Algèbre bilinéaire et Intégration

par

Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise

Année 2018-2019

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $u \in End(E)$ un endomorphisme de E. On suppose que u est symétrique et que

$$\langle u(x), x \rangle = 0$$

pour tout $x \in E$. Montrer que u est l'endomorphisme nul.

Exercice : 2 Soit A une matrice réelle symétrique. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^p = 0$. Montrer que A est la matrice nulle.

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soient $u, v \in End(E)$ deux endomorphismes de E. Montrer que $(v \circ u)^\star = u^\star \circ v^\star$. On suppose maintenant que u et v sont symétriques. Montrer que $v \circ u$ est symétrique si et seulement si $v \circ u = u \circ v$.

Exercice 4 : (1) Montrer que si une matrice réelle carrée A est diagonalisable, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de A et si $k_1, \ldots, k_p$ sont les dimensions des espaces propres correspondants, alors sa trace $tr(A)$ est donnée par $tr(A) = \sum_{i=1}^{p} k_i \lambda_i$.

(2) Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Calculer les déterminants de $A + 3Id_3$ et $A - 3Id_3$, où Id_3 est la matrice identité 3×3. Montrer que A est diagonalisable. Calculer la trace $tr(A)$ de A. En déduire quelles sont les valeurs propres de A.

(3) Trouver une matrice orthogonale P pour laquelle ${}^{t}PAP$ est diagonale.

Exercice 5 : Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées $n \times n$.

(1) Soit $M = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quels sont les coefficients b_{ij} de la matrice ${}^tMM$? En déduire que

$$\langle M, N \rangle = tr({}^tMN)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) Montrer que pour toute matrice inversible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $tr(A^{-1}MA) = tr(M)$.

(3) Montrer que pour toute matrice inversible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si A est symétrique alors A^{-1} est symétrique.

(4) Soit maintenant A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et inversible. Soit $u \in End\,(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $u(M) = AMA^{-1}$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que u est symétrique pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice 6 : Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^5+1}dx \quad , \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{2x+3}{x^2+5}dx \quad ,$$
$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)\sin(x)}{x^2}dx \quad , \quad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{x}(3x^2+1)}dx \ .$$

Justifier vos réponses. On précisera notamment en quelles bornes ces intégrales sont généralisées.

Exercice 7 : On considère, pour tout x réel, l'intégrale

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \sin(x\cos t)dt \ .$$

(1) Montrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(0)$.

Exercice 8 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E. On note B la forme bilinéaire sur E définie par

$$B(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 - 2(x_1y_2 + x_2y_1)$$

pour tous $x = \sum_{i=1}^{2} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{2} y_i e_i$.

(1) Montrer que B est un produit scalaire sur E.

(2) Trouver une base orthonormée pour B.

Exercice 9 : Calculer les intégrales multiples

$$I = \int\int_{D_1} \cos(x+y)dxdy \quad \text{et} \quad J = \int\int_{D_2} \left(1 + x^2y^3\right) dxdy$$

où $D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq \pi \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$, et
$D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq y \leq x \leq 1\right\}$.

Exercice 10 : Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Montrer que A est diagonalisable. Trouver une matrice orthogonale P pour laquelle ${}^tPAP$ est diagonale.

Exercice 11 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E. Soit α un réel. On note B la forme bilinéaire sur E définie par

$$B(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - \alpha^2 (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

pour tous $x = \sum_{i=1}^{2} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{2} y_i e_i$.
(1) Sous quelle condition portant sur α la forme B est-elle un produit scalaire ?
(2) On suppose $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Trouver une base orthonormée pour B.

Corrigés sommaires des exercices

Exercice 1 : Comme u est symétrique, u est diagonalisable (u est diagonalisable dans une base orthonormée de E). En particulier il existe $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ une base (orthonormée) qui diagonalise u. Si λ_i est la valeur propre associée à e_i alors

$$\langle u(e_i), e_i \rangle = \lambda_i \|e_i\|^2 \ .$$

Par hypothèse

$$\langle u(e_i), e_i \rangle = 0 \ ,$$

et puisque $\|e_i\| \neq 0$, on récupère $\lambda_i = 0$. Comme i est quelconque, $\lambda_i = 0$ pour tout i, et il suit que $M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(u)$ est la matrice nulle. En particulier u est l'endomorphisme nul.

Exercice 2 : Comme A est symétrique elle est diagonalisable. En particulier il existe une matrice orthogonale P (i.e. $P^{-1} = {}^tP$) et une matrice diagonale D telles que

$$ {}^tPAP = D \ . $$

On en déduit que

$$ {}^tPA^pP = D^p \ , $$

et si $A^p = 0$ alors $D^p = 0$. Si la diagonale de D est constituée des λ_i, alors D^p est encore diagonale et elle est constituée des λ_i^p. On a donc $\lambda_i^p = 0$ pour tout i, donc $\lambda_i = 0$ pour tout i. Par suite $D = 0$. Comme P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$, on a que $A = PD{}^tP$. D'où $A = 0$.

Exercice 3 : Soient $x, y \in E$ quelconques. On a

$$\begin{aligned} \langle (v \circ u)(x), y \rangle &= \langle v\left(u(x)\right), y \rangle \\ &= \langle u(x), v^\star(y) \rangle \\ &= \langle x, u^\star\left(v^\star(y)\right) \rangle \\ &= \langle x, (u^\star \circ v^\star)(y) \rangle \ . \end{aligned}$$

Par suite, comme x et y sont quelconques, $(v \circ u)^\star = u^\star \circ v^\star$.

On suppose maintenant que u et v sont symétriques, donc que $u^\star = u$ et $v^\star = v$. Supposons que $v \circ u$ est symétrique. Alors $(v \circ u)^\star = v \circ u$. Comme par ailleurs on a aussi $u^\star \circ v^\star = u \circ v$, et comme $(v \circ u)^\star = u^\star \circ v^\star$, on en déduit que $v \circ u = u \circ v$.

Réciproquement supposons que $v \circ u = u \circ v$. Comme $u^\star \circ v^\star = u \circ v$ on a écrit que $v \circ u = u^\star \circ v^\star$. Par suite, comme $(v \circ u)^\star = u^\star \circ v^\star$, on a écrit que $(v \circ u)^\star = v \circ u$. Donc que $v \circ u$ est symétrique.

En conclusion $v \circ u$ est symétrique si et seulement si $v \circ u = u \circ v$.

Exercice 4 : (1) Soit n la taille de A. On pose $E = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et u l'endomorphisme de E défini par $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(u) = A$. Comme A est diagonalisable, u est diagonalisable. En particulier il existe $\tilde{\mathcal{B}}$ une base de E qui diagonalise u. La matrice $M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(u)$ est constituée des valeurs propres de u (donc des λ_i) répétées autant de fois que la dimension des espaces propres correspondant (dont répétées k_i fois). On sait (cours) que pour toutes bases $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$,

$$\text{trace} M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(u) = \text{trace} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(u) \ .$$

La trace de $M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(u)$ est ici clairement constitué de la somme des $k_i\lambda_i$. On en déduit que la trace de A est constituée elle aussi de la somme des $k_i\lambda_i$. D'où la première question.

(2) Clairement A est symétrique. Elle est donc diagonalisable (et il existe P une matrice orthogonale et D une matrice diagonale telles que ${}^tPAP = D$). Par ailleurs,

$$\mathrm{trace} A = 1 + 1 + 1 = 3 \ .$$

On calcule

$$\det(A + 3\mathrm{Id}_3) = \det \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = 0$$

et

$$\det(A + 3\mathrm{Id}_3) = \det \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Il suit que -3 et 3 sont toutes deux valeurs propres de A. Il y a alors deux possibilités. Soit il a une troisième valeur propre $\lambda_3 \notin \{-3, 3\}$. Les espaces propres sont alors tous de dimension 1 (trois valeurs propres distinctes en dimension 3). Mais alors, avec la question (1), on devrait avoir $-3 + 3 + \lambda_3 = 3$ ce qui est impossible si $\lambda_3 \notin \{-3, 3\}$. Soit autrement, il n'y a que deux valeurs propres

-3 et 3, et puisque A est diagonalisable, l'une des deux a un espace propre de multiplicité 1 et l'autre de multipilicité 2. Notons $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = 3$. La seule possibilité avec la question (1) est que $k_1 = 1$ et que $k_2 = 2$ pour avoir effectivement $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = 3$. Il y a donc 2 valeurs propres -3 et 3. L'espace propre associée à -3 est de dimension 1. L'espace propre associé à 3 est de dimension 2.

(3) Soient $E = \mathbb{R}^3$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (elle est orthonormée) et $f \in End(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme défini par

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = A \ .$$

Alors f est symétrique et f et A ont les mêmes valeurs propres et les mêmes espaces propres. Notons E_{-3} et E_3 les espaces propres respectivement pour les valeurs propres -3 et 3. On sait (cours) que E_{-3} est orthogonal à E_3 (les espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux) . Il s'agit alors de trouver une base normée $(\tilde{e}_1)$ de E_{-3} (i.e. un vecteur non nul de norme 1 de E_{-3}) et une base orthonormée

$(\tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ de E_3. En effet on aura alors que $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est une base orthonormée de E (cours), que $P = M_{\mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}}$ est une matrice orthogonale (cours) et que (toujours d'après le cours)

$$
{}^tP \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
$$

La matrice recherchée est P et, en conclusion, il nous faut déterminer des bases orthonormées de E_{-3} et de E_3. Comme E_3 est de dimension 2, on utilisera le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

On a

$$
E_{-3} = \left\{ (x, y, z) \ / \ \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}
$$

Or

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x = y + z \\ 2y = x + z \\ 2z = x + y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y + z \\ 2y = x + z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y + z \\ x = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow x = y = z$$

Par suite

$$E_{-3} = \{(x, x, x) \ / \ x \in \mathbb{R}\} \ .$$

On en déduit que $e = (1, 1, 1)$ est une base de E_{-3}. On a $\|e\| = \sqrt{3}$. On pose

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

et alors $(\tilde{e}_1)$ est une base normée de E_{-3}. Par ailleurs,

$$E_3 = \left\{ (x,y,z) \ / \ \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \{(x,y,z) \ / \ x+y+z=0\}$$
$$= \{x(1,0,-1)+y(0,1,-1) \ / \ x,y \in \mathbb{R}\}$$

La famille composée des vecteurs $(1,0,-1)$ et $(0,1,-1)$ est donc génératrice pour E_3. Elle est clairement libre puisque

$$\lambda(1,0,-1)+\mu(0,1,-1)=(0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow (\lambda,\mu,-\lambda-\mu)=(0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \lambda=\mu=0 \ .$$

Posons $u=(1,0,-1)$ et $v=(0,1,-1)$. Alors (u,v) est une base de E_3. On utilise maintenant Gram-Schmidt pour l'orthonormaliser.

On a $\|u\| = \sqrt{2}$. On pose

$$\tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1) \ .$$

On calcule $\langle v, \tilde{e}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et on pose ensuite

$$\begin{aligned}\tilde{v} &= v - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{e}_2 \\ &= (0, 1, -1) - (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) \\ &= -(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})\end{aligned}$$

On a $\|\tilde{v}\|^2 = \frac{3}{2}$. On pose

$$\tilde{e}_3 = -\sqrt{\frac{2}{3}}(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}) \ .$$

La famille $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est alors une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ qui diagonalise f. La matrice $P = M_{\mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}}$ convient. On a

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

et

$$^{t}P \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Exercice 5 : (1) Notons $M = (a_{ij})$. Alors ${}^tM = (a_{ji})$ et

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad , \quad {}^tM = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Si ${}^tMM = (b_{ij})$ alors, pour tous i, j,

$$b_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha i} a_{\alpha j} \ .$$

Il est clair que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire. Elle est symétrique car $trM = tr^tM$ pour toute matrice carrée M, tandis que ${}^t({}^tNM) = {}^tMN$ pour toutes matrices carrées M, N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La forme est enfin définie positive car (cf. ci-dessus)

$$\langle M, M \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha i}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$$

de sorte que $\langle M, M \rangle \geq 0$ pour toute matrice carrée M et que $\langle M, M \rangle = 0$ si et seulement si $M = 0$. Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) Notons $A = (a_{ij})$, $A^{-1} = (b_{ij})$, $M = (x_{ij})$, $MA = (c_{ij})$ et $A^{-1}MA = (d_{ij})$. On a

$$c_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} x_{i\alpha} a_{\alpha j}$$

pour tous i, j, et par suite

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \sum_{\beta=1}^{n} b_{i\beta} c_{\beta j} \\ &= \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} b_{i\beta} x_{\beta\alpha} a_{\alpha j} \end{aligned}$$

pour tous i, j. Comme $AA^{-1} = Id$,

$$\sum_{\gamma=1}^{n} a_{i\gamma} b_{\gamma j} = \delta_{ij}$$

pour tous i, j, où les δ_{ij} sont les symbôles de Kroenecker (définis par $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon). Par suite, pour toute matrice inversible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$
\begin{aligned}
tr(A^{-1}MA) &= \sum_{i=1}^{n} d_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} b_{i\beta} x_{\beta\alpha} a_{\alpha i} \\
&= \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} x_{\beta\alpha} \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i} b_{i\beta} \\
&= \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} x_{\beta\alpha} \delta_{\alpha\beta} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} x_{\alpha\alpha} \\
&= tr(M) \ .
\end{aligned}
$$

(3) Si A est symétrique alors A est diagonalisable. En particulier, il existe P orthogonale (i.e. ${}^tP = P^{-1}$) et il existe D diagonale telle que

$$ {}^tPAP = D \ . $$

On en déduit que D est inversible, que $A = PD{}^tP$ puis que

$$ A^{-1} = P(D^{-1}){}^tP \ . $$

La matrice D^{-1} est diagonale. Donc

$$ {}^tA^{-1} = {}^t(P(D^{-1}){}^tP) = P(D^{-1}){}^tP = A^{-1} \ . $$

Par suite A^{-1} est aussi symétrique.

(4) On veut montrer que pour toutes matrices $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$ \langle u(M), N \rangle = \langle M, u(N) \rangle \ . $$

Pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}
\langle u(M), N\rangle &= tr\left({}^t(AMA^{-1})N\right) \\
&= tr\left({}^t(A^{-1}){}^tM{}^tAN\right) \\
&= tr\left(A^{-1}{}^tMAN\right) \\
&= tr\left(A^{-1}\left({}^tMANA^{-1}\right)A\right) \\
&= tr\left({}^tMANA^{-1}\right) \\
&= \langle M, u(N)\rangle \ .
\end{aligned}$$

En particulier, u est symétrique.

Exercices 6 : (1) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^5+1} \ .$$

La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.
L'intégrale I_1 est généralisée en $+\infty$. On a

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 f(x) = 1 \ .$$

Comme $3 > 1$, le critère de Riemann donne que I_1 est convergente.

(2) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+5} \ .$$

La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.
L'intégrale I_2 est généralisée en $+\infty$. On a

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 2 \ .$$

Comme $1 \leq 1$, le critère de Riemann donne que I_2 est divergente.

(3) Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{\cos(x)\sin(x)}{x^2} \ .$$

La fonction f est continue et positive sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. L'intégrale I_3 est généralisée en 0. On a

$$\lim_{x \to 0^+} x f(x) = 1 \ .$$

Comme $1 \geq 1$, le critère de Riemann donne que I_3 est divergente.

(4) Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x}(3x^2+1)} \ .$$

La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}^{+\star} =]0, +\infty[$. L'intégrale I_4 est généralisée en 0 et en $+\infty$. On a

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} f(x) = 3 \ .$$

Comme $\frac{1}{2} < 1$, le critère de Riemann donne que I_4 est convergente en 0. On a encore

$$\lim_{x\to+\infty} x^{3/2} f(x) = \frac{2}{3} \ .$$

Comme $\frac{3}{2} > 1$, le critère de Riemann donne que I_4 est convergente en $+\infty$. Comme I_4 est convergente à la fois en 0 et en $+\infty$ elle est convergente.

Exercice 7 : (1) En vertue des théorèmes généraux, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \sin\left(x\cos(t)\right)$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$. On en déduit (théorème de cours) que F est continue sur $\mathbb{R}$.

(2) La fonction f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ en tout point de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \cos\left(x\cos(t)\right)\cos(t)$$

pour tous $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. En vertue des théorèmes généraux, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. On en déduit que F est dérivable de dérivée

$$F'(x) = \int_0^{\pi/2} \cos\left(x \cos(t)\right) \cos(t) dt$$

en tout point $x \in \mathbb{R}$. En particulier,

$$F'(0) = \int_0^{\pi/2} \cos(t) dt = [\sin(t)]_0^{\pi/2} = 1 \ .$$

Exercice 8 : (1) On vérifie facilement que B est bilinéaire symétrique. Reste à montrer que B est définie positive. On a

$$\begin{aligned} B(x,x) &= 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 \\ &= 2(x_1 - x_2)^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $B(x,x) \geq 0$ pour tout x et que $B(x,x) = 0$ si et seulement si $x_1 = x_2$ et $x_2 = 0$, et donc si et seulement si $x_1 = x_2 = 0$. Donc B est bien définie positive. Par suite B est un produit scalaire.

(2) On utilise Gram-Schmidt en partant de $\mathcal{B}$. Si $\|\cdot\|$ est la norme associée à B, alors

$$\|e_1\|^2 = B(e_1, e_1) = 2 \ .$$

On pose

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \ .$$

On calcule

$$B(e_2, \tilde{e}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} B(e_1, e_2) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \ .$$

On pose

$$x = e_2 - B(e_2, \tilde{e}_1)\tilde{e}_1 = (1, 1) \ .$$

On a $\|x\| = 1$ et on pose

$$\tilde{e}_2 = x = e_2 - B(e_2, \tilde{e}_1)\tilde{e}_1 = (1, 1) \ .$$

Alors $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est une base orthonormée pour $\mathcal{B}$.

Exercices 9 : Par Fubini,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \cos(x+y)dy \right) dx \\ &= \int_0^{\pi} [\sin(x+y)]_{y=0}^{y=\pi/2} \, dx \\ &= \int_0^{\pi} \cos(x)dx - \int_0^{\pi} \sin(x)dx \\ &= [\sin(x)]_0^{\pi} + [\cos(x)]_0^{\pi} \\ &= -2 \ . \end{aligned}$$

Pour calculer J on écrit que

$$D_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x \right\} \ .$$

On peut alors appliquer Fubini pour les domaines en piles pour calculer J. On a

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^1 \left(\int_0^x (1 + x^2 y^3) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[y + \frac{1}{4} x^2 y^4 \right]_{y=0}^{y=x} dx \\
&= \int_0^1 x dx + \frac{1}{4} \int_0^1 x^6 dx \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{28} = \frac{15}{28} \ .
\end{aligned}
$$

Exercice 10 : (corrrection sommaire) La matrice A est symétrique, donc diagonalisable et il existe P orthogonale telle que ${}^t PAP$ est diagonale. Soient $E = \mathbb{R}^3$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (elle est orthonormée) et $f \in End(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme défini par

$$
M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = A \ .
$$

Alors f est diagonalisable, qui plus est dans une base orthonormée

$\tilde{\mathcal{B}}$ pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La matrice orthogonale P recherchée est alors donnée par $P = M_{\mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}}$ (cours). Le polynôme caractéristique de f est donné par

$$P(X) = -X(X-3)^2 + 24X + 8 = -X^3 + 6X^2 + 15X + 8 \ .$$

On remarque que $P(-1) = 0$. Par suite P se factorise en

$$P(X) = -(X+1)(X^2 + \alpha X - 8)$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On trouve $\alpha + 1 = -6$ et $\alpha - 8 = -15$ de sorte que $\alpha = -7$. Par suite

$$\begin{aligned} P(X) &= -(X+1)(X^2 - 7X - 8) \\ &= -(X+1)^2(X-8) \ . \end{aligned}$$

Les valeurs propres de f sont -1 et 8. Soient E_{-1} et E_8 les espaces propres associés. On sait déjà que E_8 est de dimension 1, et comme f est diagonalisable E_{-1} est forcément de dimension 2. On trouve que

$$\begin{aligned} E_{-1} &= \{(x, y, z) \ / \ 2x + y + 2z = 0\} \\ &= \{x(1, -2, 0) + z(0, -2, 1) \ , \ x, z \in \mathbb{R}\} \ . \end{aligned}$$

Soient $u = (1 - 2, 0)$ et $v = (0, -2, 1)$. Alors (u, v) est génératrice pour E_{-1}. On vérifie facilement que (u, v) est aussi libre. Donc (u, v) est une base pour E_{-1}. On orthonormalise maintenant (u, v) en appliquant Gram-Schmidt. On a $\|u\|^2 = 5$. On pose

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} u = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right) \ .$$

On calcule

$$\langle v, \tilde{e}_1 \rangle = \frac{4}{\sqrt{5}} \ .$$

On pose

$$\tilde{v} = v - \langle v, \tilde{e}_1 \rangle \tilde{e}_1 = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 1 \right) \ .$$

On a

$$\|\tilde{v}\|^2 = \frac{45}{25} = \frac{9}{5} \ .$$

On pose

$$\tilde{e}_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}\tilde{v} = \left(-\frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right) \ .$$

Alors $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est une base orthonormée de E_{-1}.

Indépendamment, on trouve que

$$\begin{aligned} E_8 &= \{(x,y,z) \ / \ x = z = 2y\} \\ &= \{y(2,1,2) \ , \ y \in \mathbb{R}\} \ . \end{aligned}$$

Donc E_8 est la droite vectorielle de vecteur de base $w = (2,1,2)$.
On a $\|w\| = 3$. On pose

$$\tilde{e}_3 = \frac{1}{3}w = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \ .$$

Alors (cours) la famille $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est une base orthonormée et si

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

on a que

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Exercice 11 : (1) Il est clair que B est bilinéaire symétrique. Reste à déterminer sous quelle(s) condition(s) portant sur α a-t-on que B est définie positive. On a

$$\begin{aligned} B(x,x) &= x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha^2 x_1 x_2 \\ &= \alpha^2(x_1 - x_2)^2 + (1-\alpha^2)(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

Si $|\alpha| < 1$, et donc si $\alpha^2 < 1$, alors $B(x,x) \geq 0$ pour tout x et $B(x,x) = 0$ si et seulement si $x = 0$. Si $|\alpha| = 1$, donc si $\alpha^2 = 1$ alors $B(x,x) \geq 0$ pour tout x mais il y a des vecteurs isotropes (non nuls). Par exemple $x = (1,1)$ est isotrope. Si $|\alpha| > 1$, et donc si $\alpha^2 > 1$, alors B n'est même plus positive. Par exemple, si $x = (1,1)$, alors $B(x,x) = 2(1-\alpha^2)$ est strictement négatif. En conclusion, B est un produit scalaire si et seulement si $|\alpha| < 1$.

(2) On pose $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On a $0 < \alpha < 1$. Donc B est un produit scalaire. On utilise Gram-Schmidt en partant de $\mathcal{B}$. Si $\|\cdot\|$ est la norme associée à B, alors $\|e_1\|^2 = B(e_1, e_1) = 1$. On pose $\tilde{e}_1 = e_1 = (1,0)$. On calcule $B(e_2, \tilde{e}_1) = -\frac{1}{2}$. On pose

$$x = e_2 - B(e_2, \tilde{e}_1)\tilde{e}_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right) .$$

On calcule $\|x\|^2 = B(x,x) = \frac{3}{4}$ et on pose

$$\tilde{e}_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) .$$

Alors $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est une base orthonormée pour $\mathcal{B}$.

Fin des exercices