Algèbre bilinéaire et Intégration

par

Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise

Année 2019-2020

Note : Les exercices avec une étoile sont plus difficiles que les autres.

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $u \in End(E)$ un endomorphisme de E. On suppose que u est symétrique et que

$$\langle u(x), x \rangle = 0$$

pour tout $x \in E$. Montrer que u est l'endomorphisme nul.

Corrigé : Comme u est symétrique, u est diagonalisable, et même u est diagonalisable dans une base orthonormée de E. En particulier il existe $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ une base (orthonormée) qui diagonalise u. Si λ_i est la valeur propre associée à e_i alors

$$\langle u(e_i), e_i \rangle = \lambda_i \|e_i\|^2 \ .$$

Par hypothèse

$$\langle u(e_i), e_i \rangle = 0 \ ,$$

et puisque $\|e_i\| \neq 0$, on récupère $\lambda_i = 0$. Comme i est quelconque, $\lambda_i = 0$ pour tout i, et il suit que $M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(u)$ est la matrice nulle. En particulier u est l'endomorphisme nul.

Exercice : 2 Soit A une matrice réelle symétrique. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^p = 0$. Montrer que A est la matrice nulle.

Corrigé : Comme A est symétrique elle est diagonalisable. En particulier il existe une matrice orthogonale P (i.e. $P^{-1} = {}^tP$) et une matrice diagonale D telles que

$$ {}^tPAP = D \ . $$

On en déduit que

$$ {}^tPA^pP = D^p \ , $$

et si $A^p = 0$ alors $D^p = 0$. Si la diagonale de D est constituée des λ_i, alors D^p est encore diagonale et elle est constituée des λ_i^p. On a donc $\lambda_i^p = 0$ pour tout i, donc $\lambda_i = 0$ pour tout i. Par suite $D = 0$. Comme P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$, on a que $A = PD{}^tP$. D'où $A = 0$.

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soient $u, v \in End(E)$ deux endomorphismes de E. Montrer que $(v \circ u)^\star = u^\star \circ v^\star$. On suppose maintenant que u et v sont symétriques. Montrer que $v \circ u$ est symétrique si et seulement si $v \circ u = u \circ v$.

Corrigé : Soient $x, y \in E$ quelconques. On a

$$\begin{aligned}
\langle (v \circ u)(x), y \rangle &= \langle v\left(u(x)\right), y \rangle \\
&= \langle u(x), v^\star(y) \rangle \\
&= \langle x, u^\star\left(v^\star(y)\right) \rangle \\
&= \langle x, (u^\star \circ v^\star)(y) \rangle \ .
\end{aligned}$$

Par suite, comme x et y sont quelconques, $(v \circ u)^\star = u^\star \circ v^\star$.

On suppose maintenant que u et v sont symétriques, donc que $u^\star = u$ et $v^\star = v$. Supposons que $v \circ u$ est symétrique. Alors $(v \circ u)^\star = v \circ u$. Comme par ailleurs on a aussi $u^\star \circ v^\star = u \circ v$, et comme $(v \circ u)^\star = u^\star \circ v^\star$, on en déduit que $v \circ u = u \circ v$.

Réciproquement supposons que $v \circ u = u \circ v$. Comme $u^\star \circ v^\star = u \circ v$ on a écrit que $v \circ u = u^\star \circ v^\star$. Par suite, comme $(v \circ u)^\star = u^\star \circ v^\star$, on a écrit que $(v \circ u)^\star = v \circ u$. Donc que $v \circ u$ est symétrique.

En conclusion $v \circ u$ est symétrique si et seulement si $v \circ u = u \circ v$.

Exercice 4 : Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^5+1} dx \quad , \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{2x+3}{x^2+5} dx \quad ,$$
$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)\sin(x)}{x^2} dx \quad , \quad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{x}(3x^2+1)} dx \ .$$

Justifier vos réponses. On précisera notamment en quelles bornes ces intégrales sont généralisées.

Corrigé : (1) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^5+1} \ .$$

La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.
L'intégrale I_1 est généralisée en $+\infty$. On a

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 f(x) = 1 \ .$$

Comme $3 > 1$, le critère de Riemann donne que I_1 est convergente.

(2) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+5} \ .$$

La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.
L'intégrale I_2 est généralisée en $+\infty$. On a

$$\lim_{x \to +\infty} x f(x) = 2 \ .$$

Comme $1 \leq 1$, le critère de Riemann donne que I_2 est divergente.

(3) Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{\cos(x)\sin(x)}{x^2} \ .$$

La fonction f est continue et positive sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. L'intégrale I_3 est généralisée en 0. On a

$$\lim_{x \to 0^+} x f(x) = 1 \ .$$

Comme $1 \geq 1$, le critère de Riemann donne que I_3 est divergente.

(4) Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{2x + 3}{\sqrt{x}(3x^2 + 1)} \ .$$

La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}^{+\star} =]0, +\infty[$.
L'intégrale I_4 est généralisée en 0 et en $+\infty$. On a

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} f(x) = 3 \ .$$

Comme $\frac{1}{2} < 1$, le critère de Riemann donne que I_4 est convergente en 0. On a encore

$$\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}f(x) = \frac{2}{3} \ .$$

Comme $\frac{3}{2} > 1$, le critère de Riemann donne que I_4 est convergente en $+\infty$. Comme I_4 est convergente à la fois en 0 et en $+\infty$ elle est convergente.

Exercice 5 : On considère, pour tout x réel, l'intégrale

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \sin(x\cos t)dt \ .$$

(1) Montrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(0)$.

Corrigé : (1) En vertue des théorèmes généraux, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \sin(x \cos(y))$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$. On en déduit (théorème de cours) que F est continue sur $\mathbb{R}$.

(2) La fonction f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ en tout point de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \cos(x \cos(t)) \cos(t)$$

pour tous $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. En vertue des théorèmes généraux, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. On en déduit que F est dérivable de dérivée

$$F'(x) = \int_0^{\pi/2} \cos\left(x\cos(t)\right)\cos(t)dt$$

en tout point $x \in \mathbb{R}$. En particulier,

$$F'(0) = \int_0^{\pi/2} \cos(t)dt = [\sin(t)]_0^{\pi/2} = 1\ .$$

Exercice 6 : Calculer les intégrales multiples

$$I = \int\int_{D_1} \cos(x+y)dxdy \quad \text{et} \quad J = \int\int_{D_2} \left(1 + x^2y^3\right) dxdy$$

où $D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq \pi \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$, et
$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq y \leq x \leq 1\right\}$.

Corrigé : Les fonctions $(x,y) \to \cos(x+y)$ et $(x,y) \to 1 + x^2y^3$ sont, en vertue des théorèmes généraux, continues sur $\mathbb{R}^2$. Par Fubini,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \cos(x+y) dy \right) dx \\
&= \int_0^{\pi} [\sin(x+y)]_{y=0}^{y=\pi/2} \, dx \\
&= \int_0^{\pi} \cos(x) dx - \int_0^{\pi} \sin(x) dx \\
&= [\sin(x)]_0^{\pi} + [\cos(x)]_0^{\pi} \\
&= -2 \, .
\end{aligned}
$$

Pour calculer J on écrit que

$$D_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x \right\} \ .$$

On peut alors appliquer Fubini pour les domaines en piles pour calculer J. On a

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \left(\int_0^x (1 + x^2 y^3) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[y + \frac{1}{4} x^2 y^4 \right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 x dx + \frac{1}{4} \int_0^1 x^6 dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{28} = \frac{15}{28} \ . \end{aligned}$$

Exercice 7 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E. On note B la forme bilinéaire sur E définie par

$$B(x, y) = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2 - 2(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

pour tous $x = \sum_{i=1}^{2} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{2} y_i e_i$.

(1) Montrer que B est un produit scalaire sur E.

(2) Trouver une base orthonormée pour B.

Corrigé : (1) On vérifie facilement que B est bilinéaire symétrique. Reste à montrer que B est définie positive. On a

$$\begin{aligned} B(x,x) &= 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 \\ &= 2(x_1 - x_2)^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $B(x,x) \geq 0$ pour tout x et que $B(x,x) = 0$ si et seulement si $x_1 = x_2$ et $x_2 = 0$, et donc si et seulement si $x_1 = x_2 = 0$. Donc B est bien définie positive. Par suite B est un produit scalaire.

(2) On utilise Gram-Schmidt en partant de $\mathcal{B}$. Si $\|\cdot\|$ est la norme associée à B, alors

$$\|e_1\|^2 = B(e_1, e_1) = 2 \; .$$

On pose

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \; .$$

On calcule

$$B(e_2, \tilde{e}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} B(e_1, e_2) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \; .$$

On pose

$$x = e_2 - B(e_2, \tilde{e}_1)\tilde{e}_1 = (1, 1) \; .$$

On a $\|x\| = 1$ et on pose

$$\tilde{e}_2 = x = e_2 - B(e_2, \tilde{e}_1)\tilde{e}_1 = (1, 1) \; .$$

Alors $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est une base orthonormée pour $\mathcal{B}$.

Exercice 8 : Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Montrer que A est diagonalisable. Trouver une matrice orthogonale P pour laquelle ${}^tPAP$ est diagonale.

Corrigé : La matrice A est symétrique, donc diagonalisable et il existe P orthogonale telle que ${}^tPAP$ est diagonale. Soient $E = \mathbb{R}^3$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (elle est orthonormée) et $f \in End(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme défini par

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = A \ .$$

Alors f est diagonalisable, qui plus est dans une base orthonormée $\tilde{\mathcal{B}}$ pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La matrice orthogonale P recherchée est alors donnée par $P = M_{\mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}}$ (cours). Le polynôme caractéristique de f est donné par

$$P(X) = -X(X-3)^2 + 24X + 8 = -X^3 + 6X^2 + 15X + 8 \ .$$

On remarque que $P(-1) = 0$. Par suite P se factorise en

$$P(X) = -(X+1)(X^2 + \alpha X - 8)$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On trouve $\alpha + 1 = -6$ et $\alpha - 8 = -15$ de sorte que $\alpha = -7$. Par suite

$$\begin{aligned} P(X) &= -(X+1)(X^2 - 7X - 8) \\ &= -(X+1)^2(X-8) \ . \end{aligned}$$

Les valeurs propres de f sont -1 et 8. Soient E_{-1} et E_8 les espaces propres associés. On sait déjà que E_8 est de dimension 1, et comme f est diagonalisable E_{-1} est forcément de dimension 2. On trouve que

$$\begin{aligned} E_{-1} &= \{(x,y,z) \ / \ 2x + y + 2z = 0\} \\ &= \{x(1,-2,0) + z(0,-2,1) \ , \ x, z \in \mathbb{R}\} \ . \end{aligned}$$

Soient $u = (1,-2,0)$ et $v = (0,-2,1)$. Alors (u,v) est génératrice pour E_{-1}. On vérifie facilement que (u,v) est aussi libre. Donc (u,v) est une base pour E_{-1}. On orthonormalise maintenant (u,v) en appliquant Gram-Schmidt. On a $\|u\|^2 = 5$. On pose

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} u = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right) \ .$$

On calcule

$$\langle v, \tilde{e}_1 \rangle = \frac{4}{\sqrt{5}} \ .$$

On pose

$$\tilde{v} = v - \langle v, \tilde{e}_1 \rangle \tilde{e}_1 = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 1 \right) \ .$$

On a

$$\|\tilde{v}\|^2 = \frac{45}{25} = \frac{9}{5} \ .$$

On pose

$$\tilde{e}_2 = \frac{\sqrt{5}}{3} \tilde{v} = \left(-\frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3} \right) \ .$$

Alors $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est une base orthonormée de E_{-1}.

Indépendamment, on trouve que

$$\begin{aligned} E_8 &= \{(x,y,z)\ /\ x = z = 2y\} \\ &= \{y(2,1,2)\ ,\ y \in \mathbb{R}\}\ . \end{aligned}$$

Donc E_8 est la droite vectorielle de vecteur de base $w = (2,1,2)$. On a $\|w\| = 3$. On pose

$$\tilde{e}_3 = \frac{1}{3}w = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\ .$$

Alors (cours) la famille $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est une base orthonormée et si

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

on a que

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E. Soit α un réel. On note B la forme bilinéaire sur E définie par

$$B(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - \alpha^2 (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

pour tous $x = \sum_{i=1}^{2} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{2} y_i e_i$.

(1) Sous quelle condition portant sur α la forme B est-elle un produit scalaire ?

(2) On suppose $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Trouver une base orthonormée pour B.

Corrigé : (1) Il est clair que B est bilinéaire symétrique. Reste à déterminer sous quelle(s) condition(s) portant sur α a-t-on que B est définie positive. On a

$$\begin{aligned} B(x,x) &= x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha^2 x_1 x_2 \\ &= \alpha^2 (x_1 - x_2)^2 + (1-\alpha^2)(x_1^2 + x_2^2)\ . \end{aligned}$$

Si $|\alpha| < 1$, et donc si $\alpha^2 < 1$, alors $B(x,x) \geq 0$ pour tout x et $B(x,x) = 0$ si et seulement si $x = 0$. Si $|\alpha| = 1$, donc si $\alpha^2 = 1$, alors $B(x,x) \geq 0$ pour tout x mais il y a des vecteurs isotropes (non nuls). Par exemple $x = (1,1)$ est isotrope. Si $|\alpha| > 1$, et donc si $\alpha^2 > 1$, alors B n'est même plus positive. Par exemple, si $x = (1,1)$, alors $B(x,x) = 2(1-\alpha^2)$ est strictement négatif. En conclusion, B est un produit scalaire si et seulement si $|\alpha| < 1$.

(2) On pose $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On a $0 < \alpha < 1$. Donc B est un produit scalaire. On utilise Gram-Schmidt en partant de $\mathcal{B}$. Si $\|\cdot\|$ est la norme associée à B, alors $\|e_1\|^2 = B(e_1, e_1) = 1$. On pose $\tilde{e}_1 = e_1 = (1, 0)$. On calcule $B(e_2, \tilde{e}_1) = -\frac{1}{2}$. On pose

$$x = e_2 - B(e_2, \tilde{e}_1)\tilde{e}_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right) .$$

On calcule $\|x\|^2 = B(x, x) = \frac{3}{4}$ et on pose

$$\tilde{e}_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) .$$

Alors $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est une base orthonormée pour $\mathcal{B}$.

Exercice 10 : Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

La matrice A est-elle diagonalisable ?

Corrigé : On calcule le polynôme caractéristique P de A :

$$\begin{aligned} P(X) &= \det \begin{pmatrix} -X & 1 & 0 \\ -4 & 4-X & 0 \\ -2 & 1 & 2-X \end{pmatrix} \\ &= X(X-2)(4-X) + 4(2-X) \\ &= -(X-2)(X^2-4X+4) = -(X-2)^3 \end{aligned}$$

Si A était diagonalisable il existerait P inversible telle que

$$P^{-1}AP = 2\mathrm{Id}_3$$

où Id_3 est la matrice identité 3×3. Mais on aurait alors $A = 2P\mathrm{Id}_3P^{-1} = 2\mathrm{Id}_3$, ce qui est faux. Donc A n'est pas diagonalisable.

Exercice 11 : Soit $f :]0, +\infty[\times[0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,t) = \frac{1}{1+xt^2}\ .$$

Montrer que $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Corrigé : Pour tout $x > 0$ fixé, la fonction $t \to f(x,t)$ est continue en t (donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$), elle est positive et

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 f(x,t) = \frac{1}{x}$$

de sorte que, d'après le critère de Riemann, $F(x)$ existe bien. En vertue des théorèmes généraux, f est continue sur $]0, +\infty[\times[0, +\infty[$. De plus, pour tout $a > 0$ et tout $x \in [a, +\infty[$,

$$0 \le f(x,t) \le g(t) = \frac{1}{1+at^2}$$

avec g qui vérifie que $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge. On a donc une convergence normale sur $[a, +\infty[\times[0, +\infty[$. Par théorème du cours F est donc continue sur $[a, +\infty[$. Comme $a > 0$ est quelconque, F est continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 12 : Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le domaine donné par

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x^2 \leq y \leq 1\right\} \ .$$

Calculer $I = \displaystyle\int\int_D x^3 y^4 dxdy$.

Corrigé : D'après les théorèmes généraux, la fonction $(x, y) \to x^3 y^4$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. On peut appliquer Fubini en piles :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 x^3 y^2 dy\right) dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 \left[y^3\right]_{x^2}^1 dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 dx - \frac{1}{3}\int_0^1 x^9 dx \\ &= \frac{1}{12}\left[x^4\right]_0^1 - \frac{1}{30}\left[x^{10}\right]_0^1 = \frac{1}{20} \ . \end{aligned}$$

Exercice 13* : (1) Montrer que si une matrice réelle carrée A est diagonalisable, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de A et si $k_1, \ldots, k_p$ sont les dimensions des espaces propres correspondants, alors sa trace $tr(A)$ est donnée par $tr(A) = \sum_{i=1}^{p} k_i \lambda_i$.

(2) Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Calculer les déterminants de $A + 3Id_3$ et $A - 3Id_3$, où Id_3 est la matrice identité 3×3. Montrer que A est diagonalisable. Calculer la trace $tr(A)$ de A. En déduire quelles sont les valeurs propres de A et quelles sont leurs multiplicités.

(3) Trouver une matrice orthogonale P pour laquelle ${}^tPAP$ est diagonale.

Corrigé : (1) Soit n la taille de A. On pose $E = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et u l'endomorphisme de E défini par $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(u) = A$. Comme A est diagonalisable, u est diagonalisable. En particulier il existe $\tilde{\mathcal{B}}$ une base de E qui diagonalise u. La matrice $M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(u)$ est constituée des valeurs propres de u (donc des λ_i) répétées autant de fois que la dimension des espaces propres correspondant (dont répétées k_i fois). On sait (cours) que pour toutes bases $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$,

$$\mathrm{trace} M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(u) = \mathrm{trace} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(u) \ .$$

La trace de $M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(u)$ est ici clairement constituée de la somme des $k_i\lambda_i$. On en déduit que la trace de A est constituée elle aussi de la somme des $k_i\lambda_i$. D'où la première question.

(2) Clairement A est symétrique. Elle est donc diagonalisable (et il existe P une matrice orthogonale et D une matrice diagonale telles que ${}^tPAP = D$). Par ailleurs,

$$\text{trace}A = 1 + 1 + 1 = 3 \ .$$

On calcule

$$\det(A + 3\text{Id}_3) = \det \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = 0$$

et

$$\det(A - 3\text{Id}_3) = \det \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Il suit que -3 et 3 sont toutes deux valeurs propres de A. Il y a alors deux possibilités. Soit il a une troisième valeur propre $\lambda_3 \notin \{-3, 3\}$. Les espaces propres sont alors tous de dimension 1 (trois valeurs propres distinctes en dimension 3). Mais alors, avec la question (1), on devrait avoir $-3 + 3 + \lambda_3 = 3$ ce qui est impossible si $\lambda_3 \notin \{-3, 3\}$. Soit autrement, il n'y a que deux valeurs propres

-3 et 3, et puisque A est diagonalisable, l'une des deux a un espace propre de multiplicité 1 et l'autre de multipilicité 2. Notons $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = 3$. La seule possibilité avec la question (1) est que $k_1 = 1$ et que $k_2 = 2$ pour avoir effectivement $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = 3$. Il y a donc 2 valeurs propres -3 et 3. L'espace propre associée à -3 est de dimension 1. L'espace propre associé à 3 est de dimension 2.

(3) Soient $E = \mathbb{R}^3$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (elle est orthonormée) et $f \in End(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme défini par

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = A\ .$$

Alors f est symétrique et f et A ont les mêmes valeurs propres et les mêmes espaces propres. Notons E_{-3} et E_3 les espaces propres respectivement pour les valeurs propres -3 et 3. On sait (cours) que E_{-3} est orthogonal à E_3 (les espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux). Il s'agit alors de trouver une base normée $(\tilde{e}_1)$ de E_{-3} (i.e. un vecteur non nul de norme 1 de E_{-3}) et une base orthonormée

$(\tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ de E_3. En effet on aura alors que $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est une base orthonormée de E (cours), que $P = M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}$ est une matrice orthogonale (cours) et que (toujours d'après le cours)

$$ {}^tP \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} . $$

La matrice recherchée est P et, en conclusion, il nous faut déterminer des bases orthonormées de E_{-3} et de E_3. Comme E_3 est de dimension 2, on utilisera le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

On a

$$ E_{-3} = \left\{ (x, y, z) \ / \ \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} $$

Or

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x = y + z \\ 2y = x + z \\ 2z = x + y \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y + z \\ 2y = x + z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y + z \\ x = y \end{cases} \qquad \Leftrightarrow x = y = z$$

Par suite

$$E_{-3} = \{(x, x, x) \ / \ x \in \mathbb{R}\} \ .$$

On en déduit que $e = (1, 1, 1)$ est une base de E_{-3}. On a $\|e\| = \sqrt{3}$. On pose

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

et alors $(\tilde{e}_1)$ est une base normée de E_{-3}. Par ailleurs,

$$E_3 = \left\{ (x,y,z)\ /\ \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \{(x,y,z)\ /\ x+y+z=0\}$$
$$= \{x(1,0,-1)+y(0,1,-1)\ /\ x,y\in\mathbb{R}\}\ .$$

La famille composée des vecteurs $(1,0,-1)$ et $(0,1,-1)$ est donc génératrice pour E_3. Elle est clairement libre puisque

$$\lambda(1,0,-1)+\mu(0,1,-1)=(0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow (\lambda,\mu,-\lambda-\mu)=(0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \lambda=\mu=0\ .$$

Posons $u=(1,0,-1)$ et $v=(0,1,-1)$. Alors (u,v) est une base de E_3. On utilise maintenant Gram-Schmidt pour l'orthonormaliser.

On a $\|u\| = \sqrt{2}$. On pose

$$\tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1) \ .$$

On calcule $\langle v, \tilde{e}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et on pose ensuite

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= v - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{e}_2 \\ &= (0, 1, -1) - (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) \\ &= -(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

On a $\|\tilde{v}\|^2 = \frac{3}{2}$. On pose

$$\tilde{e}_3 = -\sqrt{\frac{2}{3}}(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}) \ .$$

La famille $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est alors une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ qui diagonalise f. La matrice $P = M_{\mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}}$ convient. On a

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

et

$${}^tP \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Exercice 14* **:** Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées $n \times n$. On rappelle que

$$\langle M, N \rangle = tr({}^t MN)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que pour toute matrice inversible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $tr(A^{-1}MA) = tr(M)$.

(2) Montrer que pour toute matrice inversible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si A est symétrique alors A^{-1} est symétrique.

(3) Soit maintenant A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et inversible. Soit $u \in End\,(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $u(M) = AMA^{-1}$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que u est symétrique pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Corrigé : (1) Notons $A = (a_{ij})$, $A^{-1} = (b_{ij})$, $M = (x_{ij})$, $MA = (c_{ij})$ et $A^{-1}MA = (d_{ij})$. On a

$$c_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} x_{i\alpha} a_{\alpha j}$$

pour tous i, j, et par suite

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \sum_{\beta=1}^{n} b_{i\beta} c_{\beta j} \\ &= \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} b_{i\beta} x_{\beta\alpha} a_{\alpha j} \end{aligned}$$

pour tous i, j. Comme $AA^{-1} = Id$,

$$\sum_{\gamma=1}^{n} a_{i\gamma} b_{\gamma j} = \delta_{ij}$$

pour tous i, j, où les δ_{ij} sont les symbôles de Kroenecker (définis par $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon). Par suite, pour toute matrice inversible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
tr(A^{-1}MA) &= \sum_{i=1}^{n} d_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n} b_{i\beta}x_{\beta\alpha}a_{\alpha i} \\
&= \sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n} x_{\beta\alpha}\sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i}b_{i\beta} \\
&= \sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n} x_{\beta\alpha}\delta_{\alpha\beta} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} x_{\alpha\alpha} \\
&= tr(M)\ .
\end{aligned}$$

(2) Si A est symétrique alors A est diagonalisable. Plus précisement, il existe P orthogonale (i.e. ${}^tP = P^{-1}$) et il existe D diagonale telle que

$$ {}^tPAP = D \ . $$

On en déduit que D est inversible, que $A = PD{}^tP$ puis que

$$ A^{-1} = P(D^{-1}){}^tP \ . $$

La matrice D^{-1} est diagonale. Donc

$$ {}^tA^{-1} = {}^t(P(D^{-1}){}^tP) = P(D^{-1}){}^tP = A^{-1} \ . $$

Par suite A^{-1} est aussi symétrique.

(3) On veut montrer que pour toutes matrices $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$ \langle u(M), N \rangle = \langle M, u(N) \rangle \ . $$

Pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}
\langle u(M), N\rangle &= tr\left({}^t(AMA^{-1})N\right) \\
&= tr\left({}^t(A^{-1}){}^tM{}^tAN\right) \\
&= tr\left(A^{-1}{}^tMAN\right) \\
&= tr\left(A^{-1}\left({}^tMANA^{-1}\right)A\right) \\
&= tr\left({}^tMANA^{-1}\right) \\
&= \langle M, u(N)\rangle \ .
\end{aligned}$$

En particulier, u est symétrique.

Exercice 15⋆ : (1) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et soient $f, g \in End(E)$ deux endomorphismes de E. On suppose que f et g commutent, et donc que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que f laisse stables les sous espaces propres de g (si E_λ est un sous espace propre de g, alors $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$), et donc aussi que g laisse stables les espaces propres de f. En déduire que si g a n valeurs propres distinctes et si $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres de g, alors $\mathcal{B}$ diagonalise f.

(2) Soit A la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} .$$

Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (l'espace des matrices réelles 3×3) l'équation $X^2 = A$.

(3) Même question avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Corrigé : (1) Soit E_λ un espace propre pour g. Alors E_λ est constitué des x qui satisfont que $g(x) = \lambda x$. Pour $x \in E_\lambda$, on a

$$g\left(f(x)\right) = f\left(g(x)\right) = f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

et donc $f(x) \in E_\lambda$. Soit $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$. En d'autres termes : f stabilise les espaces propres de g et réciproquement (le problème est symétrique en f et g).

Supposons maintenant que g a n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ en dimension n. Les espaces propres correspondant sont alors de dimensions 1 et si $\mathcal{B}$ est une base qui diagonalise g alors $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ où (à permutation près) $e_i \neq 0$ est un vecteur propre pour λ_i. L'espace propre E_{λ_i} est la droite vectorielle de base e_i. On a $f(e_i) \in E_{\lambda_i}$ en raison de ce qui a été dit plus haut. Donc $f(e_i) = \mu_i e_i$ pour un certain $\mu_i \in \mathbb{R}$. La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est alors la matrice diagonale constituée des μ_i. En particulier, $\mathcal{B}$ diagonalise aussi f.

(2) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note $g \in End(E)$ l'endomorphisme de E défini par $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g) = A$. On cherche $X = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ vérifiant $X^2 = A$.

Si $X^2 = A$ alors $AX = XA = X^3$ et donc f et g commutent. Le polynôme caractéristique de A est donné (après calculs) par

$$P_A(X) = -X^3 + 6X^2 - 11X + 6 \ .$$

On voit que 1 est racine de ce polynôme. On trouve alors

$$P_A(X) = -(X-1)(X^2 - 5X + 6) = -(X-1)(X-2)(X-3) \ .$$

Donc g a trois valeurs propres distinctes $1, 2, 3$ en dimension 3. On en déduit que g est diagonalisable et, en vertue de ce qui a été dit ci-dessus, que si $X^2 = A$ alors f est aussi diagonalisable qui plus est dans la même base que celle qui diagonalise g. Donc, autrement dit, il existe une même matrice inversible P telle que

$$P^{-1}XP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

On a

$$P^{-1}X^2P = (P^{-1}XP)^2$$

et donc on veut $a^2 = 1$, $b^2 = 2$ et $c^2 = 3$, soit

$$\begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm\sqrt{2} \\ c = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Il y a 8 solutions en tout qui sont données par

$$X = P \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{3} \end{pmatrix} P^{-1} \ .$$

Reste à déterminer P et P^{-1} pour être complet. Pour déterminer P il faut déterminer des vecteurs directeurs des espaces propres de

g. Un vecteur u de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{B}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1 si et seulement si

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 0 \\ 6x - 5y + 4z = 0 \\ 4x - 4y + 4z = 0 \end{cases}$$

soit encore $y = 2x$ et $z = x$. Donc $e_1 = (1, 2, 1)$ est un vecteur directeur de E_1. On fait de même pour les espaces propres E_2 et E_3 et on trouve comme possibles vecteurs directeurs $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (1, 2, 2)$. Donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Par calcul (différentes méthodes sont possibles) on trouve ensuite que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les 8 solutions de notre problème sont donc données par les 8 expressions

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

(3) On fait le même raisonnement avec B. Le polynôme caractéristique de B est donné (après calculs) par

$$P_B(X) = X(X+2)(1-X) - 8(1-X) = -(X-1)(X-2)(X+4) .$$

Le même raisonnement que précédemment nous amène à résoudre l'équation

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} .$$

soit encore

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} .$$

Cette équation est impossible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car il n'existe pas de réel c tel que $c^2 = -4$. L'équation $X^2 = B$ n'a pas de solution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Fin des exercices