $(x, y, 0), (x, 0, 0) \in F_1$ et $(0, 0, z), (0, y, z) \in F_2$. Cela fournit deux écritures différentes pour (x, y, z) si $y \neq 0$. La somme $F_1 + F_2$ n'est donc pas dirècte. Par contre, la somme $F_1 + F_3$ est dirècte, un élément (x, y, z) se décomposant de façon unique en $(x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z)$. On écrit donc $F_1 \oplus F_3$.

Proposition

Soit E un espace vectoriel muni de deux lois $+$ et $\times$, et soient F_1, F_2 deux sous espaces vectoriels de E. Alors la somme $F_1 + F_2$ est dirècte si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

Preuve : Supposons que la somme $F_1 + F_2$ est dirècte. S'il existe $x \in F_1 \cap F_2$, alors les deux écritures $x = 0 + x$ et $x = x + 0$ entraînent que nécessairement $x = 0$. Donc, $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.
Réciproquement, supposons que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Soit $z \in F_1 + F_2$. Si $z = x + y$ et $z = x' + y'$ avec $x, x' \in F_1$ et $y, y' \in F_2$, alors

$$x - x' = y' - y \ .$$

Or $x - x' \in F_1$ et $y' - y \in F_2$. Comme $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, c'est donc que $x - x' = y' - y = 0$. Donc la somme $F_1 + F_2$ est dirècte. CQFD

Ce qui a été dit à propos de la somme de deux sous espaces vectoriels se généralise à la somme de k sous espaces vectoriels. Si $F_1, \dots, F_k$ sont k sous espaces vectoriels de E, on définit

$$F_1 + \cdots + F_k = \left\{ x_1 + \cdots + x_k \in E \text{ tels que } x_i \in F_i, i = 1, \dots, k \right\} .$$

Là encore, comme lorsque $k = 2$, $F_1 + \cdots + F_k$ est un sous espace vectoriel de E. Par définition, on dit que la somme $F_1 + \cdots + F_k$ est dirècte, et on écrit $F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$, si la propriété suivante est vérifiée par la somme $F_1 + \cdots + F_k$: $\forall z \in F_1 + \cdots + F_k$, $\exists ! x_1 \in F_1$, ..., $\exists ! x_k \in F_k$ tels que $z = x_1 + \cdots + x_k$. En d'autres termes, la somme $F_1 + \cdots + F_k$ est dirècte si les éléments de la somme $F_1 + \cdots + F_k$ se décomposent de façon unique en somme d'un élément de F_1, ..., et d'un élément de F_k. On peut alors montrer que la somme $F_1 + \cdots + F_k$ est dirècte si et seulement si pour tout $i = 2, \dots, k$, $F_i \cap (\sum_{j<i} F_j) = \{0\}$.

Exercice : Soient A, B, C trois sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que la somme $A+B+C$ est dirècte si et seulement si $A \cap B = \{0\}$ et $(A+B) \cap C = \{0\}$.

Solution : Supposons $A+B+C$ dirècte. Soit $x \in A \cap B$. En écrivant que $x+0+0 = 0+x+0$ on a deux écritures dans $A+B+C$ d'un même vecteur de $A+B+C$. La somme étant dirècte c'est que $x = 0$. Donc $A \cap B = \{0\}$. De même, soit $x \in (A+B) \cap C$. Comme $x \in A+B$ il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a+b$. On a $a+b+0 = 0+0+x$ qui fournit deux écritures d'un même vecteur dans $A+B+C$. La somme étant dirècte c'est que $a = 0$, $b = 0$ et $x = 0$. Donc $(A+B) \cap C = \{0\}$.

Réciproquement, supposons que $A \cap B = \{0\}$ et que $(A+B) \cap C = \{0\}$. Soient $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ et $c, c' \in C$ tels que $a+b+c = a'+b'+c'$. Alors $(a-a')+(b-b') = c'-c$. Or $(a-a')+(b-b') \in A+B$ et $c'-c \in C$. Comme $(A+B) \cap C = \{0\}$, c'est que $c' = c$ et $(a-a')+(b-b') = 0$. En particulier, $a-a' = b'-b$. Or $a-a' \in A$ et $b'-b \in B$. Comme $A \cap B = \{0\}$, c'est que $a' = a$ et $b' = b$. $\square$

1.3 Sous espace vectoriels engendrés par un sous ensemble

Soit E un espace vectoriel muni de deux lois $+$ et $\times$, et soit A une partie (i.e. un sous ensemble) de E. Le sous espace vectoriel de E engendré par A, noté $Vect(A)$, est par définition le plus petit sous espace vectoriel de E pour l'inclusion qui contient A. Il est caractérisé par les propriétés suivantes :

(i) $Vect(A)$ est un sous espace vectoriel de E,

(ii) $A \subset Vect(A)$,

(iii) si F est un sous espace vectoriel de E et si $A \subset F$, alors $Vect(A) \subset F$.

On vérifie que $Vect(A)$ est en fait constitué des combinaisons linéaires des éléments de A. En d'autres termes :

$$Vect(A) = \left\{ t_1 x_1 + \cdots + t_k x_k, k \in \mathbb{N}, t_i \in \mathbb{R}, x_i \in A \right\} .$$

Le sous ensemble de E définit ci-dessus est bien un sous espace vectoriel de E, et il vérifie les points (i)-(iii) listés ci-dessus.

Des propriétés simples à vérifier que satisfont les espaces $Vect(A)$ sont les suivantes :
(1) Si A est un sous espace vectoriel de E, alors $Vect(A) = A$,
(2) Si A et B sont deux sous ensembles de E,

$$Vect(A \cup B) = Vect(A) + Vect(B) .$$

En ce qui concerne l'intersection,

$$Vect(A \cap B) \subset Vect(A) \cap Vect(B) .$$

Cette propriété est elle aussi facile à vérifier (par exemple à partir de la définition première). A titre de remarque, il se peut que $Vect(A \cap B) \neq Vect(A) \cap Vect(B)$. Soit par exemple, $E = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, y) \ / \ x^2 + y^2 \leq 1\}$, et $B = \{(1, 0), (0, 2)\}$. Alors $A \cap B = \{(1, 0)\}$ de sorte que $Vect(A \cap B) = \{(x, y) \ / \ y = 0\}$. Par contre $Vect(A) = Vect(B) = \mathbb{R}^2$, de sorte que $Vect(A) \cap Vect(B) = \mathbb{R}^2$.

Lorsque A est fini, par exemple lorsque $A = \{a, b, c, d\}$, alors $Vect(A) = \{t_1 a + t_2 b + t_3 c + t_4 d, t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}\}$.

Exercice : Démontrer (1) et (2) ci-dessus.

Solution : Si A est un sous espace vectoriel, alors A est clairement le plus petit sous espace vectoriel qui se contient lui-même. Donc $A = Vect(A)$. On démontre maintenant (2). Soient $k \in \mathbb{N}^\star$, $x_1, \ldots, x_k$ une famille de k vecteurs de $A \cup B$ et $t_1, \ldots, t_k$ des réels. Par définition de $A \cup B$ il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ (peut-être 0), il existe $k_2 \in \mathbb{N}$ (peut-être 0), il existe des $a_1, \ldots, a_{k_1} \in A$ et des $b_1, \ldots, b_{k_2} \in B$ tels que

$$\{x_i, i = 1, \ldots, k\} = \{a_i, i = 1, \ldots, k_1\} \cup \{b_i, i = 1, \ldots, k_2\} \ .$$

Avec la même répartition on peut écrire que $\{t_i, i = 1, \ldots, k\}$ comme $\{\lambda_i, i = 1, \ldots, k_1\} \cup \{\mu_i, i = 1, \ldots, k_2\}$. Mais alors

$$t_1 x_1 + \cdots + t_k x_k = (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_{k_1} a_{k_1}) + (\mu_1 b_1 + \cdots + \mu_{k_2} b_{k_2})$$

et donc $Vect(A \cup B) \subset Vect(A) + Vect(B)$. L'autre sens s'obtient encore plus facilement. On a $Vect(A) \subset Vect(A \cup B)$ et $Vect(B) \subset Vect(A \cup B)$. Donc $Vect(A) + Vect(B) \subset Vect(A \cup B)$.
$\square$

Exercice : On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u_1 = (1, 1, 3)$, $u_2 = (1, -1, -1)$, $v_1 = (1, 0, 1)$ et $v_2 = (2, -1, 0)$. Montrer que $Vect(u_1, u_2) = Vect(v_1, v_2)$.

Solution : On va montrer que $Vect(u_1, u_2) \subset Vect(v_1, v_2)$ et que $Vect(v_1, v_2) \subset Vect(u_1, u_2)$. Pour simplifier on ne démontre que la première inclusion. L'autre se démontre de la même manière. Pour démontrer que $Vect(u_1, u_2) \subset Vect(v_1, v_2)$ il suffit de montrer que $u_1 \in Vect(v_1, v_2)$ et que $u_2 \in Vect(v_1, v_2)$. L'équation

$$(1, 1, 3) = \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, -1, 0)$$

donne $\lambda + 2\mu = 1$, $-\mu = 1$ et $\lambda = 3$, un système dont la solution est bien donnée par $\lambda = 3$ et $\mu = -1$ (les deux dernières équations entraînent la première). On a donc $u_1 = 3v_1 - v_2$ et donc $u_1 \in Vect(v_1, v_2)$. De la même façon on vérifie que $u_2 = -v_1 + v_2$. Donc $u_2 \in Vect(v_1, v_2)$. Donc $Vect(u_1, u_2) \subset Vect(v_1, v_2)$. Comme déjà dit, l'autre inclusion se démontre de la même façon. On montre que $v_1 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2$ et que $v_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{3}{2}u_2$. $\square$

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et $f : E \to F$ une application. Par définition, on dit que f est linéaire si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
(i) $\forall x, y \in E$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$,
(ii) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $f(tx) = tf(x)$.
Ces deux propriétés se regroupent en une :
(iii) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$, $f(x+ty) = f(x) + tf(y)$.
On a donc (i)+(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). En particulier, si f est linéaire, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, tous $t_i \in \mathbb{R}$, et tous $x_i \in E$, $i = 1, \ldots, k$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} t_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} t_i f(x_i)\ .$$

On a toujours $f(0) = 0$ car $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$. On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Lorsque $F = E$, on note aussi $End(E)$ au lieu de $L(E, E)$. Les applications de $End(E)$ sont appelées endomorphismes de E.

On vérifie facilement que si E, F, G sont trois espace vectoriels, et si $f \in L(E,F)$ et $g \in L(F,G)$, alors $g \circ f \in L(E,G)$.

Indépendamment, si E et F sont deux espaces vectoriels, on définit sur $L(E,F)$ la loi interne $+$ et la loi externe $\times$ par :
$\big(f+g\big)(x) = f(x) + g(x)$,
$\big(tf\big)(x) = tf(x)$.
Alors $L(E,F)$ muni de ces deux lois est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Lorsque $F = \mathbb{R}$ on parle de forme linéaire et on note souvent $E^\star$ au lieu de $L(E,\mathbb{R})$.

Exercice : Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ les applications définies par

$$f(x,y) = (x+y, x-2y, 0) \ \text{ et } \ g(x,y) = (x+y, x-2y, 1)$$

pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que f est linéaire mais que g ne l'est pas.

Solution : Pour montrer que f est linéaire il suffit de vérifier que pour tous $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(x+\lambda x', y+\lambda y') = f(x,y) + \lambda f(x',y') \ ,$$

et donc que

$$\begin{aligned}&\big(x+\lambda x' + y + \lambda y', x + \lambda x' - 2(y+\lambda y'), 0\big) \\ &= (x+y, x-2y, 0) + \lambda \left(x'+y', x'-2y', 0\right) \ .\end{aligned}$$

C'est immédiat. On montre par ailleurs que g n'est pas linéaire par exemple en remarquant que $(2,2) = 2 \times (1,1)$ tandis que

$$g(2,2) = (4,-2,1) \neq 2 \times (2,-1,1) = 2g(1,1) \ .$$

$\square$

Exercice : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f, g \in L(E, \mathbb{R})$ deux formes linéaires sur E. Montrer que $f \times g = 0$ si et seulement si $f = 0$ ou $g = 0$.

Solution : Bien évidemment, si $f = 0$, ou $g = 0$, alors $f \times g = 0$. C'est la réciproque qui va être plus difficile à montrer. On suppose donc que $f \times g = 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe $u \in E$ tel que $f(u) \neq 0$ et qu'il existe $v \in E$ tel que $g(v) \neq 0$. Comme $f \times g = 0$ on a forcément $f(v) = 0$ et $g(u) = 0$. Mais alors

$$0 = (fg)(u + v) = f(u)g(v)$$

ce qui est impossible puisque $f(u) \neq 0$ et $g(v) \neq 0$. D'où une contradiction et donc nécessairement soit $f = 0$ (sur tout E) soit $g = 0$ (sur tout E). $\square$

Note : Le résultat cesse bien sûr d'être vrai si on ne parle plus de formes linéaires mais de fonctions quelconques. Par exemples les fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = x$ si $x \geq 0$, et $g(x) = x$ si $x \leq 0$ et $g(x) = 0$ si $x \geq 0$ ne sont pas identiquement nulles et pourtant vérifient que $f \times g = 0$.

Par définition, une application $f : E \to F$ est injective si les éléments de F ont au plus un antécédant par f. Donc f est injective si pour tous $x, y \in E$, si $f(x) = f(y)$, alors $x = y$. Toujours par définition, f est surjective si tout élément de F a au moins un antécédant. Donc f est surjective si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Pour finir, f est bijective si tout élément de F a précisément un et un seul antécédant. Par suite f est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective. Dans ce cas, lorsque f est bijective, il existe $f^{-1} : F \to E$ une application telle que $f^{-1} \circ f = Id_E$ et $f \circ f^{-1} = Id_F$.

Définition

Si E et F sont deux espaces vectoriels, et si $f \in L(E, F)$, on définit : le noyau de f, noté $Ker(f)$, par

$$Ker(f) = \left\{x \in E \ / \ f(x) = 0\right\} ,$$

et l'image de f, notée $Im(f)$, par $Im(f) = \left\{f(x) \ , \ x \text{ parcourt } E\right\}$.

On vérifie que $Ker(f)$ est un sous ensemble de E, et $Im(f)$ est un sous ensemble de F. Une application linéaire bijective de $L(E, F)$ est dite un isomorphisme de E sur F.

Théorème

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et $f \in L(E, F)$ une application linéaire de E dans F. Alors :
(i) $Ker(f)$ est un sous espace vectoriel de E et f est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0\}$;
(ii) $Im(f)$ est un sous espace vectoriel de F et f est surjective si et seulement si $Im(f) = F$.
Par suite, f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si $Ker(f) = \{0\}$ et $Im(f) = F$. Dans ce cas, l'application inverse f^{-1} est elle aussi linéaire.

Preuve : Il est clair que $Ker(f)$ est un sous espace vectoriel de E dans la mesure ou si $t, t' \in \mathbb{R}$ et $x, x' \in Kerf(f)$, alors $tx + t'x' \in Ker(f)$ puisque

$$f(tx + t'x') = tf(x) + t'f(x') \ .$$

En remarquant par ailleurs que

$$f(y) = f(x) \ \Leftrightarrow \ f(y - x) = 0 \ \Leftrightarrow \ y - x \in Ker(f)$$

on voit que f est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0\}$. On vérifie tout aussi facilement que $Im(f)$ est un sous espace vectoriel de F en remarquant comme ci-dessus que

$$tf(x) + t'f(x') = f(tx + t'x') \ .$$

Par ailleurs, il suit de la définition même d'une application surjective que f est surjective si et seulement si $Im(f) = F$. Reste à montrer que si f est un isomorphisme, alors f^{-1} est linéaire.

Preuve suite et fin : Soient $z, z' \in F$ et $t \in \mathbb{R}$. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = z$ et $f(x') = z'$. Alors

$$\begin{aligned} f^{-1}\big(z + tz'\big) &= f^{-1}\big(f(x) + tf(x')\big) \\ &= f^{-1}\big(f(x + tx')\big) \\ &= x + tx' \\ &= f^{-1}(z) + tf^{-1}(z') \end{aligned}$$

et ainsi f^{-1} est bien linéaire. D'où le théorème. CQFD

Exercice : Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels. On considère $f : E \to E$ donnée par $f(P) = P'$ pour tous $P \in E$. Montrer que f est linéaire. Déterminer son image et son noyau. L'application est-elle injective ? surjective ?

Solution : L'application est clairement linéaire par règles de dérivation : $(P_1 + \lambda P_2)' = P_1' + \lambda P_2'$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous $P_1, P_2 \in E$. Son noyau $Ker(f)$ est constitué des polynômes $P \in E$ pour lesquels $P'(x) = 0$ pour tous $x \in \mathbb{R}$. Il s'agit donc des seuls polynômes constants :

$$Ker(f) = \{P \in E \ / \ P \text{ est constant}\} \ .$$

Comme $Ker(f) \neq \{0\}$, f n'est pas injective. Par contre, tout polynôme réel est clairement la dérivée d'un autre polynôme réel : le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est la dérivée du polynôme $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$. Donc

$$Im(f) = E$$

et f est surjective. $\square$

Exercice : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f, g \in End(E)$ deux endomorphismes de E. On suppose que f et g commutent, à sa voir que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont stables par g, à savoir que $g\left(Ker(f)\right) \subset Ker(f)$ et que $g\left(Im(f)\right) \subset Im(f)$.

Solution : Il faut montrer que si $x \in Ker(f)$, alors $g(x) \in Ker(f)$ et que si $x \in Im(f)$ alors $g(x) \in Im(f)$. Soit $x \in Ker(f)$. On a

$$f\left(g(x)\right) = g\left(f(x)\right) = g(0) = 0 \ .$$

Donc on a bien que $g(x) \in Ker(f)$ si $x \in Ker(f)$. De même, si $x \in Im(f)$ alors il existe $x' \in E$ tel que $x = f(x')$. Mais alors

$$g(x) = g\left(f(x')\right) = f\left(g(x')\right) = f(x'')$$

avec $x'' = g(x')$. Donc $g(x) \in Im(f)$ si $x \in Im(f)$. $\square$

Exercice : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in End(E)$ un endomorphisme de E. On note $E_1 = Ker(f)$, $E_2 = Ker(f - Id_E)$ et $E_3 = Ker(f + Id_E)$, où Id_E est l'application linéaire identité de E dans E (l'endomorphisme identité de E). Montrer que E_1, E_2 et E_3 sont en somme dirècte.

Solution : Il faut montrer (cf. cours précédents) que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et que $(E_1 + E_2) \cap E_3 = \{0\}$. Soit $x \in E_1 \cap E_2$. Alors $f(x) = 0$ et $(f - Id_E)(x) = f(x) - x = 0$ de sorte que $x = 0$. Donc $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Soit maintenant $x \in (E_1 + E_2) \cap E_3$. Comme $x \in E_1 + E_2$ il existe $y \in E_1$ et $z \in E_2$ tels que $x = y + z$. On a alors $f(y) = 0$, $f(z) - z = 0$ et $f(x) + x = 0$. Comme $f(x) = f(y) + f(z) = f(z)$, on a donc

$$0 = f(z) + x = f(z) - z + y + 2z = y + 2z \ .$$

Soit $y = -2z$. Comme $f(y) = 0$ on devrait aussi avoir $f(z) = 0$ par linéarité de f. Or $f(z) - z = 0$, donc $z = 0$. Puis ensuite, puisque $y = -2z$, on récupère que $y = 0$. Au final, $x = 0$ et donc on bien aussi que $(E_1 + E_2) \cap E_3 = \{0\}$. $\square$

3. Familles libres, génératrices, et bases

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille composée de n vecteurs de E. Par définition, on dit que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre si la seule combinaison linéaire de la famille qui soit nulle est la combinaison linéaire nulle. Donc $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre si

$$\forall t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}, t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \cdots = t_n = 0 \ .$$

Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Remarque : Une famille qui contient le vecteur nul est forcément liée.

Toujours par définition, on dit que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice si tout x de E s'écrit comme combinaison linéaire des $e_1, \ldots, e_n$. Donc $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice si

$$\forall x \in E, \exists t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R} \text{ tels que } x = t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n \ .$$

Pour finir, on dit que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E si tout x de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des $e_1, \ldots, e_n$. Donc $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E si

$$\forall x \in E, \exists! t_1 \in \mathbb{R}, \ldots, \exists! t_n \in \mathbb{R} \text{ tels que } x = t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n \ .$$

Théorème

Une famille est une base si et seulement si elle est à la fois libre et génératrice.

Preuve : Supposons que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de$E$. Il est évident que $(e_1, \ldots, e_n)$ est alors génératrice pour E. Soient maintenant des $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$. Supposons que $t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n = 0$. Comme on a aussi que

$$0 = 0e_1 + \cdots + 0e_n \ ,$$

l'unicité de la décomposition donne que forcèment $t_1 = 0, t_2 = 0, \ldots, t_n = 0$. Donc $(e_1, \ldots, e_n)$ est aussi une famille libre et base $\Rightarrow$ libre et génératrice.

Preuve suite et fin : Supposons à l'inverse que $(e_1, \dots, e_n)$ est à la fois libre et génératrice. Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice, $\forall x \in E$, $\exists t_1 \in \mathbb{R}, \dots, \exists t_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = t_1 e_1 + \dots + t_n e_n$. Reste à montrer l'unicité des $t_1, \dots, t_n$. Supposons pour cela qu'on ait aussi que $x = \tilde{t}_1 e_1 + \dots + \tilde{t}_n e_n$. Alors

$$t_1 e_1 + \dots + t_n e_n = \tilde{t}_1 e_1 + \dots + \tilde{t}_n e_n \ ,$$

d'où l'on déduit facilement que

$$(\tilde{t}_1 - t_1) e_1 + \dots + (\tilde{t}_n - t_n) e_n = 0 \ .$$

Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre, cela implique que $\tilde{t}_1 - t_1 = 0, \dots, \tilde{t}_n - t_n = 0$. D'où l'unicité. CQFD

Dire que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E c'est donc dire que $\forall x \in E$, $\exists! t_1 \in \mathbb{R}, \dots, \exists! t_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = t_1 e_1 + \dots + t_n e_n$. Les t_i sont appelés coordonnées de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Dire qu'un vecteur x a pour coordonnées $t_1, \dots, t_n$ dans une base $(e_1, \dots, e_n)$ c'est donc précisément dire que $x = t_1 e_1 + \dots + t_n e_n$.

Exercice : Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes réels. On considère les polynômes P, Q, R de $\mathbb{R}[X]$ donnés par $P(X) = 16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$, $Q(X) = 8X^3 - 5X^2 + 1$ et $R(X) = X^2 + 7X - 2$. Montrer que P est une combinaison linéaire de Q et R, à savoir que $P \in Vect(\{Q, R\})$.

Solution : En raison du terme en X^3, si P est une combinaison linéaire de Q et R alors forcément que $P = 2Q + \lambda R$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. La comparaison des termes en X^2 donne que forcément $\lambda = 3$. Donc la combinaison linéaire candidate est

$$P = 2Q + 3R \ .$$

Les deux polynômes P et $2Q + 3R$ sont tous deux de degré 3 et ont les mêmes coeeficients des termes en X^3 et X^2 en raison de ce qui a été dit jusqu'ici. Reste à vérifier qu'ils ont les mêmes coefficients des termes en X et constants. C'est bien le cas car $21 = 2 \times 0 + 3 \times 7$ tandis que $-4 = 2 \times 1 + 3 \times (-2)$. $\square$

Exercice : Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes réels et $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\text{degré}P_1 < \text{degré}P_2 < \cdots < \text{degré}P_n \ .$$

Montrer que $(P_1, \ldots, P_n)$ est alors une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

Solution : Supposons que la famille soit liée. Alors il existe des $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = 0$ (le polynôme nul). Le terme de plus haut degré du polynôme $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$ est donné par $\lambda_n P_n$. Comme il doit être nul c'est que $\lambda_n = 0$. Mais alors $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_{n-1} P_{n-1} = 0$ et on recommence le raisonnement. Le terme de plus haut degré du polynôme $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_{n-1} P_{n-1}$ est donné par $\lambda_{n-1} P_{n-1}$. Comme il doit être nul c'est que $\lambda_{n-1} = 0$. On recommence encore le raisonnement et ainsi de suite jusqu'à annuler tous les λ_i. La famille $(P_1, \ldots, P_n)$ est bien une famille libre de $\mathbb{R}[X]$. $\square$

Remarques : (1) Toute sur famille d'une famille génératrice est génératrice.
(2) Toute sous famille d'une famille libre est libre.

Théorème (Théorème fondamental de la théorie de la dimension.)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Si E possède une famille génératrice composée de k vecteurs, $k \in \mathbb{N}$, alors toute famille libre de E a au plus k vecteurs. En d'autres termes, une famille libre a forcément moins d'éléments qu'une famille génératrice.

Dans la suite on écrira avec un léger abus de notation $Vect(e_1, \dots, e_k)$ au lieu de $Vect(\{e_1, \dots, e_k\})$.

Preuve : On démontre le théorème par récurrence sur k. Si $k = 1$, le résultat est immédiat. Il existe en effet un vecteur e de E qui est tel que tout vecteur de E s'écrit sous la forme te, $t \in \mathbb{R}$. On en déduit que si x et y sont deux vecteurs de E, alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que soit $y = tx$, soit $x = ty$. En particulier, soit $y - tx = 0$ soit $x - ty = 0$, et donc, toute famille composée de plus de deux vecteurs est liée.

On suppose maintenant le résultat vrai à l'ordre k, et on le démontre à l'ordre $k + 1$.

Preuve suite : Soit $(e_1, \ldots, e_{k+1})$ une famille génératrice, et soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille libre. On veut montrer que nécessairement $p \leq k+1$. Puisque la famille $(e_1, \ldots, e_{k+1})$ est génératrice, les x_i, $i = 1, \ldots, p$, s'écrivent comme combinaison linéaire des e_j, $j = 1, \ldots, k+1$. Il existe donc des $\lambda_i^j \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $i = 1, \ldots, p$,

$$x_i = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_i^j e_j$$

Si $\lambda_1^1 = \cdots = \lambda_p^1 = 0$, alors les x_i sont en fait dans l'espace vectoriel $Vect(e_2, \ldots, e_{k+1})$. Par définition même de cet espace, la famille $(e_2, \ldots, e_{k+1})$ est génératrice pour cet espace. Cette famille comportant k vecteurs, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence qui nous donne que nécessairement $p \leq k$. Donc, en particulier, $p \leq k+1$. Supposons maintenant que l'un des λ_i^1 est non nul, $i = 1, \ldots, p$.

Preuve suite et fin : Sans perdre en généralité, on peut supposer que $\lambda_1^1 \neq 0$. Si on pose $\lambda_i = \lambda_i^1/\lambda_1^1$, alors pour tout $i = 2, \ldots, p$,

$$x_i - \lambda_i x_1 \in Vect(e_2, \ldots, e_{k+1})$$

Par ailleurs, la famille $(x_2 - \lambda_2 x_1, \ldots, x_p - \lambda_p x_1)$ est toujours libre. En effet, si

$$t_1(x_2 - \lambda_2 x_1) + \cdots + t_{p-1}(x_p - \lambda_p x_1) = 0$$

alors

$$(-\sum_{i=1}^{p-1} t_i \lambda_{i+1})x_1 + t_1 x_2 + \cdots + t_{p-1} x_p = 0$$

et puisque la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre, on doit avoir $t_1 = \cdots = t_{p-1} = 0$. L'espace vectoriel $Vect(e_2, \ldots, e_{k+1})$ admet, par définition même, $(e_2, \ldots, e_{k+1})$ comme famille génératrice. Cette famille comportant k vecteurs, on peut là encore appliquer l'hypothèse de récurrence. On trouve alors que $p - 1 \leq k$, et donc que $p \leq k + 1$. D'où le fait que si la propriété est vraie à l'ordre k, alors elle l'est aussi à l'ordre $k + 1$. Par récurrence on a ainsi démontré le théorème. CQFD

Plusieurs propriétés importantes suivent de ce théorème fondamental de la théorie de la dimension. Il en va ainsi de la propriété suivante.

Théorème

Si un espace vectoriel E possède une base composée de n vecteurs, $n \in \mathbb{N}$, alors toute autre base de E est elle aussi composée d'exactement n vecteurs.

Preuve : Si $(e_1, \ldots, e_n)$ et si $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_p)$ sont deux bases de E, on veut montrer que $n = p$. Une base étant à la fois libre et génératrice : (i) $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre et $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_p)$ est génératrice, et (ii) $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice et $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_p)$ est libre. Du théorème fondamental de la théorie de la dimension et de (i) on tire que $n \leq p$. Du théorème fondamental de la théorie de la dimension et de (ii) on tire que $p \leq n$. Donc $n = p$. CQFD

Cette propriété permet de définir la notion de dimension.

Définition

On dit d'un espace vectoriel E qu'il est de dimension finie n s'il possède une base composée de n vecteurs. Toute autre base de E est alors composée elle aussi de n vecteurs. On note parfois $dim(E)$ la dimension de E.

Par exemple, $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2 car $\{(1,0);(0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Ou encore $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 car $\{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Etc. $\mathbb{R}^n$ est de dimension n.

L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n est de dimension $n+1$ car $\left\{1, X, X^2, \ldots, X^{n-1}, X^n\right\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. La famille est génératrice par définition des polynômes. Elle est libre car si un polynôme est nul sur $\mathbb{R}$ alors tous ses coefficients sont nuls (un polynôme de degré n a au plus n racines réelles, sauf s'il s'agit du polynôme nul).

On a vu que toute sur famille d'une famille génératrice est encore une famille génératrice et que toute sous famille d'une famille libre est encore une famille libre. Le lemme qui suit va dans "l'autre sens".

Lemme

Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre mais non génératrice, alors il existe un vecteur $x_{n+1} \in E$ pour lequel $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ est encore une famille libre. A l'inverse si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille génératrice mais n'est pas libre, alors il existe un $i \in \{1, \ldots, n\}$ pour lequel $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ est encore génératrice. En d'autres termes, si une famille libre n'est pas génératrice, alors on peut lui rajouter un vecteur convenablement choisi de sorte que la famille ainsi augmentée reste libre. Et si une famille génératrice n'est pas libre, alors on peut lui enlever un vecteur convenablement choisi de sorte que la famille ainsi diminuée reste génératrice.

Preuve : (1) Supposons que $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre mais non génératrice. Dire que $(x_1, \dots, x_n)$ n'est pas génératrice c'est dire, par définition, que $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) \neq E$. Donc il existe $x_{n+1} \in E$ tel que $x_{n+1} \notin \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ des réels tels que

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} = 0 \ .$$

Forcément $\lambda_{n+1} = 0$ car sinon,

$$x_{n+1} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}\right) x_1 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) x_n \ ,$$

et donc on aurait que $x_{n+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, ce qui est faux par construction. Comme $\lambda_{n+1} = 0$ alors

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \ ,$$

et comme $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, on en déduit qu'on a aussi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. La famille $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ est donc aussi une famille libre.

Preuve suite et fin : (2) Supposons que $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille génératrice mais non libre. Dire que $(x_1, \ldots, x_n)$ n'est pas libre c'est dire, par définition, qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, non tous nuls, tels que

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \ .$$

Supposons par exemple que ce soit λ_n qui est non nul. Alors

$$x_n = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right) x_1 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right) x_{n-1} \ ,$$

et donc $x_n \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Par suite :

$$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \ .$$

Dire que $(x_1, \ldots, x_n)$ est génératrice c'est dire que l'on a que $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = E$. Donc, d'après l'équation ci-dessus, $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = E$ et $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ est aussi génératrice. CQFD.

Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n. Toute famille libre de E composée de n vecteurs est une base de E. Toute famille génératrice de E composée de n vecteurs est une base de E.

En d'autre termes, en dimension n, pour montrer qu'une famille composée de n vecteurs est une base de E il suffit de montrer soit qu'elle est libre, soit qu'elle est génératrice (et si elle n'est pas composée d'exactement n vecteurs elle n'a aucune chance d'être une base puisque les bases ont toujours autant de vecteurs que la dimension).

Preuve : Soit $n = \dim(E)$ et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Supposons que $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre de E. Si elle n'était pas génératrice on pourrait fabriquer, en vertu du lemme précédent, une famille libre $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ de E ayant $n+1$-vecteurs. Or, d'après le théorème fondamental de la théorie de la dimension, sachant que $(e_1, \dots, e_n)$ est en particulier génératrice, on devrait avoir que $(x_1, \dots, x_{n+1})$ a moins de vecteurs que $(e_1, \dots, e_n)$, ce qui est faux. Donc $(x_1, \dots, x_n)$ est à la fois libre et génératrice, donc une base.

Si on suppose au départ que $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice, on montre avec le même genre de raisonnement qu'elle est obligatoirement aussi une famille libre. CQFD.

Exercice : Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degrés inférieurs ou égaux à n. Pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ on note P_k le polynôme de E donné par $P_0(X) = 1$ et $P_k(X) = X^k + Q_k[X]$ pour $k \geq 1$ où les Q_k sont des polynômes réels quelconques donnés de degrés degré$Q_k \leq k - 1$. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E.

Solution : On a $\dim(E) = n + 1$ et $\mathrm{Card}\{P_0, P_1, \ldots, P_n\} = n + 1$. Il suffit donc de montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une famille libre de E. Or degré$P_k = k$ et donc

$$\text{degré} P_0 < \text{degré} P_1 < \cdots < \text{degré} P_n \ .$$

On l'a déjà vu, une telle relation entraîne que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est libre. D'où le résultat. $\square$

Théorème (Théorème de la base incomplète)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Si $(x_1, \ldots, x_k)$ est une famille libre de E, donc $k \leq n$, elle peut être complétée par $n-k$ vecteurs de E pour en faire une base de E. En d'autres termes, toute famille libre dans un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée en une base de l'espace par adjonction de vecteurs convenables.

Preuve : Il suffit de raisonner par induction à partir des résultats précédents. Si $k < n$ alors $(x_1, \ldots, x_k)$ ne peut être génératrice d'après le théorème fondamental de la théorie de la dimension. Le lemme précédent donne l'existence de $x_{k+1} \in E$ tel que $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})$ est encore libre. Si $k+1 = n$ le théorème précédent permet d'affirmer que $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})$ est une base de E. Le théorème de la base incomplète est alors démontré. Sinon $k+1 < n$ et $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})$ ne peut de nouveau pas être génératrice d'après le théorème fondamental de la théorie de la dimension.

Preuve suite et fin : On applique alors le lemme précédent qui donne l'existence de $x_{k+2} \in E$ tel que $(x_1, \ldots, x_{k+1}, x_{k+2})$ est encore libre. Si $k + 2 = n$, la preuve s'arrête. Sinon $k + 2 < n$ et on continue à ajouter des vecteurs jusqu'à atteindre n vecteurs et donc obtenir une base de E. CQFD.

4. Sous espaces vectoriels et dimension

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous espace vectoriel de E. Alors F est aussi de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$ avec égalité si et seulement si $F = E$. Le résultat s'obtient facilement en remarquant que toute famille libre de F est aussi une famille libre de E. Les familles libres de F ont donc au plus $\dim(E)$ vecteurs, ce qui prouve (penser au lemme précédent) que F est de dimension finie et que $\dim(F) \leq \dim(E)$. On remarque alors facilement que $\dim(F) = \dim(E)$ si et seulement si $F = E$ (base de $F \Rightarrow$ famille libre de $F \Rightarrow$ famille libre de E ayant autant de vecteurs que la dimension de $E \Rightarrow$ base de E).

Une autre affirmation simple à vérifier est que si E et F sont deux espaces vectoriels de dimensions finies, alors $E \times F$ possède une structure naturelle d'espace vectoriel de dimension finie $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$. La structure d'espace vectoriel est donnée par les opérations

$$(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v') \quad \text{et} \quad t \times (u, v) = (tu, tv) \ ,$$

et on remarque que si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de E et $(v_1, \ldots, v_q)$ est une base de F, alors la famille composée des vecteurs $(u_1, 0), \ldots, (u_p, 0), (0, v_1), \ldots, (0, v_q)$ est une base de $E \times F$.

Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soient F_1, F_2 deux sous espaces vectoriels de E de dimensions finies. Alors $F_1 + F_2$ est encore de dimension finie, et

$$dim(F_1 + F_2) = dim(F_1) + dim(F_2) - dim(F_1 \cap F_2) \ .$$

En particulier, F_1 et F_2 sont en somme dirècte, à savoir on a $F1 \oplus F_2$, si et seulement si $dim(F_1 + F_2) = dim(F_1) + dim(F_2)$.

Preuve : L'intersection $F_1 \cap F_2$ est un sous espace vectoriel de E de dimension finie (puisque sous espace aussi de F_1 et F_2). Soit $(x_1, \ldots, x_k)$ une base de $F_1 \cap F_2$. Du théorème de la base incomplète pour l'inclusion $F_1 \cap F_2 \subset F_1$ on tire l'existence de vecteurs $x_{k+1}, \ldots, x_m$ dans F_1 tels que $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m)$ est une base de F_1, et du théorème de la base incomplète pour l'inclusion $F_1 \cap F_2 \subset F_2$, on tire l'existence de vecteurs $\tilde{x}_{k+1}, \ldots, \tilde{x}_n$ dans F_2 tels que $(x_1, \ldots, x_k, \tilde{x}_{k+1}, \ldots, \tilde{x}_n)$ est une base de F_2.

Preuve suite : On affirme alors que la famille $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m, \tilde{x}_{k+1}, \dots, \tilde{x}_n)$ est une base de $F_1 + F_2$. Une telle proposition suffit à démontrer le théorème puisque, dans ce cas,

$$dim(F_1 + F_2) = m + n - k \ .$$

Pour montrer que $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m, \tilde{x}_{k+1}, \dots, \tilde{x}_n)$ est une base de $F_1 + F_2$ on montre que la famille est à la fois libre et est génératrice pour $F_1 + F_2$. Le fait que la famille soit génératrice pour $F_1 + F_2$ est une évidence puisqu'elle contient les bases de F_1 et de F_2. Reste donc à montrer que cette famille est libre.

Preuve suite encore : Supposons que

$$\sum_{i=1}^{m} t_i x_i + \sum_{j=k+1}^{n} \tilde{t}_j \tilde{x}_j = 0 \ .$$

Alors

$$\sum_{i=1}^{m} t_i x_i = - \sum_{j=k+1}^{n} \tilde{t}_j \tilde{x}_j \in F_1 \cap F_2 \ .$$

On en déduit que $\tilde{t}_j = 0$ pour $j = k+1, \ldots, n$ car si $\sum_{j=k+1}^{n} \tilde{t}_j \tilde{x}_j \in F_1 \cap F_2$, et comme $(x_1, \ldots, x_k)$ est une base de $F_1 \cap F_2$, on obtient qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{j=k+1}^{n} \tilde{t}_j \tilde{x}_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \ .$$

Et comme $(x_1, \ldots, x_k, \tilde{x}_{k+1}, \ldots, \tilde{x}_n)$ est libre, c'est que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = \tilde{t}_{k+1} = \cdots = \tilde{t}_n = 0$. Maintenant, si les $\tilde{t}_j = 0$ pour $j = k+1, \ldots, n$, alors $\sum_{i=1}^{m} t_i x_i = 0$. Mais comme $(x_1, \ldots, x_m)$ est aussi une famille libre, c'est que $t_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, m$.

Preuve suite et fin : En particulier, on a montré que la seule combinaison linéaire de la famille

$$(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m, \tilde{x}_{k+1}, \ldots, \tilde{x}_n)$$

qui soit nulle, est la combinaison linéaire nulle. La famille

$$(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m, \tilde{x}_{k+1}, \ldots, \tilde{x}_n)$$

est ainsi libre. Elle est donc à la fois génératrice pour $F_1 + F_2$ et libre, ce qui prouve qu'il s'agit bien d'une base de $F_1 + F_2$. CQFD

Exercice : Soient F_1, F_2 deux hyperplans d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n (un hyperplan d'un espace vectoriel de dimension n est un sous espace vectoriel de dimension $n-1$, soit un de moins). Montrer que $F_1 \cap F_2 \neq \{0\}$ dès que $n \geq 3$. Que se passe-t-il lorsque $n = 2$?

Solution : Supposons $n \geq 3$. On a

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2) \ .$$

On raisonne par contradiction et on suppose que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Alors $\dim(F_1 \cap F_2) = 0$. On aurait donc

$$\dim(F_1 + F_2) = n - 1 + n - 1 = 2(n-1) \ .$$

Comme $F_1 + F_2 \subset E$ on a $\dim(F_1 + F_2) \leq n$. Or $n < 2(n-1)$ dès que $n \geq 3$. D'où une contradiction et le résultat pour $n \geq 3$. Lorsque $n = 2$ le résultat cesse d'être vrai. Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ l'axe des x et l'axe des y sont deux hyperplans d'intersection réduite au vecteur nul. $\square$

On rappelle qu'un isomorphisme d'un espace vectoriel E sur un espace vectoriel F est une application linéaire bijective de E sur F.

Théorème

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f \in L(E, F)$ une application linéaire de E dans F. Si f est injective et si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre de E, alors $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ est une famille libre de F. Si f est surjective et si $(x_1, \ldots, x_n)$ est génératrice pour E, alors $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ est génératrice pour F. En particulier, si f est un isomorphisme et si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E, alors $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ est une base de F.

En d'autres termes, une application linéaire injective envoie les familles libres sur des familles libres, une application linéaire surjective envoie les familles génératrices sur des familles génératrices et un isomorphisme envoie les bases sur des bases.

Preuve : (1) Supposons que f est injective et que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) = 0 \ .$$

Alors $f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) = 0$ et donc $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme f est injective $Ker(f) = \{0\}$ et il s'ensuit que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$, et comme $(x_1, \dots, x_n)$ est libre on en déduit que $\lambda 1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Par suite $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est une famille libre de F.

(2) Supposons que f est surjective et que $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille génératrice de E. Comme f est surjective, tout $y \in F$ s'écrit $y = f(x)$ pour un certain $x \in E$. Comme $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice pour E, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$. Par suite

$$y = \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \ .$$

On en déduit que $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est génératrice pour F.

(3) Qu'un isomorphisme envoie les bases sur des bases est une conséquence de (1) et (2). CQFD

Corollaire

Si deux espaces vectoriels sont isomorphes, et l'un de ces espaces est de dimension finie, alors l'autre l'est aussi et les deux espaces ont même dimension.

Preuve : Supposons qu'il existe $f \in L(E, F)$ un isomorphisme de E sur F, et supposons que E est de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Comme f est un isomorphisme, donc injective et surjective, $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre et génératrice pour F. Donc une base de F. Donc F est aussi de dimension finie et $\dim(F) = \dim(E)$. CQFD.

Définition

On appelle rang d'une application linéaire f, et on note $Rg(f)$, la dimension de l'espace $Im(f)$.

Théorème (Théorème du rang)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, et soit $f \in L(E, F)$ une application linéaire de E dans F. Alors

$$dimKer(f) + Rg(f) = dim(E)$$

où $Ker(f)$ est le noyau de f, et $Rg(f) = dim\,(Im(f))$ son rang.

Un moyen mnémotechnique pour se souvenir qu'il s'agit bien de $\dim E$ à droite de l'équation, et non de $\dim(F)$, est qu'on peut toujours augmenter F (une application linéaire de E dans F est aussi une application linéaire de E dans F' si F' est un espace vectoriel qui contient F) alors qu'on ne peut pas a priori augmenter E.

Preuve : Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de $Ker(f)$. On complète cette base par des vecteurs $(e_{k+1}, \dots, e_n)$ pour obtenir une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Une telle opération est toujours possible en vertue du théorème de la base incomplète.

On prétend maintenant que la famille $\big(f(e_{k+1}), \dots, f(e_n)\big)$ est une base de $Im(f)$. Tout d'abord, on constate facilement que cette famille est génératrice pour $Im(f)$. En effet, pour tout $y \in Im(f)$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$ (par définition même de $Im(f)$). Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, il existe des t_i tels que

$$x = t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n \ .$$

Mais alors

$$y = f(x) = t_{k+1} f(e_{k+1}) + \cdots + t_n f(e_n)$$

puisque $f(e_i) = 0$ si $i = 1, \dots, k$. Or y est quelconque, et donc $\big(f(e_{k+1}), \dots, f(e_n)\big)$ est une famille génératrice de $Im(f)$. On affirme par ailleurs que cette famille est libre.

Preuve suite et fin : En effet, si

$$t_{k+1}f(e_{k+1}) + \cdots + t_n f(e_n) = 0$$

alors

$$f(t_{k+1}e_{k+1} + \cdots + t_n e_n) = 0$$

et donc $t_{k+1}e_{k+1} + \cdots + t_n e_n \in Ker(f)$. Comme $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base de $Ker(f)$, il devrait ainsi exister des $t_1, \ldots, t_k$ tels que

$$t_{k+1}e_{k+1} + \cdots + t_n e_n = t_1 e_1 + \cdots + t_k e_k$$

soit encore tels que

$$(-t_1)e_1 + \cdots + (-t_k)e_k + t_{k+1}e_{k+1} + \cdots + t_n e_n = 0 \ .$$

Une telle relation, puisque $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre, impose $t_1 = \cdots = t_n = 0$. La famille $\big(f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)\big)$ est donc bien libre.

On déduit de tout cela que $\big(f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)\big)$ est une base de $Im(F)$. Il s'ensuit que $dimIm(f) = n - k$, et on a donc bien que $dimKer(f) + Rg(f) = dimE$ (i.e. que $n = k + (n-k)$). Le théorème est démontré. CQFD

Proposition

On a toujours $Rg(f) \leq \min(dim(E), dim(F))$. *Par ailleurs f est surjective si et seulement si* $Rg(f) = dim(F)$. *Enfin f est injective si et seulement si* $Rg(f) = dim(E)$.

Preuve : Les deux premières affirmations sont évidentes. La trosième suit du théorème du rang sachant que $\mathrm{Rg}(f) = \dim(E) \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0\} \Leftrightarrow f$ est injective. CQFD

Corollaire

Soit E un $\mathbb{R}$*- espace vectoriel de dimension finie et* $f \in End(E)$. *Alors f est un isomorphisme de E sur E si et seulement si f est injective. De même, f est un isomorphisme de E sur E si et seulement si f est surjective.*

Preuve : Lorsque $E = F$, $\mathrm{Rg}(f) = \dim(F) \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ et donc f injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow f$ isomorphisme.

Exercice : Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes réels de degrés inférieurs ou égaux à n. On considère l'endomorphisme f de E donné pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par $f(P)(X) = P(X+1) - P(X)$. Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.

Solution : Pour tout $P \in E$, $P(X+1) - P(X)$ est encore un polynôme et son degré est inférieur ou égale à degré$P - 1$. On a donc bien que $f : E \to E$ et on vérifie facilement par ailleurs que f est linéaire. Supposons maintenant que $P \in Ker(f)$. Alors $P(x+1) = P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Fixons un $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque. Alors

$$Q(X) = P(X) - P(x_0)$$

est un polynôme qui a pour zéros : x_0, $x_0 + 1$, $x_0 + 2$, $x_0 + 3$ etc. puisque $P(x_0 + 1) = P(x_0)$, $P(x_0 + 2) = P(x_0 + 1) = P(x_0)$ etc. Donc Q serait un polynôme de degré inférieur ou égale à n qui aurait une infinité de zéros. C'est impossible sauf si $Q = 0$ est le polynôme nul. Mais alors P est un polynôme constant. A l'inverse, tout polynôme constant vérifie bien que $P(X+1) = P(X)$. Donc

$$Ker(f) = \{P \in E \ / \ P \text{ est constant}\} \ .$$

On cherche maintenant à déterminer $Im(f)$. On l'a déjà dit, on a forcément $Im(f) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. En vertue du théorème du rang,

$$\dim Ker(f) + \dim Im(f) = \dim(E)$$

Comme $\dim Ker(f) = 1$, c'est que $\dim Im(f) = \dim(E) - 1$. Or $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = \dim(E) - 1$. Donc

$$Im(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X] \ .$$

□

Exercice : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Montre qu'il existe un endomorphisme $f \in End(E)$ vérifiant $Ker(f) = Im(f)$ si et seulement si n est pair.

Solution : Si f existe alors avec le théorème du rang

$$n = \dim E = \dim Ker(f) + \dim Im(f) = 2 \dim Ker(f)$$

et donc n est pair. Réciproquement si $n = 2k$, on considère $(e_1, \dots, e_{2k})$ une base de E et l'endomorphisme $f \in End(E)$ défini par $f(e_i) = e_{k+i}$ pour tout $1 \leq i \leq k$ et $f(e_i) = 0$ pour tout $i = k+1, \dots 2k$. Alors $Ker(f) = Im(f) = Vect(e_{k+1}, \dots, e_{2k})$. □

6. Projecteurs

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et E_1, E_2 deux sous espaces vectoriels de E. On dit que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E si

$$E = E_1 \oplus E_2 \ .$$

On appelle alors projection (ou projecteur) sur E_1 parallèlement à E_2 l'endomorphisme $p \in End(E)$ de E donné par

$$p : \begin{cases} E = E_1 \oplus E_2 \to E \\ x = x_1 + x_2 \to x_1 \end{cases}$$

On vérifie facilement que si p est une projection alors forcément $p \circ p = p$. En fait la condition est aussi suffisante.

Théorème

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $p \in End(E)$ un endomorphisme de E. Alors p est une projection si et seulement si $p \circ p = p$. Les sous espaces $Ker(p)$ et $Im(p)$ sont alors supplémentaires et p est la projection sur $Im(p)$ parallèlement à $Ker(p)$.

Preuve : On a déjà dit que si p est une projection alors $p \circ p = p$. Reste donc à montrer que si $p \circ p = p$ alors $Ker(p)$ et $Im(p)$ sont supplémentaires et p est la projection sur $Im(p)$ parallèlement à $Ker(p)$. Pour tout $x \in E$ on a que

$$x = (x - p(x)) + p(x)$$

et $x - p(x) \in Ker(p)$ puisque $p \circ p = p$ tandis que $p(x) \in Im(p)$. Donc $E = Ker(p) + Im(p)$. Pour montrer que la somme est dirècte il suffit de montrer que $Ker(p) \cap Im(p) = \{0\}$. Si $x \in Ker(p) \cap Im(p)$ alors $p(x) = 0$ et $x = p(y)$ pour un certain $y \in E$. Comme $p \circ p = p$, $0 = p(x) = (p \circ p)(y) = p(y) = x$ et donc $Ker(p) \cap Im(p) = \{0\}$. Donc

$$E = Ker(f) \oplus Im(f)$$

avec la décomposition $x = (x - p(x)) + p(x)$. Clairement $p : x \to p(x)$ est alors la projection sur $Im(p)$ parallèlement à $Ker(p)$. CQFD.

Exercice : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p_1, p_2 deux projections non nulles et distinctes. Montrer que (p_1, p_2) est une famille libre de $End(E)$.

Solution : Si (p_1, p_2) n'est pas libre alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $p_2 = \lambda p_1$ ou $p_1 = \lambda p_2$. Quitte à intervertir p_1 et p_2 on peut supposer $p_2 = \lambda p_1$. Mais alors $p_2 \circ p_2 = \lambda^2 p_1 \circ p_1$ et donc $p_2 = \lambda^2 p_1$ puisque $p_1 \circ p_1 = p_1$ et $p_2 \circ p_2 = p_2$. Par suite $\lambda^2 p_1 = \lambda p_1$. Comme p_1 est non nulle, il existe $x \in E$ tel que $p_1(x) \neq 0$. Mais alors $\lambda^2 p_1(x) = \lambda p_1(x)$, puis $\lambda^2 = \lambda$ et enfin $\lambda = 1$ (puisque p_2 est non nulle elle aussi on a $\lambda \neq 0$). Donc $p_2 = p_1$. Or p_1 et p_2 sont distinctes. Une contradiction. Donc, forcément, (p_1, p_2) est libre. $\square$

Exercice : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $u \in End(E)$ et $p \in End(E)$ une projection. Montrer que u et p commutent si et seulement si $Ker(p)$ et $Im(p)$ sont stables par u, i.e si et seulement si $u\,(Ker(p)) \subset Ker(p)$ et $u\,(Im(p)) \subset Im(p)$.

Solution : Supposons que u et p commutent, donc que $u \circ p = p \circ u$. Soit $x \in Ker(p)$. Alors

$$p\left(u(x)\right) = u\left(p(x)\right) = u(0) = 0$$

et donc $u(x) \in Ker(p)$ pour tout $x \in Ker(p)$. En d'autres termes, $Ker(p)$ est stable par u. De même, soit $y \in Im(p)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. Mais alors

$$u(y) = u\left(p(x)\right) = p\left(u(x)\right) = p(z)$$

avec $z = u(x)$ dans E. Donc $u(y) \in Im(p)$. En d'autres termes, $Im(p)$ est lui aussi stable par u. Réciproquement, supposons que $Ker(p)$ et $Im(p)$ sont stables par u. Comme p est une projection on a $E = Ker(p) \oplus Im(p)$ (cf. le théorème précédent) et p est la projection sur $Im(p)$ parallèlement à $Ker(p)$. Soit $x \in E$ quelconque. Il existe $y \in Ker(p)$ et $z \in Im(p)$ tels que $x = y + z$. Comme $p(y) = 0$ et $p(z) = z$ on a

$$u\left(p(x)\right) = u\left(p(y)\right) + u\left(p(z)\right) = u(0) + u(z) = u(z)\ .$$

Par ailleurs,

$$p\left(u(x)\right) = p\left(u(y)\right) + p\left(u(z)\right) = 0 + u(z) = u(z)$$

puisque p est la projection sur $Im(p)$ parallèlement à $Ker(p)$ et puisque par hypothèse de stabilité, $u(y) \in Ker(p)$ et $u(z) \in Im(p)$. Donc, au final, $u\left(p(x)\right) = p\left(u(x)\right)$ pour tout $x \in E$ et ainsi p et u commutent. $\square$

Fin du chapitre 1