Algèbre bilinéaire et Intégration

par

Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise

Année 2018-2019

Exercice 1 : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note $f \in End(E)$ l'endomorphisme de E défini par

$$f\left(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3\right) = \left(x_1 + 4x_2 + 4x_3\right) e_1 + \left(4x_1 + 7x_2 + 8x_3\right) e_2 - \left(4x_1 + 8x_2 + 9x_3\right) e_3$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

(1) Calculer le polynôme caractéristique de f. Déterminer les valeurs propres de f.

(2) Déterminer les sous-espaces propres de f.

(3) Montrer que f est diagonalisable et donner une matrice A pour laquelle la matrice $A^{-1} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) A$ est diagonale. Que vaut cette matrice diagonale ?

(4) Calculer $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^6$ et $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^7$.

(5) Calculer A^{-1}.

Solution : (1) On a

$$f\left(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3\right)=\left(x_1+4x_2+4x_3\right)e_1+\left(4x_1+7x_2+8x_3\right)e_2 \\ -\left(4x_1+8x_2+9x_3\right)e_3$$

On trouve

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1+4e_2-4e_3 \\ f(e_2) &= 4e_1+7e_2-8e_3 \\ f(e_3) &= 4e_1+8e_2-9e_3 \end{aligned}$$

Par suite,

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \\ -4 & -8 & -9 \end{pmatrix}$$

Si P est le polynôme caractéristique de f on a

$$P(X)=\det\begin{pmatrix} 1-X & 4 & 4 \\ 4 & 7-X & 8 \\ -4 & -8 & -9-X \end{pmatrix}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
P(X) &= -(X+9)(X-7)(X-1) - 8\times 16 - 8\times 16 \\
&\qquad + 16(7-X) + 64(1-X) + 16(X+9) \\
&= -(X+9)(X-7)(X-1) - 2\times 8\times 16 \\
&\qquad + 7\times 16 + 64 + 9\times 16 - 16X - 64X + 16X \\
&= -(X+9)(X-7)(X-1) - 64X + 64 \\
&= -(X-1)\left((X+9)(X-7) + 64\right) \\
&= -(X-1)(X^2+2X+1) \\
&= -(X-1)(X+1)^2
\end{aligned}$$

Donc f a deux valeurs propres qui sont -1 et 1.

(2) On a

$$E_1 = \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \\ -4 & -8 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

On a les équivalences,

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = x \\ 4x + 7y + 8z = y \\ -4x - 8y - 9z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 2x + 4y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} E_1 &= \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ y + z = 0, 2x + z = 0\} \\ &= \left\{ -\frac{1}{2} ze_1 - ze_2 + ze_3 \ / \ z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z \left(-\frac{1}{2} e_1 - e_2 + e_3 \right) \ / \ z \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

On pose

$$\tilde{e}_1 = -\frac{1}{2}e_1 - e_2 + e_3$$

et alors E_1 est la droite vectorielle de base $(\tilde{e}_1)$.

De même, on a

$$E_{-1} = \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \\ -4 & -8 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

On a les équivalences,

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = -x \\ 4x + 7y + 8z = -y \\ -4x - 8y - 9z = -z \end{cases} \quad \Leftrightarrow x + 2y + 2z = 0$$

Par suite,

$$\begin{aligned} E_{-1} &= \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ x + 2y + 2z = 0\} \\ &= \{-2(y+z)e_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-2e_1 + e_2) + z(-2e_1 + e_3) \ / \ y, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

On pose

$$\tilde{e}_2 = -2e_1 + e_2 \ \text{ et } \ \tilde{e}_3 = -2e_1 + e_3$$

Alors $(\tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est une famille génératrice de E_{-1}. La famille est aussi libre car

$$\begin{aligned} & \lambda\tilde{e}_2 + \mu\tilde{e}_3 = 0 \\ & \Leftrightarrow -2(\lambda+\mu)e_1 + \lambda e_2 + \mu e_3 = 0 \end{aligned}$$

et puisque (e_1, e_2, e_3) est une base, on trouve $\lambda = \mu = 0$. En conclusion, E_{-1} est le plan vectoriel de base $(\tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$.

(3) Clairement f est diagonalisable puisque

$$\begin{aligned}\dim E_1 + \dim E_{-1} &= 1+2 \\ &= 3 \\ &= \dim E\end{aligned}$$

De plus $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est une base de E qui diagonalise f au sens où

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et si $A = M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}$ alors

$$A^{-1} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) A = M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$$

Par définition,

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) On a

$$A^{-1}M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)A = M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$$

et donc

$$A^{-1}M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^6A = M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)^6$$

De plus

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)^6 = \begin{pmatrix} 1^6 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^6 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^6 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_3$$

Donc

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^6 &= AM_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)^6A^{-1} \\ &= A\mathrm{Id}_3A^{-1} \\ &= AA^{-1} \\ &= \mathrm{Id}_3 \end{aligned}$$

et ensuite $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^7 = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^6M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$.

(5) Pour calculer A^{-1} on procède ici avec les équivalences de systèmes :

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad A^{-1}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

On a

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{1}{2}x-2y-2z=X\\-x+y=Y\\x+z=Z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2}x+2y+2z=-X\\-x+y=Y\\y+z=Y+Z\end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2}x+2(Y+Z)=-X\\-x+y=Y\\x+z=Z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2}x=-X-2Y-2Z\\y=Y+x\\z=Y+Z-y\end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2X-4Y-4Z\\y=-2X-3Y-4Z\\z=2X+4Y+5Z\end{cases}$$

Par suite,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

et donc (cf. ci-dessus)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : On considère la matrice A réelle 3×3 donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^6 et A^7.

Solution : On calcule le polynôme caractéristique de A. Posons

$$P(X) = \det \begin{pmatrix} -1-X & 1 & 2 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 1 & -4 & -1-X \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned} P(X) &= -(X-2)(X+1)^2 + 8 + 1 - 2(2-X) - 4(1+X) - (1+X) \\ &= -(X-2)(X+1)^2 - 3X \\ &= -(X-2)(X^2+2X+1) - 3X \\ &= -X^3 - 2X^2 - X + 2X^2 + 4X + 2 - 3X \\ &= 2 - X^3 \end{aligned}$$

Le théorème de Cayley-Hamilton nous donne alors que

$$A^3 = 2\mathrm{Id}_3$$

Par suite

$$A^6 = 4\mathrm{Id}_3 \ \text{ et } A^7 = A^6 A = 4A$$

Exercice 3 : Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie pour tout $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par

$$Q(X) = 9x^2 + 5y^2 + 8yz - 4yt + 5z^2 + 4zt + 8t^2$$

(1) Montrer que

$$Q(X) = 9x^2 + 5\left(y + \frac{4}{5}z - \frac{2}{5}t\right)^2 + \frac{9}{5}(z + 2t)^2$$

pour tout $X = (x, y, z, t)$.

(2) Soit $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ donné par

$$\Phi(x, y, z, t) = \left(3x, \sqrt{5}(y + \frac{4}{5}z - \frac{2}{5}t), \frac{3}{\sqrt{5}}(z + 2t), t\right)$$

Montrer que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

(3) Soit $\tilde{Q}$ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par

$$\tilde{Q}(X) = x^2 + y^2 + z^2$$

Montrer que $Q(X) = \tilde{Q}(\Phi(X))$ pour tout X. En déduire la signature de Q.

(4) Trouver les vecteurs isotropes de Q.

Solution : (1) On calcule

$$\left(y+\frac{4}{5}z-\frac{2}{5}t\right)^2 = y^2+\frac{16}{25}z^2+\frac{4}{25}t^2+\frac{8}{5}yz-\frac{4}{5}yt-\frac{16}{25}zt$$

et

$$(z+2t)^2 = z^2+4t^2+4zt$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
&9x^2+5\left(y+\frac{4}{5}z-\frac{2}{5}t\right)^2+\frac{9}{5}(z+2t)^2\\
&=9x^2+5y^2+\frac{16}{5}z^2+\frac{4}{5}t^2+8yz-4yt-\frac{16}{5}zt+\frac{9}{5}z^2+\frac{36}{5}t^2+\frac{36}{5}zt\\
&=9x^2+5y^2+\frac{25}{5}z^2+\frac{40}{5}t^2+8yz-4yt+\frac{20}{5}zt\\
&=9x^2+5y^2+5z^2+8t^2+8yz-4yt+4zt
\end{aligned}$$

On retrouve bien $Q(X)$.

(2) On vérifie facilement que Φ est bien linéaire. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On a

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & \frac{4}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En développant le déterminant suivant la première ligne on trouve

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & \frac{4}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \times \det \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \frac{4}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Or

$$\det \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \frac{4}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{5} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = 3$$

et donc

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & \frac{4}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 9 \neq 0$$

Donc, une application linéaire étant bijective si et seulement si l'une quelconque de ses matrices de représentations est inversible, et puisque une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, on obtient que Φ est bien un isomorphisme.

(3) La question (1) nous dit que

$$Q(X) = \tilde{Q}\left(\Phi(X)\right)$$

pour tout $X \in \mathbb{R}^4$. Comme Φ est un isomorphisme, Q et $\tilde{Q}$ sont deux formes quadratiques équivalentes. En particulier, elles ont même signature. La signature de $\tilde{Q}$ est $(3, 0)$. La signature de Q est donc aussi $(3, 0)$.

(4) Les vecteurs isotropes de Q sont les $X \in \mathbb{R}^4$ qui vérifient que $Q(X) = 0$. Avec la question (1) on voit donc qu'il s'agit des $X = (x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$ qui vérifient le système :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + \frac{4}{5}z - \frac{2}{5}t = 0 \\ z + 2t = 0 \end{cases}$$

Si Δ est l'ensemble des vacteurs isotropes de Q on a donc

$$\Delta = \left\{ X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x = 0, y + \frac{4}{5}z - \frac{2}{5}t = 0, z + 2t = 0 \right\}$$

On a l'équivalence,

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + \frac{4}{5}z - \frac{2}{5}t = 0 \\ z + 2t = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = -2t \end{cases}$$

car $\frac{8}{5} + \frac{2}{5} = 2$. Donc

$$\begin{aligned} \Delta &= \left\{ X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x = 0, y = 2t, z = -2t \right\} \\ &= \{ t(0, 2, -2, 1) \ , \ t \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

On trouve donc que Δ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^4$ de vecteur directeur (de base) $X_0 = (0, 2, -2, 1)$.

Exercice 4 : On appelle matrice triangulaire inférieure toute matrice carrée $A = (a_{ij})$ qui est telle que $a_{ij} = 0$ pour tous $i < j$, et matrice triangulaire supérieure toute matrice carrée $A = (a_{ij})$ qui est telle que $a_{ij} = 0$ pour tous $i > j$. Montrer que le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est égal au produit de ses termes diagonaux.

Solution : On passe des matrices triangulaires supérieures aux matrices triangulaires inférieures en prenant la transposée. La transposée n'affectant pas le déterminant on peut donc se restreindre au cas des matrices triangulaires inférieures

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n_3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

En développant le déterminant suivant la première ligne on trouve que

$$\det A_n = a_{11} \det A_{n-1} \qquad (\star)$$

où A_{n-1} est la matrice triangulaire inférieure d'ordre $n-1$ obtenue à partir de A_n en supprimant la première ligne et la première colonne de A_n. Donc la matrice des a_{ij}, $i, j \geq 2$. La relation $(\star)$ permet de mettre en place une preuve par récurrence.

Hypothèse de récurrence : Le déterminant d'une matrice de rang n triangulaire inférieure est égal au produit de ses termes diagonaux.

Amorce : on vérifie l'hypothèse au rang $n = 1$ (cas d'un réel) ou alors on commence au rang $n = 2$ pour pouvoir véritablement parler de matrice triangulaire. On a

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = ac$$

ce qui vérifie l'hypothèse de récurrence au rang $n = 2$.

Cœur : On suppose l'hypothèse vraie au rang n. Soit A une matrice triangulaire inférieure d'ordre $n + 1$. En vertue de $(\star)$, $\det(A) = a_{11}\det(B)$ où B est la matrice triangulaire inférieure d'ordre n constituée des a_{ij}, $i \geq 2$ et $j \geq 2$. Par hypothèse de récurrence,

$$\det(B) = a_{22} \times \cdots \times a_{n+1n+1}$$

Par suite

$$\det(A) = a_{11} \times \cdots \times a_{n+1n+1}$$

ce qui achève la récurrence.

Exercice 5 : Soit M une matrice carrée d'ordre n. On suppose que M est du type

$$M = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{Id}_p & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $p < n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, Id_p est la matrice identité d'ordre p, A est une matrice $p \times (n-p)$, B est une matrice $(n-p) \times (n-p)$ et 0 est la matrice nulle $(n-p) \times p$. Montrer que $\det(M) = \lambda^p \det(B)$.

Solution : Pour "coder" la matrice M facilement fixons n et p (on sort donc d'un raisonnement mathématique général) et supposons par exemple que $n = 8$ et $p = 4$. Alors M est du type

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

En développant cette matrice suivant la première colonne on voit que

$$\det M = \lambda \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & \lambda & 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & \lambda & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

On redéveloppe suivant la première colonne et on obtient que

$$\det M = \lambda^2 \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & \lambda & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

Encore deux développements suivant la première colonne et on obtient que

$$\det M = \lambda^4 \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

Soit

$$\det(M) = \lambda^4 \det(B)$$

La preuve générale fonctionne de la même façon. On développe p fois suivant la première colonne pour obtenir que

$$\det(M) = \lambda^p \det(B)$$

Une preuve mathématique rigoureuse par récurrence peut être mise en place.

Exercice 6 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soient $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme de E, $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f, E_λ l'espace propre associé et P le polynôme caractéristique de f. En partant d'une base de E_λ, en utilisant le théorème de la base incomplète et l'exercice 5 précédent, montrer le résultat admis en cours stipulant que

$$\mathrm{dim} E_\lambda \leq k$$

où k est l'ordre de multiplicité de la racine λ dans P. Comme on s'en convaincra facilement, on peut définir cet ordre de deux façons différentes : soit comme l'entier k pour lequel on peut écrire que $P(X) = (X - \lambda)^k Q(X)$ avec Q un polynôme réel de degré $n - k$ vérifiant que $Q(\lambda) \neq 0$, ou alors comme le plus grand entier p pour lequel on puisse écrire que $P(X) = (X - \lambda)^p Q(X)$ avec Q un polynôme réel de degré $n - p$. L'équivalence de ces deux définitions suit de la remarque que λ est racine d'un polynôme Q si et seulement si il existe un polynôme $\tilde{Q}$ avec $Q(X) = (X - \lambda)\tilde{Q}(X)$.

Solution : Notons $p = \dim E_\lambda$. Si $p = n$ alors $E_\lambda = E$ et donc $f = \lambda \mathrm{Id}_E$ (i.e $f(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$). Mais alors $P(X) = (\lambda - X)^n$, donc $k = n$ et on a bien que $p \leq k$ (en fait $n = n$). On suppose maintenant que $p < n$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E_λ. On la complète par des vecteurs $e_{p+1}, \ldots, e_n$ pour obtenir une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de E. On a alors

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{Id}_p & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où Id_p est la matrice identité d'ordre p, A est une matrice $p \times (n-p)$ et B est une matrice $(n-p) \times (n-p)$. La matrice $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) - X\mathrm{Id}_n$ s'écrit alors

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) - X\mathrm{Id}_n = \begin{pmatrix} (\lambda - X)\mathrm{Id}_p & A \\ 0 & B - X\mathrm{Id}_{n-p} \end{pmatrix}$$

Avec l'exercice 5 on trouve donc que $P(X) = (\lambda - X)^p Q(X)$ où Q est le polynôme caractéristique de B. Donc $p \leq k$ puisqu'on peut voir k comme le plus grand de tels p.

Exercice 7 : Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_3 - 6x_1x_2$$

(1) Pourquoi Q est-elle une forme quadratique ?

(2) Quelle est la forme bilinéaire symétrique B associée à Q ? Quelle est la matrice M de B dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?

(3) Décomposer Q en sommes et différences de carrés de façon à écrire Q sous la forme $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$ où $\tilde{Q}$ est une forme quadratique facile à manipuler et Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(4) Quelle est la signature de Q ?

(5) Caractériser les vecteurs isotropes de Q.

Solution : (1) Q est une forme quadratique car Q est un polynôme homogène de degré 2 des variables coordonnées (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

(2) On écrit

$$\begin{aligned} Q(X) &= x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_3 - 6x_1x_2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + (x_2x_3 + x_3x_2) \\ &\quad - (x_1x_3 + x_3x_1) - 3(x_1x_2 + x_2x_1) \end{aligned}$$

et par suite

$$Q(X) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j$$

où les a_{ij} sont symétriques et donnés par $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$, $a_{33} = -5$, $a_{12} = a_{21} = -3$, $a_{13} = a_{31} = -1$ et $a_{23} = a_{32} = 1$. On en déduit (cf. cours) que

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= x_1y_1 + x_2y_2 - 5x_3y_3 + (x_2y_3 + x_3y_2) \\ &\quad - (x_1y_3 + x_3y_1) - 3(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

La matrice de B dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice des a_{ij}. Elle est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

(3) On rappelle que

$$Q(X) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_3 - 6x_1x_2$$

On essaye d'éliminer x_1 de l'équation. On remarque que

$$(x_1 - x_3 - 3x_2)^2 = \mathbf{x_1^2} + x_3^2 + 9x_2^2 \mathbf{- 2x_1x_3} - \mathbf{6x_1x_2} + 6x_2x_3$$

On peut donc écrire que

$$\begin{aligned} Q(X) &= (x_1 - x_3 - 3x_2)^2 - (x_3^2 + 9x_2^2 + 6x_2x_3) + x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - 3x_2 - x_3)^2 - 8x_2^2 - 6x_3^2 - 4x_2x_3 \end{aligned}$$

On élimine maintenant x_2 des trois termes $8x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_2x_3$. On écrit pour cela que

$$8x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_2x_3 = 8\left(x_2 + \frac{1}{4}x_3\right)^2 + \frac{11}{2}x_3^2$$

Par suite

$$Q(X) = (x_1 - 3x_2 - x_3)^2 - 8\left(x_2 + \frac{1}{4}x_3\right)^2 - \frac{11}{2}x_3^2$$

Soit $\tilde{Q}$ la forme quadratique

$$\tilde{Q}(X) = x_1^2 - 8x_2^2 - \frac{11}{2}x_3^2$$

et soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 - 3x_2 - x_3, x_2 + \frac{1}{4}x_3, x_3\right)$$

Alors

$$Q(X) = \tilde{Q}\left(\Phi(X)\right)$$

pour tout $X \in \mathbb{R}^3$. Il reste à montrer que Φ est un isomorphisme.

Si on note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure. Son déterminant vaut (cf. exercice 4) $\det(M) = 1$. Donc M est inversible $(1 \neq 0)$ et donc Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(4) Comme Φ est un isomorphisme, Q et $\tilde{Q}$ sont équivalentes. Par suite elles ont même signature. En changeant la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ en la base

$$\hat{\mathcal{B}} = \left(e_1, \frac{1}{2\sqrt{2}} e_2, \sqrt{\frac{2}{11}} e_3 \right)$$

l'expression de $\tilde{Q}$ dans cette base devient

$$\tilde{Q}(X) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

Sa signature est $(1, 2)$. La signature de Q est donc aussi $(1, 2)$.

(5) Les vecteurs isotropes de $\tilde{Q}$ sont facilement caractérisables dans $\hat{\mathcal{B}}$. Il s'agit du cône $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\mathcal{C} = \left\{ X \text{ de coordonnés } x_1, x_2, x_3 \text{ dans } \hat{\mathcal{B}} \text{ tels que } x_2^2 + x_3^2 = x_1^2 \right\}$$

Si on note $\mathcal{I}$ l'ensemble des vecteurs isotropes de Q, puisque $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$, on voit que

$$Q(X) = 0 \Leftrightarrow \Phi(X) \in \mathcal{C}$$

et on récupère donc, puisque Φ est un isomorphisme, que

$$\mathcal{I} = \Phi^{-1}(\mathcal{C})$$

Cette relation caractérise les vecteurs isotropes de Q.

Exercice 8 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un réel donné. On note B la forme bilinéaire sur E définie par

$$B(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2 + \alpha x_3y_3 - \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) \\ - \frac{7}{2}(x_1y_3 + x_3y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_3 + x_3y_2)$$

pour tous $x = \sum_{i=1}^{3} x_ie_i$ et $y = \sum_{i=1}^{3} y_ie_i$.

(1) Ecrire la matrice $M_{\mathcal{B}}(B)$ de B dans $\mathcal{B}$.

(2) Montrer que les vecteurs $\tilde{e}_1 = e_1$, $\tilde{e}_2 = e_1 + 2e_2$, et $\tilde{e}_3 = 3e_1 - e_2 + e_3$ forment une base $\tilde{\mathcal{B}}$ de E. Ecrire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\tilde{\mathcal{B}}$.

(3) Calculer la matrice $M_{\tilde{\mathcal{B}}}(B)$ de B dans $\tilde{\mathcal{B}}$.

(4) Si Q est la forme quadratique associée à B, donner les expressions de Q dans les bases $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$. Que vaut la signature de Q selon que $\alpha < 11$, $\alpha = 11$ ou $\alpha > 11$?

Solution : (1) La matrice $M_{\mathcal{B}}(B)$ de B dans $\mathcal{B}$ est composée des $B(e_i, e_j)$. On trouve

$$M_{\mathcal{B}}(B) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \alpha \end{pmatrix}$$

(2) On a trois vecteurs en dimension 3. Il suffit donc de montrer que la famille $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est libre. On a

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \tilde{e}_1 + \lambda_2 \tilde{e}_2 + \lambda_3 \tilde{e}_3 = 0 \\ & \Leftrightarrow \lambda_1 e_1 + \lambda_2 (e_1 + 2e_2) + \lambda_3 (3e_1 - e_2 + e_3) = 0 \\ & \Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3) e_1 + (2\lambda_2 - \lambda_3) e_2 + \lambda_3 e_3 = 0 \end{aligned}$$

et puisque (e_1, e_2, e_3) est une base, on doit avoir que

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

En remontant de système de la dernière équation à la première, on trouve que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est donc libre, et puisque E est de dimension 3, il s'agit d'une base de E. Les colonnes de la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\tilde{\mathcal{B}}$ sont constituées des coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs de $\tilde{\mathcal{B}}$. Si $P = M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}$ est cette matrice de passage, on a donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Par formule de changement de base $M_{\tilde{\mathcal{B}}}(B) = {}^tPM_{\mathcal{B}}(B)P$. On calcule

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}(B)P &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & \alpha - 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a

$$ {}^tP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} $$

Par suite

$$ \begin{aligned} M_{\tilde{\mathcal{B}}}(B) &= {}^tPM_{\mathcal{B}}(B)P \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & \alpha - 11 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 11 \end{pmatrix} \end{aligned} $$

(5) On a $Q(X) = B(X, X)$ et donc, dans $\mathcal{B}$,

$$Q(X) = x_1^2 - x_2^3 + \alpha x_3^2 - x_1x_2 - 7x_1x_3 + x_2x_3$$

Par ailleurs, comme

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 11 \end{pmatrix}$$

on voit que, dans $\tilde{\mathcal{B}}$

$$Q(X) = \tilde{x}_1^2 - 5\tilde{x}_2^2 + (\alpha - 11)\tilde{x}_3^2$$

On en déduit que la signature de Q est égale à $(1, 2)$ si $\alpha < 11$ (1 carré avec un $+$ et 2 carrés avec un $-$), à $(1, 1)$ si $\alpha = 11$ (1 carré avec un $+$ et 1 carré avec un $-$) et à $(2, 1)$ si $\alpha > 11$ (2 carrés avec un $+$ et 1 carré avec un $-$).

Exercice 9 : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme de E, et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme réel. Si $P(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$, $k \in \mathbb{N}$, on note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par $P(f) = \sum_{i=0}^{k} a_i f^i$ où $f^0 = \mathrm{Id}_E$ (l'identité de E) et $f^i = f \circ \cdots \circ f$ (i fois).

(1) Montrer que si λ est valeur propre de f, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(f)$. Montrer que si f est diagonalisable, alors $P(f)$ l'est aussi.

(2) On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}^2$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1 e_1 + x_2 e_2) = (x_1 - \sqrt{2} x_2) e_1 + (\sqrt{2} x_1 - x_2) e_2$$

Montrer (par le simple calcul du polynôme caractéristique de f) que f n'est pas diagonalisable. Calculer ensuite $f^2 = f \circ f$ et vérifier que f^2 est diagonalisable. En déduire que pour P un polynôme, et f un endomorphisme, on peut très bien avoir que $P(f)$ est diagonalisable sans pour autant que f le soit.

Solution : (1) Dire que λ est valeur propre de f c'est dire qu'il existe $u \in E\backslash\{0\}$ tel que $f(u) = \lambda u$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a alors

$$f^p(u) = \lambda^p u$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P(f).(u) &= \sum_{i=0}^{k} a_i f^i(u) \\ &= \sum_{i=0}^{k} a_i \lambda^i u \end{aligned}$$

et on voit que $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(f)$. Dire que f est diagonalisable c'est dire qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E qui est constituée de vecteurs propres de f. Le petit calcul ci-dessus montre que si u est vecteur propre de f alors u est aussi vecteur propre de $P(f)$. La base $\mathcal{B}$ est donc aussi constituée de vecteurs propres de $P(f)$. Par suite $P(f)$ est diagonalisable dès que f l'est.

(2) La matrice de représentation de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Si on note Q le polynôme caractéristique de f alors

$$\begin{aligned} Q(X) &= \det \begin{pmatrix} 1-X & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1-X \end{pmatrix} \\ &= (X+1)(X-1)+2 \\ &= X^2+1 \end{aligned}$$

Donc f n'a pas de valeurs propres réelles. On en déduit que f n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. La matrice de représentation dans $\mathcal{B}$ de $f^2 = f \circ f$ est donnée (cf. cours) par $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f^2) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^2$. Donc

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f^2) &= \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$ et que, bien évidemment, f^2 est diagonalisable. Par suite, pour P un polynôme, et f un endomorphisme, on peut très bien avoir que $P(f)$ est diagonalisable sans pour autant que f le soit.