CERGY PARIS UNIVERSITÉ

INTÉGRATION

Licence L2
Emmanuel Hebey
Année 2021-2022

TABLE DES MATIÈRES

Licence L2 - 1er Semestre
19,5h CM

INTÉGRATION

EMMANUEL HEBEY

Le cours concerne principalement l'intégrale de Riemann mais aussi ses extensions aux intégrales généralisées, aux fonctions définies par une intégrale et aux intégrales doubles.

Le chapitre 1 est consacré à l'intégrale de Riemann à proprement parlé, sa construction et les liens entre intégrale et primitive. Le chapitre 2 traite de la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples et de leur intégration, de l'intégration des produits de cosinus et sinus et des intégrales de Wallis. Le chapitre 3 traite des intégrales généralisées, des différents critères qui permettent de conclure à la convergence des intégrales et de l'interversion limites-intégrales. Le chapitre 4 traite des fonctions définies par une intégrale (continuité, dérivabilité, Fubini). Les intégrales doubles sont abordées au chapitre 5.

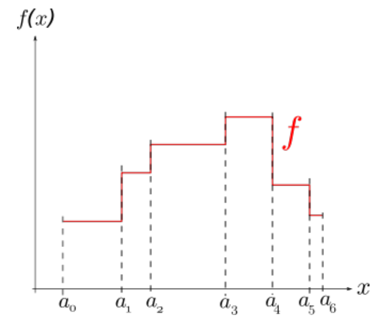
Date: 27 Octobre 2021.

CHAPITRE 1

L'intégrale de Riemann

1. Premières constructions

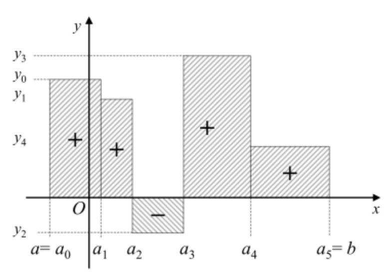
Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a < b$ deux réels. Soit $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$, une famille finie de points de $[a, b]$ telle que $a_0 = a$, $a_n = b$, et $a_{i-1} < a_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. On dit alors que σ est une **subdivision** de $[a, b]$. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision σ de $[a, b]$ et des réels c_i pour $i = 1, \ldots, n$, tels que $f \equiv c_i$ sur $]a_{i-1}, a_i[$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ (les valeurs aux points a_i étant, selon le choix, fixées comme égales à c_i ou c_{i+1}).



Pour une fonction f en escalier comme ci-dessus, qui vaut c_i sur les intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ d'une subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$, on définit

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})c_i \ .$$

C'est l'aire (signée) hachurée sur le graphique ci-dessous (ici, par rapport à nos notations, $y_i = c_{i+1}$). L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ ne dépend pas de la subdivision σ.



On a alors la définition suivante de l'intégrabilité d'une fonction.

Définition 1.1. *Soient $a < b$ deux réels. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que $|f - \varphi_\varepsilon| \leq \psi_\varepsilon$ dans $[a, b]$ et $\int_a^b \psi_\varepsilon(x)dx < \varepsilon$.*

De cette définition on tire très facilement le résultat suivant.

Lemme 1.1. *Soient $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si et seulement si il existe des suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que $|f-\varphi_n| \le \psi_n$ sur $[a,b]$ pour tout n, et $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \psi_n(x)dx = 0$.*

Démonstration. On obtient le lemme à partir de la définition en posant $\varepsilon = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour chaque n on a deux fonctions en escalier $\varphi_n, \psi_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ telles que $|f-\varphi_n| \le \psi_n$ dans $[a,b]$ et $\int_a^b \psi_n(x)dx < \frac{1}{n}$. La réciproque est immédiate. □

La définition de l'intégrale de Riemann suit.

Définition 1.2. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$, $a < b$ deux réels, et si $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ sont deux suites de fonctions en escalier comme dans le lemme précédent, on pose*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_n(x)dx\ .$$

La limite existe toujours et la définition ne dépend pas du choix des suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$.

Démonstration. **(1)** On montre que la limite existe. Soient p, q deux entiers. On a $|\varphi_q - \varphi_p| \le |f-\varphi_p| + |f-\varphi_q|$. Donc

$$|\varphi_q - \varphi_p| \le \psi_p + \psi_q$$

sur $[a,b]$. On vérifie facilement que pour des fonctions en escalier $\tilde{f}, \tilde{g}$ sur un intervalle $[a,b]$, si $\tilde{f} \le \tilde{g}$ sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b \tilde{f}(x)dx \le \int_a^b \tilde{g}(x)dx\ .$$

De cette identité on tire facilement que pour toute fonction en escalier $\tilde{f}$ sur $[a,b]$,

$$\left|\int_a^b \tilde{f}(x)dx\right| \le \int_a^b |\tilde{f}(x)|dx\ .$$

On vérifie de même facilement que si $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont en escalier sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b \left(\tilde{f}+\tilde{g}\right)(x)dx = \int_a^b \tilde{f}(x)dx + \int_a^b \tilde{g}(x)dx\ .$$

Il suit de tout ceci que

$$\left|\int_a^b \varphi_q(x)dx - \int_a^b \varphi_p(x)dx\right| \le \int_a^b \psi_p(x)dx + \int_a^b \psi_q(x)dx\ ,$$

et puisque $\int_a^b \psi_p(x)dx \to 0$ lorsque $p \to +\infty$ et $\int_a^b \psi_q(x)dx \to 0$ lorsque $q \to +\infty$, on en déduit que la suite des intégrales $\int_a^b \varphi_n(x)dx$ est une suite de Cauchy réelle. Toute suite de Cauchy réelle converge. La limite existe donc.

(2) On montre l'indépendance de la définition par rapport au choix des suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$. Supposons que l'on ait deux familles $(\varphi_n)_n, (\psi_n)_n$ et $(\hat{\varphi}_n)_n, (\hat{\psi}_n)_n$

de suites de fonctions en escalier telles que

$$|f - \varphi_n| \leq \psi_n \text{ et } |f - \hat{\varphi}_n| \leq \hat{\psi}_n \text{ dans } [a, b], \text{ pour tout } n,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \hat{\psi}_n(x)dx = 0 \ .$$

On écrit que

$$\begin{aligned} |\varphi_n - \hat{\varphi}_n| &\leq |f - \varphi_n| + |f - \hat{\varphi}_n| \\ &\leq \psi_n + \hat{\psi}_n \end{aligned}$$

dans $[a, b]$, pour tout n. Comme précédemment, cela entraîne que

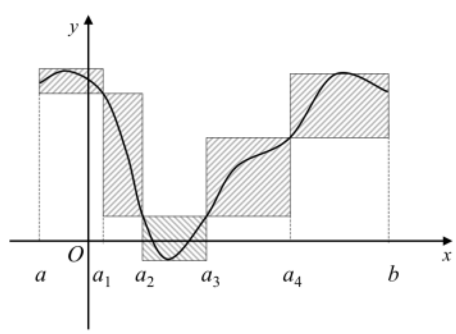
$$\left| \int_a^b \varphi_n(x)dx - \int_a^b \hat{\varphi}_n(x)dx \right| \leq \int_a^b \psi_n(x)dx + \int_a^b \hat{\psi}_n(x)dx \ ,$$

et donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \hat{\varphi}_n(x)dx \ .$$

D'où l'indépendance de la définition par rapport au choix des suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$. □

Dans le graphique qui suit, f est encadrée par deux fonctions en escalier ψ_1 et ψ_2 ($\psi_1 \leq f \leq \psi_2$), et si $\phi = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)$ et $\psi = \frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1)$, alors $|f - \phi| \leq \psi$ (un encadrement du type de ceux rencontrés ici).



2. Sommes de Riemann

On appelle **subdivision pointée** de $[a, b]$ tout couple (σ, ξ) constitué d'une subdivision $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[a, b]$ et d'une famille $\xi = (\xi_i)_{1\leq i\leq n}$ de points de $[a, b]$ tels que

$$a_{i-1} \leq \xi_i \leq a_i$$

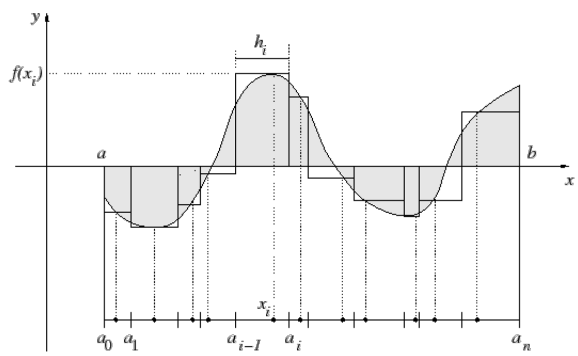
pour tout $i = 1, \ldots, n$. On appelle **pas d'une subdivision** $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ le réel positif

$$\delta(\sigma) = \max_{i=1,\ldots,n} |a_i - a_{i-1}| \ .$$

Si maintenant $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction, et (σ, ξ) est une subdivision pointée de $[a, b]$, avec $\sigma = (a_i)_{0 \le i \le n}$ et $\xi = (\xi_i)_{1 \le i \le n}$, on définit

$$S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) f(\xi_i) \ .$$

On dit que $S(f, \sigma, \xi)$ est la **somme de Riemann** de f associée à (σ, ξ). Sur un graphique, les sommes de Riemann ressemblent à ce qui suit (ici, par rapport à nos notations, $x_i = \xi_i$) :



Le théorème fondamental suivant a lieu.

Théorème 2.1. *Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$. Alors*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall (\sigma, \xi) \in \mathcal{S}, \delta(\sigma) < \eta$$
$$\Rightarrow \left| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon \ ,$$

où $\mathcal{S}$ parcourt l'ensemble des subdivisions pointées de $[a, b]$.

Démonstration. On démontre le théorème dans le cas particulier où f est continue. Une fonction qui est continue sur un compact, ici $[a, b]$, y est uniformément continue. Par suite,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x, y \in [a, b], |y - x| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon \ .$$

Etant donnée (σ, ξ) une subdivision pointée de $[a, b]$, avec $\sigma = (a_i)_{0 \le i \le n}$ et $\xi = (\xi_i)_{1 \le i \le n}$, on définit la fonction en escalier φ_σ par

$$\varphi_\sigma(x) = f(\xi_i) \text{ si } x \in [a_{i-1}, a_i[$$

et $\varphi_\sigma(b) = f(\xi_n)$. Etant donné $\varepsilon > 0$ il suit de l'uniforme continuité qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $\delta(\sigma) < \eta$ alors $|f - \varphi_\sigma| < \varepsilon/(b-a)$ sur $[a, b]$. On montre facilement, cf. le Lemme 4.5, qu'alors

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi_\sigma(x) dx \right| < \varepsilon$$

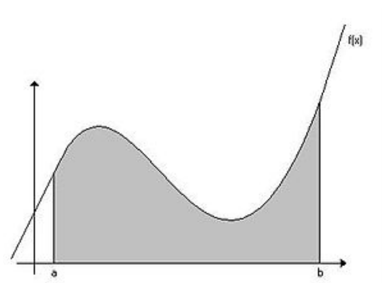
puisque $\int_a^b dx = b - a$. Or $\int_a^b \varphi_\sigma(x) dx = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) f(\xi_i)$. D'où le théorème dans le cas des fonctions continues. □

Il suit de ce théorème que si f est intégrable au sens de Riemann, alors pour toute suite $\left((\sigma_n, \xi_n)\right)_n$ de subdivisions pointées de $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} S(f, \sigma_n, \xi_n)$$

dès que $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(\sigma_n) = 0$.

En vertue de ce qui a été dit, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est en fait (peut être pensée) comme l'aire (signée) de la surface bloquée entre l'axe des x et le graphe de la fonction:



3. Continuité et intégrabilité

Le théorème central de cette section est le suivant.

Théorème 3.1. *Soient $a < b$ deux réels. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.*

Démonstration. On utilise qu'une fonction continue sur un compact (ici un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$) y est en fait uniformément continue. Donc on a, en vertue de ce résultat, que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \;/\; \forall x, y \in [a, b], |y - x| < \eta$$
$$\Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon\ .$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit $\sigma = (a_i)_{0\le i\le n}$ une subdivision de $[a, b]$ de pas $\delta(\sigma) < \eta$. On définit la fonction en escalier

$$\varphi_\varepsilon \equiv f(a_{i-1}) \text{ sur } [a_{i-1}, a_i[$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$. On a

$$|f - \varphi_\varepsilon| < \varepsilon$$

sur $[a, b]$ en vertue de l'uniforme continuité. La fonction $\psi_\varepsilon \equiv \varepsilon$ sur $[a, b]$ est elle aussi en escalier sur $[a, b]$ (puisque constante). On a

$$\int_a^b \psi_\varepsilon(x)dx = \varepsilon(b - a)\ .$$

Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, f est bien intégrable au sens de Riemann. $\square$

4. Propriétés élémentaires des intégrales

On commence avec le résultat suivant.

Lemme 4.1. *Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$. Alors f est bornée au sens où il existe $K > 0$ telle que $|f(x)| \leq K$ pour tout $x \in [a, b]$.*

Démonstration. La propriété est évidente puisque, en particulier, il existe $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions en escalier (donc bornées) telles que $|f - \varphi| \leq \psi$ sur $[a, b]$ (et $\int_a^b \psi(x)dx < 1$ par exemple). Donc $|f| \leq |\varphi| + \psi$ sur $[a, b]$, et si $K > 0$ est tel que $|\varphi| + \psi \leq K$ sur $[a, b]$, on récupère le résultat. □

On a aussi la relation de Chasles suivante.

Lemme 4.2 (Relation de Chasles)**.** *Soient $a < b < c$ trois réels. Une fonction $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, c]$ si et seulement si f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$. De plus on a la relation de Chasles: $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.*

Démonstration. On peut toujours insérer b dans une subdivision de $[a, c]$. On en déduit facilement que si f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, c]$ alors f est aussi intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$. La réciproque est tout aussi évidente. Pour des fonctions en escalier $\varphi : [a, c] \to \mathbb{R}$ on vérifie facilement que $\int_a^c \varphi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_b^c \varphi(x)dx$. On en déduit (il n'y a pas de difficulté) que l'identité s'étend aux fonctions intégrables au sens de Riemann. □

Le résultat de "positivité/croissance" suivant a lieu.

Lemme 4.3. *Soient $a < b$ deux réels. Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$. Si $f \leq g$ alors*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \ .$$

En particulier, l'intégrale d'une fonction positive ou nulle est positive ou nulle.

Démonstration. Soient $(\varphi_n)_n, (\psi_n)_n$ et $(\hat{\varphi}_n)_n, (\hat{\psi}_n)_n$ des suites de fonctions en escalier telles que

$$|f - \varphi_n| \leq \psi_n \text{ et } |g - \hat{\varphi}_n| \leq \hat{\psi}_n \text{ dans } [a, b], \text{ pour tout } n,$$
$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b \hat{\psi}_n(x)dx = 0 \ .$$

On écrit que

$$\begin{aligned} \varphi_n &\leq \varphi_n - f + f \\ &\leq |f - \varphi_n| + g \\ &\leq |f - \varphi_n| + |g - \hat{\varphi}_n| + \hat{\varphi}_n \\ &\leq \psi_n + \hat{\psi}_n + \hat{\varphi}_n \end{aligned}$$

sur $[a, b]$. Comme il n'y a là que des fonctions en escalier, on peut écrire que

$$\int_a^b \varphi_n(x)dx \leq \int_a^b \psi_n(x)dx + \int_a^b \hat{\psi}_n(x)dx + \int_a^b \hat{\varphi}_n(x)dx \ ,$$

et en passant à la limite en $n \to +\infty$, on obtient l'inégalité recherchée. □

On a aussi le lemme suivant qui précise le cas d'égalité dans le cas des fonctions continues.

Lemme 4.4 (bis)**.** *Soient $a < b$ deux réels. Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$. Si $f \leq g$ alors*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \ .$$

et il y a égalité si et seulement si $f = g$. En particulier, si $f \geq 0$ est continue et si $\int_a^b f(x)dx = 0$, alors $f = 0$.

Démonstration. On sait déjà que l'inégalité est vraie. En considérant $h = g - f$ il suffit de montrer que si $h \geq 0$ est continue et si $\int_a^b h(x)dx = 0$, alors $h = 0$. Mais si h n'est pas la fonction nulle, alors il existe $c \in [a, b]$ telle que $h(c) > 0$. Supposons pour fixer les idées que $c \in]a, b[$. Par continuité il existe alors $\eta > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que $h \geq \varepsilon_0$ sur $[c - \eta, c + \eta]$. Par Chasles et comparaisons on a alors que

$$\begin{aligned}\int_a^b h(x)dx &= \int_a^{c-\eta} h(x)dx + \int_{c_\eta}^{c+\eta} h(x)dx + \int_{c+\eta}^b h(x)dx \\ &\geq \int_{c-\eta}^{c+\eta} h(x)dx \\ &\geq \int_{c-\eta}^{c+\eta} \varepsilon_0 dx \\ &= 2\varepsilon_0\eta\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Donc h est obligatoirement la fonction nulle. □

Le lemme suivant a lieu.

Lemme 4.5. *Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$. Alors $|f|$ est aussi intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, et $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.*

Démonstration. L'intégrabilité de $|f|$ s'obtient en remarquant que si $|f - \varphi| \leq \psi$ sur $[a, b]$ alors $||f| - |\varphi|| \leq \psi$ sur $[a, b]$, et en remarquant que si φ est en escalier, alors $|\varphi|$ l'est aussi. Pour l'inégalité on remarque que $f \leq |f|$ et $-f \leq |f|$ de sorte que, avec les lemmes précédents,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\leq \int_a^b |f(x)|dx \text{ et} \\ -\int_a^b f(x)dx &\leq \int_a^b |f(x)|dx \ .\end{aligned}$$

Ce n'est rien d'autre que l'inégalité voulue. □

Le raffinement suivant a lieu dans le cas des fonctions continues.

Lemme 4.6 (bis)**.** *Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

avec égalité si et seulement si f est de signe constant.

Démonstration. On sait déjà que l'inégalité est vraie. Supposons qu'il y a égalité. Sans perdre en généralité, quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. Alors

$$\int_a^b \left(|f(x)| - f(x)\right) dx = 0 \ .$$

Or $|f| - f \geq 0$ et avec les lemmes précédents on obtient donc que $|f| = f$. En particulier, f est positive ou nulle. □

On a encore le résultat suivant.

Lemme 4.7. *Soient $a < b$ deux réels et $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a,b]$. La fonction $\Phi : \mathcal{L}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\Phi(f) = \int_a^b f(x)dx$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Démonstration. L'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ hérite d'une sructure naturelle d'espace vectoriel en tant que sous espace vectoriel de l'espace de toutes les fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Il est clair que si $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont en escalier, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_a^b \left(\varphi_1 + \lambda\varphi_2\right)(x)dx = \int_a^b \varphi_1(x)dx + \lambda \int_a^b \varphi_2(x)dx \ .$$

L'égalité passe ensuite facilement aux fonctions de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. □

Exercice: Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. On suppose que $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)^2dx$. Que peut-on dire sur f ?

Solution: On a donc

$$\int_0^1 \left(f(x) - f(x)^2\right) dx = \int_0^1 f(x)\left(1 - f(x)\right) dx = 0 \ .$$

Or $f \geq 0$ et $1-f \geq 0$. Donc par continuité (cf lemmes précédents), $f(1-f) = 0$ est la fonction nulle. On montre maintenant que si $f(1-f)$ est la fonction nulle, alors soit $f = 0$ est la fonction nulle soit $f = 1$ est la fonction constante 1. Supposons que $f(1-f) = 0$ est la fonction nulle. Si f n'est jamais nulle, alors $1 - f$ est forcèment la fonction nulle et donc f est la fonction constante 1. On a donc ce que l'on souhaite montrer. De même, si f est la fonction nulle, on a ce que l'on souhaite montrer. Reste un cas à traiter. Plus précisément il reste à traiter du cas où f n'est ni la fonction nulle, ni jamais nulle. Dans ce cas restant il existe $c < d$ dans $[a,b]$ avec $f(c) = 0$ et $f(d) \neq 0$ (ou $f(c) \neq 0$ et $f(d) = 0$). Comme $f(x) \neq 0$ et $f(x)\left(1 - f(x)\right) = 0$ entraînent que $f(x) = 1$, on est ramené à la situation où il existe $c < d$ dans $[a,b]$ avec $f(c) = 0$ et $f(d) = 1$ (ou $f(c) = 1$ et $f(d) = 0$). Le théorème des valeurs intermédiaires implique alors qu'il existe aussi $e \in]c,d[$ tel que $f(e) = \frac{1}{2}$. Mais alors $f(e)\left(1 - f(e)\right) \neq 0$, une contradiction. En conclusion, seules deux fonctions répondent à notre problème: la fonction nulle et la fonction constante égale à 1. □

Exercice: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \ .$$

Solution: On utilise qu'une fonction continue sur un compact (un fermé borné dans le cas de $\mathbb{R}$ fonctionne) est bornée et atteint ses bornes. En particulier donc, il existe $c_1, c_2 \in [a,b]$ tels que

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$$

pour tout $x \in [a,b]$. Mais alors, en intégrant cette double inégalité,

$$f(c_1) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq f(c_2)\ .$$

Le théorème des valeurs intermédiaires permet ensuite d'affirmer qu'il existe $c \in [c_1, c_2]$ (ou $[c_2, c_1]$ si $c_2 < c_1$) tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\ .$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. □

5. Primitives et intégrales

Le théorème suivant établit un lien entre primitives (calcul "inverse" de la dérivation) et intégrale (calcul d'aire).

Théorème 5.1 (Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral). *Soient $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann. Pour $t \in [a,b]$, on pose*

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx\ ,$$

avec la convention que $F(a) = 0$. Alors $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$. Si de plus f est continue sur $[a,b]$, alors F est dérivable sur $]a,b[$ et $F'(t) = f(t)$ pour tout $t \in]a,b[$.

Pour mémoire une primitive d'une fonction f est une fonction F qui est dérivable de dérivée f. Ce théorème a ceci de remarquable qu'il établit un lien entres primitives et aires des surfaces délimitées par l'axe des abscisses et les graphes des fonctions continues.

Démonstration. **(1)** On démontre la continuité de F. Pour fixer les idées, soit $t_0 \in]a,b[$. Par relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^t f(x)dx - \int_a^{t_0} f(x)dx\right| &\leq \left|\int_{t_0}^t f(x)dx\right| \\ &\leq \left|\int_{t_0}^t |f(x)|dx\right|\ ,\end{aligned}$$

où l'on adopte la convention que $\int_{t_0}^t = -\int_t^{t_0}$ si $t < t_0$. On sait que f est bornée sur $[a,b]$, et donc il existe $K > 0$ telle que $|f(x)| \leq K$ pour tout $x \in [a,b]$. Par suite

$$\left|\int_a^t f(x)dx - \int_a^{t_0} f(x)dx\right| \leq K\,|t - t_0|\ ,$$

et on voit que F est continue en t_0. Elle est même lipschitzienne sur $[a,b]$.

(2) On démontre la différentiablité de F, et le fait que F soit une primitive de f, sous l'hypothèse supplémentaire que f est continue sur $[a,b]$. Soit $t_0 \in]a,b[$. On écrit que

$$\begin{aligned}&\int_a^t f(x)dx - \int_a^{t_0} f(x)dx - (t-t_0)f(t_0)\\ &= \int_{t_0}^t \left(f(x) - f(t_0)\right)dx \ .\end{aligned}$$

Comme f est continue sur $[a,b]$,

$$\lim_{\eta\to 0^+} \sup_{\{x/|x-t_0|<\eta\}} |f(x)-f(t_0)| = 0 \ .$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\left|\int_{t_0}^t \left(f(x) - f(t_0)\right)dx\right| \le \left|\int_{t_0}^t |f(x)-f(t_0)|\,dx\right| \le \varepsilon|t-t_0|$$

pour tout t tel que $|t-t_0| < \eta$. On en déduit que

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0\ /\ \forall t \in]t_0-\eta, t_0+\eta[\\ &\left|\int_a^t f(x)dx - \int_a^{t_0} f(x)dx - (t-t_0)f(t_0)\right| < \varepsilon|t-t_0| \ .\end{aligned}$$

Cela entraîne que

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0\ /\ \forall t \in]t_0-\eta, t_0+\eta[, t \neq t_0,\\ &\left|\frac{\int_a^t f(x)dx - \int_a^{t_0} f(x)dx}{t-t_0} - f(t_0)\right| < \varepsilon \ .\end{aligned}$$

En particulier,

$$\lim_{t\to t_0, t\neq t_0} \frac{\int_a^t f(x)dx - \int_a^{t_0} f(x)dx}{t-t_0} = f(t_0) \ ,$$

ce qui prouve que F est dérivable en t_0 de dérivée en ce point $F'(t_0) = f(t_0)$. □

Le corollaire suivant a lieu.

Corollaire 5.1. *Soit $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ (au sens classique où f est en fait définie et C^1 sur un intervalle ouvert un peu plus grand que $[a,b]$). Alors $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.*

Démonstration. Les fonctions f et $t \to \int_a^t f'(x)dx$ sont deux primitives de f'. Deux primitives d'une même fonction diffèrent forcément d'une constante. Donc il existe C telle que

$$f(t) = \int_a^t f'(x)dx + C$$

pour tout $t \in [a,b]$. En prenant $t = a$ (ou $t \to a^+$) on voit que $C = f(a)$. En prenant ensuite $t = b$ on récupère le corollaire. □

Un second corollaire consiste en la formule d'intégration par parties.

Corollaire 5.2 (Formule d'intégration par parties)**.** *Soient $a < b$ deux réelles et $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$ (au sens classique où u et v sont en fait définies et C^1 sur un intervalle ouvert un peu plus grand que $[a, b]$). Alors*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \ ,$$

où $[uv]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Démonstration. On a la formule de dérivation produit

$$(uv)' = u'v + uv' \ .$$

Le corollaire précédent permet d'écrire que

$$\int_a^b (uv)'(x)dx = [uv]_a^b \ .$$

D'où le résultat. □

6. Quelques primitives usuelles

On liste quelques primitives usuelles dans ce qui suit.

$$\begin{aligned}
&\int x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \text{ pour } n \neq -1 \ , \\
&\int \cos(x) = \sin(x) \ , \ \int \sin(x) = -\cos(x) \ , \\
&\int e^x = e^x \ , \\
&\int \frac{1}{x} = \ln(x) \text{ sur } \mathbb{R}^{+\star} \ , \\
&\int \frac{1}{1+x^2} = \mathrm{Arctg}(x) \ .
\end{aligned}$$

Exercice: Montrer que $\int_0^1 xe^x dx = 1$.

Solution: On intègre par parties. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. Alors

$$\begin{aligned}
u(x) = x \quad &, \quad v'(x) = e^x \\
u'(x) = 1 \quad &, \quad v(x) = e^x
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x dx &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\
&= e - [e^x]_0^1 \\
&= e - (e-1) \\
&= 1 \ .
\end{aligned}$$

□

7. Formule de changement de variables

Le théorème suivant traite du changement de variables dans l'intégrale de Riemann.

Théorème 7.1. *Soient I, J deux intervalles réels fermés bornés, $\varphi \in C^1(I,\mathbb{R})$ une fonction de classe C^1 sur I telle que $\varphi(I) \subset J$ et $f \in C^0(J,\mathbb{R})$ une fonction continue sur J. Alors*

$$\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt$$

pour tous $\alpha, \beta \in I$, avec la convention que $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = -\int_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\alpha)}$ si $\varphi(\alpha) > \varphi(\beta)$.

Démonstration. La fonction

$$\Phi(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^y f(t)dt$$

est la primitive de f qui s'annule en $\varphi(\alpha)$. La fonction

$$\Psi(y) = \int_\alpha^y f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx$$

est la primitive de $x \to f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)$ qui s'annule en α. Par dérivation des fonctions composées,

$$\left(\Phi \circ \varphi\right)'(y) = f\left(\varphi(y)\right)\varphi'(y)$$

et $\Phi \circ \varphi$ s'annule en α. Donc

$$\Psi = \Phi \circ \varphi$$

et c'est ce que l'on voulait démontrer. □

8. Tableaux de primitives

Quelques opérations usuelles sur les primitives sont données par

Primitive de la somme	$\int (u+v) = \int u + \int v$
Primitive du produit par un scalaire	$\int (au) = a\int u$
Primitive de $u'u^n$	$\int u'u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
Primitive de $\frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u} = \ln\lvert u\rvert$
Primitive de $\frac{u'}{u^n}$ $n \neq 1$	$\int \frac{u'}{u^n} = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
Primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$
Primitive de $u'e^u$	$\int u'e^u = e^u$
Primitive de $u(ax+b)$	$\int u(ax+b) = \frac{1}{a}U(ax+b)$

et quelques primitives usuelles sont données par la table

$f(x)$	$F(x)$	Domaine de validité
a (a constante réelle)	ax	$\mathbb{R}$
x^α, α réel et $\alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ si α entier naturel $\mathbb{R}^*$ si α entier negatif, $\alpha \neq -1$ $]0;+\infty[$ dans les autres cas
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\mathrm{Sh}\, x$	$\mathrm{Ch}\, x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{Ch}\, x$	$\mathrm{Sh}\, x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\mathrm{Ch}^2 x}$	$\mathrm{Th}\, x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert$	$]-\infty;-1[\, \cup \,]1;+\infty[$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$\mathbb{R}-\{-1;1\}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1;1[$

CHAPITRE 2

Intégrales particulières

On présente dans ce chapitre le calcul effectif de plusieurs intégrales particulières. On commence par l'intégrale des fractions rationnelles, et donc par la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples.

9. Décomposition des fractions rationnelles.1

On traite dans cette section de la décomposition des fractions rationnelles. Par définition, une fraction rationnelle est un quotient de deux polynômes. Une fraction rationnelle est donc une fonction du type

$$f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} \ ,$$

où $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont des polynômes réels. Elle est définie, a priori, pour tous les x de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas des zéros de P (et effectivement sur cet ensemble dès que la fraction est irréductible, donc dès que P et Q sont premiers entre eux). Le premier résultat que l'on démontre est le théorème suivant de décomposition irréductible des polynômes sur $\mathbb{R}$.

Théorème 9.1. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme réel de degré $n \geq 1$. Alors P se décompose de façon unique (sur $\mathbb{R}$) en produit*

$$P(X) = \alpha \left(\prod_{i=1}^{s} (X - a_i)^{k_i}\right) \left(\prod_{j=1}^{t} (X^2 + b_j X + c_j)^{k'_j}\right) \ ,$$

où les $a, a_i, b_j, c_j \in \mathbb{R}$, les a_i sont deux à deux distincts, les couples (b_j, c_j) sont deux à deux distincts, les k_i et k'_j sont des entiers naturels non nuls, $\sum_{i=1}^{s} k_i + 2\sum_{j=1}^{t} k'_j = n$ et, pour tous $j \in \{1, \ldots, t\}$, $b_j^2 - 4c_j < 0$ de sorte que les polynômes $X^2 + b_j X + c_j$ n'ont aucune racine réelle. En d'autres termes, tout polynôme réel se décompose de façon unique en produit d'un réel, de polynômes réels de degré un du type $X - a$ et de polynômes réels du second degré sans racines réelles du type $X^2 + bX + c$.

Démonstration. Le résultat clef dans la preuve du théorème est le fait que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. Dire que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos signifie que tout polynôme complexe (donc aussi réel) a toujours une racine dans $\mathbb{C}$. Par divisions successives de polynômes cela implique que tout polynôme complexe se factorise en produits de polynômes de degré un sur $\mathbb{C}$. On utilisera donc que tout polynôme P sur $\mathbb{C}$ (donc en particulier sur $\mathbb{R}$) se décompose de façon unique en un produit

$$P(X) = a \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i} \ ,$$

où les $a, a_i \in \mathbb{C}$ et où $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$ si n est le degré de P. Supposons que P est réel. Alors clairement, pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$\overline{P(x)} = P(\overline{x}) \ .$$

On remarque que a est le coefficient du terme de plus haut degré. Comme $P \in \mathbb{R}[X]$, $a \in \mathbb{R}$. Soit $0 \leq p \leq k$ tel que (quitte à réordonner) $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ et $a_{p+1}, \dots, a_k \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Alors

$$P(X) = a \left(\prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{m_i} \right) \left(\prod_{i=p+1}^{k} (X - a_i)^{m_i} \right) \tag{9.1}$$

de sorte que pour tout $x \in \mathbb{C}$, $\overline{P(x)} = P(\overline{x})$ entraîne que

$$a \left(\prod_{i=1}^{p} (\overline{x} - a_i)^{m_i} \right) \left(\prod_{i=p+1}^{k} (\overline{x} - \overline{a_i})^{m_i} \right) = a \left(\prod_{i=1}^{p} (\overline{x} - a_i)^{m_i} \right) \left(\prod_{i=p+1}^{k} (\overline{x} - a_i)^{m_i} \right) .$$

Par identification, pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$\prod_{i=p+1}^{k} (\overline{x} - \overline{a_i})^{m_i} = \prod_{i=p+1}^{k} (\overline{x} - a_i)^{m_i}$$

ce qui signifie que le polynôme complexe $Q(X)$ représenté par cette égalité, à savoir

$$Q(X) = \prod_{i=p+1}^{k} (X - \overline{a_i})^{m_i} = \prod_{i=p+1}^{k} (X - a_i)^{m_i}$$

est en fait du type

$$Q(X) = \prod_{i=p+1}^{k'} [(X - a_i)(X - \overline{a_i})]^{m_i} .$$

Autrement dit, k est pair, $k' = k/2$, dès qu'il y a un $a_i \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ il y a aussi $\overline{a_i}$ et les a_i et $\overline{a_i}$ interviennent à la même puissance. On le voit en remarquant que forcément

$$\begin{cases} \forall i, \exists j \ / \ a_j = \overline{a_i} \text{ et } m_j \geq m_i \ , \\ \forall i, \exists j \ / \ a_i = \overline{a_j} \text{ et } m_j \geq m_i \ . \end{cases}$$

Comme ici $a_i \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, on a $a_i \neq \overline{a_i}$ pour tout i, ce qui donne la décomposition voulue pour Q. Reste à remarquer que

$$(X - a_i)(X - \overline{a_i}) = X^2 + b_i X + c_i$$

avec $b_i = -2\mathrm{Re}(a_i), c_i = |a_i|^2$ qui sont des réels, et puisque $a_i \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, on a forcément que $b_i^2 - 4c_i < 0$. En revenant à (9.1) on trouve le résultat annoncé. □

La définition de deux polynômes réels premiers entre eux est donnée par la définition suivante.

Définition 9.1. *Deux polynômes non identiquement nuls $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont premiers entre eux si aucun des facteurs (hors la constante) de la décomposition de P donnée par le Théorème 9.1 ne se retrouve dans la décomposition de Q ou, de façon analogue, si aucun des facteurs (hors la constante) de la décomposition de Q donnée par le Théorème 9.1 ne se retrouve dans la décomposition de P.*

De l'arithmétique des polynômes on tire le résultat suivant.

Théorème 9.2 (Théorème de Bézout)**.** *Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes réels non identiquement nuls. Alors P et Q sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux polynômes réels A et B tels que $AP + BQ = 1$, où 1 est le polynôme constant* 1.

On peut maintenant donner la définition suivante d'une fraction rationnelle et de son domaine de définition.

Définition 9.2. *Une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$ est une fonction donnée par le quotient de deux polynômes réels non identiquement nuls. C'est donc une fonction du type*

$$f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} \ ,$$

où P, Q sont des polynômes réels non identiquement nuls. Sans perdre en généralité on peut supposer que la fraction est irréductible, à savoir que P et Q premiers entre eux. Le domaine de définition de f est alors $D_f = \mathbb{R} \backslash Z(P)$, où $Z(P)$ est l'ensemble des zéros (réels) de P.

On rappelle que par division des polynômes, pour tous polynômes $A, B \in \mathbb{R}[X]$ il existe des uniques polynômes $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$A(X) = B(X)Q(X) + R(X)$$

et tels que degré $R <$ degré B. Il s'agit tout simplement dans la pratique d'épuiser les termes de A qui sont de degrés supérieurs ou ègaux au degré de P. Supposons par exemple que $A(X) = 3X^5 - 2X^4 + X^3 + 4X^2 + 4X + 7$ et $B(X) = X^3 + X + 1$. Alors

$$\begin{aligned} A(X) &= 3X^2B(X) - 2X^4 - 2X^3 + X^2 + 4X + 7 \\ &= 3X^2B(X) - 2XB(X) - 2X^3 + 3X^2 + 6X + 7 \\ &= 3X^2B(X) - 2XB(X) - 2B(X) + 3X^2 + 8X + 9 \end{aligned}$$

et on trouve $Q(X) = 3X^2 - 2X - 2$ et $R(X) = 3X^2 + 8X + 9$, avec $2 =$ degré $R <$ degré $B = 3$. L'unicité suit du fait que si

$$A(X) = B(X)Q(X) + R(X) \text{ et } A(X) = B(X)\hat{Q}(X) + \hat{R}(X)$$

avec degré $R <$ degré B et degré $\hat{R} <$ degré B, alors

$$B(Q - \hat{Q}) = \hat{R} - R \ ,$$

et comme degré $(\hat{R} - R) <$ degré B, on a forcément que $\hat{Q} = Q$ et $\hat{R} = R$. Bien sur, si degré $A <$ degré B alors $Q = 0$ et $R = A$. De cette division polynomiale on tire facilement le résultat suivant.

Théorème 9.3. *Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes réels non identiquement nuls premiers entre eux. Il existe des uniques polynômes $A, \hat{Q}$ tels que*

$$\frac{Q(X)}{P(X)} = A(X) + \frac{\hat{Q}(X)}{P(X)} \tag{9.2}$$

et degré $\hat{Q} <$ degré P. De plus $\hat{Q}$ et P sont premiers entre eux. On dit que A est la partie entière de la fraction $\frac{Q}{P}$.

Démonstration. On écrit la division de Q par P. Alors

$$Q = AP + \hat{Q} \tag{9.3}$$

avec degré $\hat{Q} <$ degré P. On récupère alors (9.2). L'unicité suit du fait que (9.2) entraîne $Q = AP + \hat{Q}$ avec degré $\hat{Q} <$ degré P, et on retrouve l'unicité de la division euclidienne. Supposons maintenant que $\hat{Q}$ et P ne soient pas premiers entre eux. Ils auraient alors au moins un facteur commun $R(X)$ avec R de degré un ou de degré deux (sans racine réelle). On aurait alors $\hat{Q}(X) = R(X)B(X)$ pour un $B \in \mathbb{R}[X]$ et $P(X) = R(X)C(X)$ pour un $C \in \mathbb{R}[X]$. Mais du coup, avec (9.3), $Q(X) = (A(X)C(X) + B(X))\, R(X)$ et donc Q et P ne seraient pas premiers entre eux. □

Le lemme suivant est à la base de la décomposition des fractions rationnelles.

Lemme 9.1. *Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes réels non identiquement nuls premiers entre eux avec degré $Q <$ degré P. On suppose que $P = P_1P_2$, où $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ sont aussi premiers entre eux. Il existe alors des uniques polynômes $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que*

$$\frac{Q(X)}{P(X)} = \frac{Q_1(X)}{P_1(X)} + \frac{Q_2(X)}{P_2(X)}$$

avec degré $Q_1 <$ degré P_1 et degré $Q_2 <$ degré P_2. De plus P_1 et Q_1 sont premiers entre eux et P_2 et Q_2 sont premiers entre eux.

Démonstration. On commence par montrer l'existence, on montre ensuite l'unicité, on montre enfin le caractère irréductible de la décomposition obtenue, à savoir que P_1 et Q_1 sont premiers entre eux et P_2 et Q_2 sont premiers entre eux.

EXISTENCE: D'après Bézout, il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$AP_1 + BP_2 = 1 \ .$$

On en déduit que

$$AQP_1 + BQP_2 = Q \ .$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{Q}{P} &= \frac{AQP_1 + BQP_2}{P_1P_2} \\ &= \frac{AQ}{P_2} + \frac{BQ}{P_1} \ . \end{aligned}$$

On note C et D les parties entières de $\frac{BQ}{P_1}$ et $\frac{AQ}{P_2}$. Alors, voir le Lemme 9.3,

$$\frac{BQ}{P_1} = C + \frac{Q_1}{P_1} \text{ et } \frac{AQ}{P_2} = D + \frac{Q_2}{P_2}$$

avec degré $Q_1 <$ degré P_1 et degré $Q_2 <$ degré P_2. On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{Q}{P} &= C + D + \frac{Q_1}{P_1} + \frac{Q_2}{P_2} \\ &= C + D + \frac{Q_1P_2 + Q_2P_1}{P} \ . \end{aligned}$$

On a degré $(Q_1P_2) <$ degré P et degré $(Q_2P_1) <$ degré P puisque degré $Q_1 <$ degré P_1 et degré $Q_2 <$ degré P_2. De l'unicité du Théorème 9.3 on tire que $C+D = 0$. On obtient donc bien une décomposition

$$\frac{Q(X)}{P(X)} = \frac{Q_1(X)}{P_1(X)} + \frac{Q_2(X)}{P_2(X)}$$

avec degré $Q_1 <$ degré P_1 et degré $Q_2 <$ degré P_2.

UNICITÉ: On suppose que

$$\frac{Q(X)}{P(X)} = \frac{Q_1(X)}{P_1(X)} + \frac{Q_2(X)}{P_2(X)} = \frac{\hat{Q}_1(X)}{P_1(X)} + \frac{\hat{Q}_2(X)}{P_2(X)}$$

avec degré $Q_1 <$ degré P_1, degré $Q_2 <$ degré P_2, degré $\hat{Q}_1 <$ degré P_1, et degré $\hat{Q}_2 <$ degré P_2. On a alors

$$(Q_1 - \hat{Q}_1)P_2 = (\hat{Q}_2 - Q_2)P_1 \ .$$

Comme P_1 et P_2 sont premiers entre eux une telle identité et le théorème de décomposition Théorème 9.1 entraînent que $Q_1 - \hat{Q}_1 = CP_1$ et $\hat{Q}_2 - Q_2 = DP_2$ pour des $C, D \in \mathbb{R}[X]$. On a

$$\text{degré } (Q_1 - \hat{Q}_1) < \text{degré } P_1$$

et donc $C = 0$ et $Q_1 = \hat{Q}_1$. De même, $D = 0$ et $Q_2 = \hat{Q}_2$. D'où l'unicité.

IRRÉDUCTIBILITÉ: D'après Bézout, il existe $A', B' \in \mathbb{R}[X]$ tels que $A'P + B'Q = 1$. Donc $A'P_1P_2 + B'Q = 1$. On en déduit facilement que P_1 est premier avec Q. On avait aussi $AP_1 + BP_2 = 1$ et donc P_1 est aussi premier avec B. On en déduit que P_1 est premier avec BQ. Or

$$\frac{BQ}{P_1} = C + \frac{Q_1}{P_1}$$

et il suit donc du Théorème 9.3 que P et Q_1 sont premiers. Même raisonnement pour P_2 et Q_2. Le lemme est démontré. □

La généralisation de ce résultat au cas de plusieurs facteurs B_i est donnée par le théorème suivant.

Théorème 9.4. *Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes réels non identiquement nuls premiers entre eux avec degré $Q <$ degré P. On suppose que $P = P_1P_2 \dots P_n$, où $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbb{R}[X]$ sont deux à deux premiers entre eux. Il existe alors des uniques polynômes $Q_1, Q_2, \dots, Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que*

$$\frac{Q(X)}{P(X)} = \frac{Q_1(X)}{P_1(X)} + \frac{Q_2(X)}{P_2(X)} + \cdots + \frac{Q_n(X)}{P_n(X)}$$

avec degré $Q_i <$ degré P_i pour tout $i = 1, \dots, n$. De plus, les P_i et Q_i sont premiers entre eux pour tout $i = 1, \dots, n$.

Démonstration. La preuve procède par récurrence à partir du Lemme 9.1. On commence là encore par montrer l'existence, on montre ensuite l'unicité et on montre enfin le caractère irréductible de la décomposition obtenue.

EXISTENCE: On procède par récurrence. Si $n = 2$ il s'agit du Lemme 9.1. On suppose le résultat vrai à l'ordre n. On considère le cas $P = P_1P_2 \dots P_nP_{n+1}$, les P_i étant deux à deux premiers entre eux. On pose $\hat{P}_n = P_nP_{n+1}$. On a

$$P = P_1P_2 \dots P_{n-1}\hat{P}_n$$

et en remarquant que $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, \hat{P}_n$ sont deux à deux premiers entre eux, on obtient par hypothèse de récurrence qu'il existe $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}, \hat{Q}_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\frac{Q(X)}{P(X)} = \frac{Q_1(X)}{P_1(X)} + \frac{Q_2(X)}{P_2(X)} + \cdots + \frac{Q_{n-1}(X)}{P_{n-1}(X)} + \frac{\hat{Q}_n(X)}{\hat{P}_n(X)}$$

avec degré $Q_i <$ degré P_i pour tout $i = 1, \dots, n-1$ et degré $\hat{Q}_n <$ degré $\hat{P}_n$. On re-applique le Lemme 9.1 pour $\frac{\hat{Q}_n}{\hat{P}_n}$. Il existe alors $\hat{Q}_{n,1}, \hat{Q}_{n,2} \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\frac{\hat{Q}_n(X)}{\hat{P}_n(X)} = \frac{\hat{Q}_{n,1}(X)}{P_n(X)} + \frac{\hat{Q}_{n,2}(X)}{P_{n+1}(X)}$$

et on récupère l'existence du Théorème 9.4.

UNICITÉ: On procède encore par récurrence. Pour $n = 2$ le résultat est vrai d'après le Lemme 9.1. On suppose l'unicité vraie à l'ordre n. On considère le cas $P = P_1 P_2 \dots P_n P_{n+1}$, les P_i étant deux à deux premiers entre eux. Supposons

$$\begin{aligned}\frac{Q(X)}{P(X)} &= \frac{Q_1(X)}{P_1(X)} + \frac{Q_2(X)}{P_2(X)} + \cdots + \frac{Q_{n+1}(X)}{P_{n+1}(X)} \\ &= \frac{\hat{Q}_1(X)}{P_1(X)} + \frac{\hat{Q}_2(X)}{P_2(X)} + \cdots + \frac{\hat{Q}_{n+1}(X)}{P_{n+1}(X)}\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{Q(X)}{P(X)} &= \frac{Q_1(X)P_2(X) + Q_2(X)P_1(X)}{P_1(X)P_2(X)} + \frac{Q_3(X)}{P_3(X)} + \cdots + \frac{Q_{n+1}(X)}{P_{n+1}(X)} \\ &= \frac{\hat{Q}_1(X)P_2(X) + \hat{Q}_2(X)P_1(X)}{P_1(X)P_2(X)} + \frac{\hat{Q}_3(X)}{P_3(X)} + \cdots + \frac{\hat{Q}_{n+1}(X)}{P_{n+1}(X)}\end{aligned}$$

et les inégalités sur les degrés sont bien respéctées. Par hypothèse de récurrence on a donc $Q_i = \hat{Q}_i$ pour $i = 2, \dots, n+1$ et

$$Q_1 P_2 + Q_2 P_1 = \hat{Q}_1 P_2 + \hat{Q}_2 P_1 \ .$$

On en déduit facilement $Q_1 = \hat{Q}_1$ et donc $Q_i = \hat{Q}_i$ pour $i = 1, \dots, n+1$. D'où l'unicité voulue.

IRRÉDUCTIBILITÉ: Même chose, on procède par récurrence. Pour $n = 2$ le résultat est vrai d'après le Lemme 9.1. On écrit

$$\begin{aligned}\frac{Q(X)}{P(X)} &= \frac{Q_1(X)}{P_1(X)} + \frac{Q_2(X)}{P_2(X)} + \cdots + \frac{Q_{n+1}(X)}{P_{n+1}(X)} \\ &= \frac{Q_1(X)P_2(X) + Q_2(X)P_1(X)}{P_1(X)P_2(X)} + \frac{Q_3(X)}{P_3(X)} + \cdots + \frac{Q_{n+1}(X)}{P_{n+1}(X)}\end{aligned}$$

et par hypothèse de récurrence les fractions $\frac{Q_i}{P_i}$ sont irréductibles pour tous les $i = 2, \dots, n+1$. On aurait aussi pu écrire que

$$\begin{aligned}\frac{Q(X)}{P(X)} &= \frac{Q_1(X)}{P_1(X)} + \frac{Q_2(X)}{P_2(X)} + \cdots + \frac{Q_{n+1}(X)}{P_{n+1}(X)} \\ &= \frac{Q_1(X)}{P_1(X)} + \cdots + \frac{Q_{n-1}(X)}{P_{n-1}(X)} + \frac{Q_n(X)P_{n+1}(X) + Q_{n+1}(X)P_n(X)}{P_n(X)P_{n+1}(X)}\end{aligned}$$

et on tire de l'hypothèse de récurence que $\frac{Q_1}{P_1}$ est aussi irréductible. D'où le théorème. □

Il reste pour finir à démontrer le théorème suivant.

Théorème 9.5. *Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes réels non identiquement nuls premiers entre eux et $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que degré $Q <$ degré P^n, où P^n est le polynôme P élevé à la puissance n. Il existe alors des uniques polynômes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que*

$$\frac{Q(X)}{P^n(X)} = \frac{Q_1(X)}{P(X)} + \frac{Q_2(X)}{P^2(X)} + \cdots + \frac{Q_n(X)}{P^n(X)}$$

avec degré $Q_i <$ degré P pour tout $i = 1, \ldots, n$ et Q_n n'est pas le polynôme nul.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n. On commence là encore par montrer l'existence, on montre ensuite l'unicité et on montre enfin que Q_n n'est pas le polynôme nul.

EXISTENCE: Si $n = 1$ le résultat est évident. On suppose le résultat vrai à l'ordre n. On considère $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes réels non identiquement nuls premiers entre eux tels que degré $Q <$ degré P^{n+1}. Par division euclidienne on écrit que

$$Q = AP + B$$

avec degré $B <$ degré P. Alors

$$\frac{Q}{P^{n+1}} = \frac{A}{P^n} + \frac{R}{P^{n+1}}$$

et pour pouvoir conclure que le résultat est vrai à l'ordre $n+1$, avec l'hypothèse de récurrence et en posant $Q_{n+1} = B$, il suffit de montrer que degré $A <$ degré P^n. Or degré $Q <$ degré P^{n+1} et donc, comme $Q = AP + R$, on a forcément que degré $A <$ degré P^n. D'où l'existence.

UNICITÉ: Il faut bien formuler l'hypothèse de récurrence. On va montrer que si

$$\begin{aligned}&\frac{Q_1(X)}{P(X)} + \frac{Q_2(X)}{P^2(X)} + \cdots + \frac{Q_n(X)}{P^n(X)} \\ &= \frac{\hat{Q}_1(X)}{P(X)} + \frac{\hat{Q}_2(X)}{P^2(X)} + \cdots + \frac{\hat{Q}_n(X)}{P^n(X)}\end{aligned}$$

avec degré $Q_i <$ degré P et degré $\hat{Q}_i <$ degré P pour tout $i = 1, \ldots, n$, alors $\hat{Q}_i = Q_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Si $n = 1$ le résultat est évident. On suppose le résultat vrai à l'ordre n. On suppose maintenant que

$$\begin{aligned}&\frac{Q_1(X)}{P(X)} + \frac{Q_2(X)}{P^2(X)} + \cdots + \frac{Q_{n+1}(X)}{P^{n+1}(X)} \\ &= \frac{\hat{Q}_1(X)}{P(X)} + \frac{\hat{Q}_2(X)}{P^2(X)} + \cdots + \frac{\hat{Q}_{n+1}(X)}{P^{n+1}(X)}\end{aligned}$$

avec degré $Q_i <$ degré P et degré $\hat{Q}_i <$ degré P pour tout $i = 1, \ldots, n+1$. On a alors

$$\begin{aligned}&P(X)\sum_{i=1}^{n} Q_i(X)P^{n-i}(X) + Q_{n+1}(X) \\ &= P(X)\sum_{i=1}^{n} \hat{Q}_i(X)P^{n-i}(X) + \hat{Q}_{n+1}(X)\end{aligned}$$

et, par suite, si $Q(X)$ est ce polynôme commun, alors Q_{n+1} et $\hat{Q}_{n+1}$ sont les restes de la division euclidienne de Q par P. Donc $\hat{Q}_{n+1} = Q_{n+1}$. On récupère alors que

$$\begin{aligned} &\frac{Q_1(X)}{P(X)} + \frac{Q_2(X)}{P^2(X)} + \cdots + \frac{Q_n(X)}{P^n(X)} \\ &= \frac{\hat{Q}_1(X)}{P(X)} + \frac{\hat{Q}_2(X)}{P^2(X)} + \cdots + \frac{\hat{Q}_n(X)}{P^n(X)} \end{aligned}$$

avec degré $Q_i <$ degré P et degré $\hat{Q}_i <$ degré P pour tout $i = 1, \ldots, n$, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence qui nous donne que $\hat{Q}_i = Q_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. On vient de montrer que $\hat{Q}_{n+1} = Q_{n+1}$, et ceci achève la récurrence.

Il reste pour finir à montrer que Q_n n'est pas le polynôme nul. Si tel était le cas, on aurait

$$\frac{Q(X)}{P^n(X)} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} Q_i(X) P^{n-1-i}(X)}{P^{n-1}(X)}$$

soit $Q = AP$ avec $A = \sum_{i=1}^{n-1} Q_i P^{n-1-i}$, et les polynômes P et Q ne seraient pas premiers entre eux. □

10. Décomposition des fractions rationnelles.2

On énonce ici le résultat de décomposition des fractions rationnelles. Celui-ci découle de ce qui a été dit dans la section précédente. On parle de décomposition en éléments simples.

Théorème 10.1 (Décomposition des fractions rationnelles)**.** *Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes réels non identiquement nuls premiers entre eux. Soit A la partie entière de la fraction rationnelle $\frac{Q}{P}$ et soit $P = \prod_{i=1}^{n} P_i^{k_i}$ la décomposition de P en polynômes irréductibles réels de degrés 1 et/ou 2 donnée par le Théorème 9.1. Il existe alors des uniques polynômes réels $Q_{i,j} \in \mathbb{R}[X]$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, k_i$, avec*

degré $Q_{i,j} <$ degré P_i

pour tout $i = 1, \ldots, n$ et tout $j = 1, \ldots, k_i$, et tels que

$$\frac{Q(X)}{P(X)} = A(X) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{Q_{i,j}(X)}{P_i^j(X)} \ , \tag{10.1}$$

où P_i^j est le polynôme P_i à la puissance j. Si P_i est de degré un, les $Q_{i,j}$ pour $j = 1, \ldots, k_i$ sont des constantes. Si P_i est de degré deux, les $Q_{i,j}$ pour $j = 1, \ldots, k_i$ sont de degré un, donc du type $Q_{i,j}(X) = a_{i,j}X + b_{i,j}$.

Démonstration. On applique les Théorèmes 9.1, 9.3, 9.4 et 9.5 qui ont été démontrés dans la section précédente. □

Dans la pratique on commence par rechercher la partie entière de $\frac{Q}{P}$ puis la décomposition irréductible de P donnée par le Théorème 9.1. Ensuite on écrit la décomposition (10.1) avec $Q_{i,j} = a_{i,j}$ ou $Q_{i,j}(X) = a_{i,j}X + b_{i,j}$ selon le degré des P_i, et on cherche les $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$.

EXEMPLE 1: On considère la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{1}{X^3 - X} \ .$$

Comme $0 =$ degré $1 < 3$ il n'y a pas de partie entière. La fraction est clairement irréductible. On a $X^3 - X = X(X^2-1) = X(X-1)(X+1)$. Le domaine de définition de F est $\mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$. Le Théorème 10.1 donne l'existence de réels a, b, c tels que

$$F(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} \tag{10.2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$. Il y a alors plusieurs idées possibles pour calculer a, b, c. On peut tout remettre au même dénominateur et procéder par identification. Dans ce cas on trouve que

$$a(x-1)(x+1) + bx(x+1) + cx(x-1) = 1$$

pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$, soit encore

$$(a+b+c)x^2 + (b-c)x - 1 - a = 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$ (donc en fait par continuité pour tout $x \in \mathbb{R}$). Comme un polynôme de degré deux a au plus 2 racines, on doit avoir

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ b-c = 0 \\ a+1 = 0 \end{cases}$$

et on trouve $a = -1$, $b = c = \frac{1}{2}$. Donc

$$F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{(x+1)} \tag{10.3}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$. On peut sinon procéder en exploitant les pôles, a savoir en multipliant (10.2) respectivement par x, $x-1$ et $x+1$ et en faisant tendre respectivement x vers 0, 1 et -1. Par exemple, en multipliant (10.2) par x on obtient que

$$\frac{1}{x^2-1} = a + \frac{bx}{x-1} + \frac{cx}{x+1}$$

et en faisant tendre x vers 0 on trouve que $-1 = a$. Même chose en multipliant (10.2) par $x-1$ on obtient que

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a(x-1)}{x} + b + \frac{c(x-1)}{x+1}$$

et en faisant tendre x vers 1 on trouve que $\frac{1}{2} = b$. Enfin, en multipliant (10.2) par $x+1$ on obtient que

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{a(x+1)}{x} + \frac{b(x+1)}{x-1} + c$$

et en faisant tendre x vers -1 on trouve que $\frac{1}{2} = c$. Le tout redonne bien sur (10.3).

EXEMPLE 2: On considère la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)} .$$

Le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur. Il y a une partie entière (qui sera un polynôme constant). On trouve

$$X^4 + 1 = (X+1)^2(X^2+1) - 2X^3 - 2X^2 - 2X - 1$$

et donc
$$F(X) = 1 - \frac{2X^3 + 2X^2 + 2X + 1}{(X+1)^2(X^2+1)} \ .$$
Si $Q(X) = 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ et $P(X) = (X+1)^2(X^2+1)$, on voit que P et Q sont premiers entre eux en remarquant que comme $Q(-1) = -1 \neq 0$ il ne peut y avoir $X+1$ dans la décomposition de Q et que comme $Q(i) = -1 \neq 0$ il ne peut pas non plus y avoir X^2+1 dans la décomposition de Q. Le dénominateur P est déjà factorisé. Le domaine de définition de F est $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Le Théorème 10.1 donne l'existence de réels a, b, c, d tels que
$$\frac{2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$
pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. En ramenant au même dénominateur on voit que
$$2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = a(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (cx+d)(x+1)^2$$
pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, et donc en fait, par continuité, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En développant on trouve que
$$2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = a(x^2+1) + b(x+1)(x^2+1) + (cx+d)(x+1)^2$$
et ensuite que
$$2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (b+c)x^3 + (a+b+2c+d)x^2 + (b+2d+c)x + a + b + d$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par assimilation, un polynôme de degré 3 ayant au plus 3 racines, on trouve que
$$\begin{cases} b+c = 2 \\ a+b+2c+d = 2 \\ b+c+2d = 2 \\ a+b+c = 1 \end{cases}$$
Les équations 1 et 4 donnent que $a = -1$ et les équations 1 et 3 donnent que $d = 0$. On a alors
$$\begin{cases} b+c = 2 \\ b+2c = 3 \end{cases}$$
et on trouve que $c = 1$ puis que $b = 1$. Au final,
$$\frac{x^4+1}{(x+1)^2(x^2+1)} = 1 + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+1} \tag{10.4}$$
pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

11. L'intégrale des fractions rationnelles

En vertue du Théorème 10.1, savoir calculer des intégrales de fractions rationnelles revient à savoir primitiver les (calculer une primitive des) fractions suivantes:

(1) les éléments simples de 1ère espèce:
$$f(x) = \frac{1}{(x-\alpha)^n}$$

(2) les éléments simples de 2ème espèce:

$$f(x) = \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}$$

où $\alpha, a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c^2 - 4d < 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Bien sur il faut aussi savoir primitiver la partie entière, mais comme il s'agit d'un polynôme, il n'y a là aucune difficulté. Primitiver les éléments simples de 1ère espèce est très simple.

Lemme 11.1. *Pour* $n = 1$,

$$\int \frac{1}{x-\alpha} dx = \ln|x-\alpha| + C^{ste}$$

et pour $n \geq 2$,

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^n} dx = \frac{-1}{n-1} \frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} + C^{ste}$$

Démonstration. Par calcul direct. □

Primitiver les éléments simples de 2ème espèce est plus compliqué. On commence par mettre le dénominateur sous forme canonique:

$$x^2 + cx + d = (x + \frac{c}{2})^2 + d - \frac{c^2}{4} \ .$$

En effectuant le changement de variable

$$u = \frac{2}{\sqrt{4d-c^2}}(x + \frac{c}{2})$$

on se ramène au calcul de primitives pour les éléments simples modifiées de 2ème espèce qui sont les

(2bis) les éléments simples de 2ème espèce modifiés:

$$f(u) = \frac{au+b}{(u^2+1)^n}$$

Pour $n = 1$ le calcul de primitives pour ces éléments simples de 2ème espèce modifiés est assez simple. On écrit que

$$\begin{aligned} \int \frac{au+b}{u^2+1} du &= a \int \frac{u}{u^2+1} du + b \int \frac{1}{u^2+1} du \\ &= \frac{a}{2} \ln(u^2+1) + b\mathrm{Arctg}(u) + C^{ste} \end{aligned}$$

et on a donc notre primitive.

Lemme 11.2. *On a*

$$\int \frac{au+b}{u^2+1} du = \frac{a}{2} \ln(u^2+1) + bArctg(u) + C^{ste} \ .$$

Lorsque $n \geq 2$ la situation est un peu plus complexe. Une première remarque est que pour $n \geq 2$,

$$\int \frac{u}{(u^2+1)^n} du = \frac{-1}{2(n-1)} \frac{1}{(u^2+1)^{n-1}} + C^{ste}$$

puisque u est au facteur multiplicatif 2 près la dérivée de u^2. On a donc aussi le lemme suivant.

Lemme 11.3. *Pour $n \geq 2$,*

$$\int \frac{u}{(u^2+1)^n} du = \frac{-1}{2(n-1)} \frac{1}{(u^2+1)^{n-1}} + C^{ste} .$$

La primitive qui va poser plus de problèmes est celle faisant intervenir le terme constant b. On peut effectuer un nouveau changement de variables $u = \mathrm{tg}(t)$ et se ramener au calcul d'une primitive d'une puissance de $\cos(t)$, ou alors donner une formule de récurrence de calcul de ces primitives en fonction de n. Notons

$$F_n(u) = \int \frac{1}{(u^2+1)^n} du$$

une primitive de $\frac{1}{(u^2+1)^n}$. On a alors le lemme suivant qui répond à la question.

Lemme 11.4. *Pour $n \geq 1$ on a*

$$F_{n+1}(u) = \frac{2n-1}{2n} F_n(u) + \frac{1}{2n} \frac{u}{(u^2+1)^n} + C^{ste} .$$

Démonstration. On intègre par parties en partant de F_n. On pose $f(u) = \frac{1}{(u^2+1)^n}$ et $g'(u) = 1$. Par suite

$$f'(u) = \frac{-2nu}{(u^2+1)^{n+1}}$$

et $g(u) = u$. On en déduit que

$$\begin{aligned} F_n(u) &= \frac{u}{(u^2+1)^n} + 2n \int \frac{u^2}{(u^2+1)^{n+1}} \\ &= \frac{u}{(u^2+1)^n} + 2n \int \frac{(u^2+1)-1}{(u^2+1)^{n+1}} \\ &= \frac{u}{(u^2+1)^n} + 2nF_n(u) - 2nF_{n+1}(u) \end{aligned}$$

Par suite,

$$2nF_{n+1}(u) = (2n-1)F_n(u) + \frac{u}{(u^2+1)^n}$$

et le lemme est démontré. □

EXEMPLE: On calcule

$$I = \int_0^1 \frac{x^4+1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx .$$

En vertue de (10.4),

$$I = 1 + \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} - \int_0^1 \frac{dx}{x+1} - \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1} .$$

Or, voir par exemple les lemmes précédents,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} &= -\left[\frac{1}{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2} , \\ \int_0^1 \frac{dx}{x+1} &= [\ln(x+1)]_0^1 = \ln(2) , \\ \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1} &= \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2) . \end{aligned}$$

D'où $I = \frac{3}{2}(1 - \ln(2))$.

12. Intégrales de produits de cosinus et sinus

On traite brièvement ici de l'intégrale de produits de fonctions cosinus et sinus. En tout premier lieu il convient de remarquer qu'il y a certaines configurations très simples, lorsque l'on rencontre une forme $u'u^n$. Par exemple

$$\int \cos(x)\sin^2(x)dx = \frac{1}{3}\sin^3(x) + C^{ste}$$

puisque $\sin' = \cos$. Dans les cas plus "obscurs" une méthode assez générale consiste à linéariser, c'est à dire à transformer le produit de cosinus et sinus en question en sommes de $\cos(px)$ et $\sin(px)$. Traitons les petites puissances dans ce qui quit. On peut rencontrer des primitives de $\cos(x)\sin(x)$, $\cos^2(x)$, $\sin^2(x)$, $\cos^2(x)\sin(x)$, $\cos(x)\sin^2(x)$, $\cos^3(x)$, $\sin^3(x)$, $\cos^2(x)\sin^2(x)$ etc. Certaine sde ces primitives tombent sous la remarque ci-dessus:

$$\begin{aligned}
&\int \cos(x)\sin(x)dx = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C^{ste} \\
&\int \cos^2(x)\sin(x)dx = -\frac{1}{3}\cos^3(x) + C^{ste} \\
&\int \cos(x)\sin^2(x)dx = \frac{1}{3}\sin^3(x) + C^{ste} .
\end{aligned}$$

Les autres primitives, de $\cos^2(x)$, $\sin^2(x)$, $\cos^3(x)$, $\sin^3(x)$, $\cos^2(x)\sin^2(x)$ se traitent par linéarisation. Pour linéariser on utilise les formules d'Euler:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ et } \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} .$$

On trouve alors

$$\begin{aligned}
\cos^2(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}}{4} \\
&= \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

et on obtient de même que

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 \\
&= -\frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{4} \\
&= -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\int \cos^2(x)dx = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x + C^{ste} \\
&\int \sin^2(x)dx = -\frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x + C^{ste} .
\end{aligned}$$

Pour les cubes on aura

$$\begin{aligned}
\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8} \\
&= \frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x)
\end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\
&= -\frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{8i} \\
&= -\frac{1}{4}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin(x)
\end{aligned}$$

puisque $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Par suite

$$\begin{aligned}
\int \cos^3(x)dx &= \frac{1}{12}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin(x)+C^{ste} \\
\int \sin^3(x)dx &= \frac{1}{12}\cos(3x)-\frac{3}{4}\cos(x)+C^{ste}\ .
\end{aligned}$$

Enfin, pour le double carré, on a

$$\begin{aligned}
\cos^2(x)\sin^2(x) &= -\frac{1}{4}\left(1+\cos(2x)\right)\left(1-\cos(2x)\right) \\
&= \frac{1}{4}\cos^2(2x)-\frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cos(4x)+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{8}\cos(4x)-\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

et on peut continuer ainsi avec $\cos^4(x)$, $\sin^4(x)$ etc.

13. Les intégrales de Wallis

On appelle intégrale de Wallis les intégrales

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx\ ,$$

où $n \in \mathbb{N}$. En effectuant le changement de variable $y = \frac{\pi}{2} - x$ on a aussi

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx\ .$$

On calcule facilement $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$. En écrivant que

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\sin^{n+1}(x)dx$$

et en intégrant par parties avec $f'(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \sin^{n+1}(x)$. On a alors $f(x) = -\cos(x)$ et $g'(x) = (n+1)\sin^n(x)\cos(x)$. Par suite,

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= -\left[\cos(x)\sin^{n+1}(x)\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^n(x)dx \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(x))\sin^n(x)dx \end{aligned}$$

et donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ de sorte que

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$$

pour tout n. On peut maintenant calculer W_n avec cette formule de récurrence en distinguant les cas n pair et n impair. On a

$$\begin{aligned} W_{2n} &= W_{2(n-1)+2} \\ &= \frac{2n-1}{2n}W_{2(n-1)} \\ &= \frac{2n-1}{2n}W_{2(n-2)+2} \\ &= \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}W_{2(n-2)} \end{aligned}$$

et en raisonnant de proche en proche on trouve que

$$\begin{aligned} W_{2n} &= \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\dots\frac{1}{2}W_0 \\ &= \frac{1}{2^n n!}\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)\dots 1}{(2n-2)(2n-4)\dots 2}W_0 \\ &= \frac{1}{2^n n!}\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}W_0 \\ &= \frac{1}{2^n n!}\frac{2n(2n-1)!}{2^n n!}W_0 \end{aligned}$$

et on trouve ainsi que

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}\ .$$

De même, avec le même genre de calculs, on trouve que

$$W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}\ .$$

Les intégrales de Wallis sont calculables.

CHAPITRE 3

Intégrales généralisées

14. Premières constructions

On commence avec la définition de locale intégrabilité.

Définition 14.1. *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b, avec $a \geq -\infty$ et $b \leq +\infty$. On dit que f est localement intégrable sur I si pour tout intervalle fermé $[\alpha, \beta] \subset I$, α et β deux réels, f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[\alpha, \beta]$.*

Par propriété de l'intégrale de Riemann, le résultat suivant a lieu.

Théorème 14.1. *Toute fonction réelle définie et continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ est localement intégrable sur cet intervalle.*

On a aborde maintenant les définitions des intégrales généralisées. On commence avec la notion d'intégrale généralisée en sa borne supérieure.

Définition 14.2 (Intégrales généralisées en leurs bornes supérieures)**.** *Soit f une fonction réelle définie et localement intégrable sur un intervalle du type $[a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \leq +\infty$. On appelle intégrale généralisée de f sur $[a, b[$ la limite quand x tend vers b par valeurs inférieures, si elle existe et si elle est finie, de la fonction F définie sur $[a, b[$ par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \ .$$

On pose alors

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt \ ,$$

et on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente. Si la limite n'existe pas, ou si elle n'est pas finie, on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est divergente.

On a une définition analogue pour la notion d'intégrale généralisée en la borne inférieure.

Définition 14.3 (Intégrales généralisées en leurs bornes inférieures)**.** *Soit f une fonction réelle définie et localement intégrable sur un intervalle du type $]a, b]$, avec $a \geq -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$. On appelle intégrale généralisée de f sur $]a, b]$ la limite quand x tend vers a par valeurs supérieures, si elle existe et si elle est finie, de la fonction F définie sur $]a, b]$ par*

$$F(x) = \int_x^b f(t)dt \ .$$

On pose alors

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt \ ,$$

et on dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ est convergente. Si la limite n'existe pas, ou si elle n'est pas finie, on dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ est divergente.

Une intégrale modèle importante est l'intégrale de Riemann.

Théorème 14.2 (L'intégrale de Riemann)**.** **(1)** *L'intégrale de Riemann* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$*, généralisée en* $+\infty$*, est convergente si et seulement si* $\alpha > 1$.
(2) *L'intégrale de Riemann* $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$*, généralisée en* 0*, est convergente si et seulement si* $\alpha < 1$.

Démonstration. **(1)** La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$. En particulier, elle est localement intégrable sur $[1, +\infty[$. Dire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge équivaut donc à dire que la limite

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt$$

existe et est finie. Or pour $x > 1$,

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \ln(x) \text{ si } \alpha = 1,$$
$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha}\big(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\big) \text{ si } \alpha \neq 1.$$

Par suite, $\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt$ existe et est finie si et seulement si $\alpha > 1$. D'où le résultat.

(2) La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ est continue sur l'intervalle $]0, 1]$. En particulier, elle est localement intégrable sur $]0, 1]$. Dire que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge équivaut donc à dire que la limite

$$\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$$

existe et est finie. Or pour $0 < x < 1$,

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = -\ln(x) \text{ si } \alpha = 1,$$
$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha}\big(1 - x^{1-\alpha}\big) \text{ si } \alpha \neq 1.$$

Par suite, $\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ existe et est finie si et seulement si $\alpha < 1$. D'où le résultat. □

On aborde maintenant la définition d'intégrale généralisée en ses deux bornes.

Définition 14.4 (Intégrales généralisées en leurs deux bornes)**.** *Soit f une fonction réelle définie et localement intégrable sur un intervalle ouvert* $]a, b[$*, avec* $a \geq -\infty$ *et* $b \leq +\infty$*. On dit que l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *est convergente si, pour un certain* $c \in]a, b[$*, les intégrales généralisées*

$$\int_a^c f(t)dt \text{ et } \int_c^b f(t)dt$$

sont toutes deux convergentes. On pose alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \ ,$$

et on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *est l'intégrale généralisée de* f *sur* $]a,b[$. *La définition ne dépend pas du choix de* c.

La définition ne dépend pas de c en ce sens que l'assertion

$$\exists c \in]a,b[\ /\ \int_a^c f(t)dt \text{ et } \int_c^b f(t)dt \text{ convergent}$$

équivaut à l'assertion

$$\forall c \in]a,b[\ ,\ \int_a^c f(t)dt \text{ et } \int_c^b f(t)dt \text{ convergent .}$$

On le voit avec la relation de Chasles dans la mesure où si $c_1 < c_2$ sont deux points de $]a,b[$, alors pour tout $a < x < c_1$,

$$\int_x^{c_2} f(t)dt = \int_x^{c_1} f(t)dt + \int_{c_1}^{c_2} f(t)dt$$

et pour tout $c_2 < x < b$,

$$\int_{c_1}^{x} f(t)dt = \int_{c_1}^{c_2} f(t)dt + \int_{c_2}^{x} f(t)dt\ .$$

A partir de là, on voit que

$$\begin{aligned}\int_a^{c_1} f(t)dt \text{ converge } &\iff \int_a^{c_2} f(t)dt \text{ converge}\\ \int_{c_1}^{b} f(t)dt \text{ converge } &\iff \int_{c_2}^{b} f(t)dt \text{ converge .}\end{aligned}$$

D'où l'affirmation. De plus,

$$\begin{aligned}&\int_a^{c_2} f(t)dt + \int_{c_2}^{b} f(t)dt\\ &\qquad = \int_a^{c_1} f(t)dt + \int_{c_1}^{c_2} f(t)dt + \int_{c_1}^{b} f(t)dt - \int_{c_1}^{c_2} f(t)dt\\ &\qquad = \int_a^{c_1} f(t)dt + \int_{c_1}^{b} f(t)dt\ .\end{aligned}$$

Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge, alors pour tout $a < c < b$, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

Remarque: La convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ n'est pas équivalente à l'existence et à la finitude de la limite

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f(t)dt$$

si a et b sont des réels, ou à l'existence et à la finitude de la limite

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{+x} f(t)dt$$

si $a = -\infty$ et $b = +\infty$. Pour tout $x > 0$ on a par exemple que

$$\int_{-x}^{+x} t dt = 0 \ ,$$

tandis que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$ diverge.

Des exemples:(1) En vertu de ce qui a été dit au sujet de l'intégrale de Riemann, et dans la mesure où un réel ne peut être tout à la fois strictement plus grand que un et strictement plus petit que un, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ diverge pour tout réel α.

(2) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ converge et vaut π. En effet, d'une part

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \mathrm{Arctg} x$$

et $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{Arctg} x$ existe et vaut $\frac{\pi}{2}$. D'autre part,

$$\int_x^0 \frac{1}{1+t^2} dt = -Arctgx$$

et $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{Artcg} x$ existe et vaut $-\frac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2} dt \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$$

sont deux intégrales convergentes qui valent toutes deux $\frac{\pi}{2}$. On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$$

converge et vaut π.

(3) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \ln(t) dt$ (généralisée en 0) est convergente et vaut -1. En effet, $x \ln(x) - x$ est une primitive de $\ln(x)$. Donc

$$\int_x^1 \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_x^1 = x - x \ln(x) - 1$$

qui a pour limite -1 lorsque $x \to 0^+$.

15. Intégrales absolument convergentes

La définition d'intégrale absolument convergente renvoie à la convergence de l'intégrale de la valeur absolue de la fonction considérée.

Définition 15.1. *Soit f une fonction réelle définie et localement intégrable sur un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a \geq -\infty$ et $b \leq +\infty$. On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t) dt$ converge absolument si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b |f(t)| dt$ converge.*

Le résultat suivant a lieu.

Théorème 15.1. *Toute intégrale absolument convergente est convergente.*

Démonstration. Pour simplifier on va traiter du cas où l'intégrale est généralisée en b, et où $b < +\infty$. Soit $F(x) = \displaystyle\int_a^x |f(t)|dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. On suppose que F a une limite finie lorsque $x \to b$ par valeurs inférieures, et on veut montrer que G a aussi une limite finie lorsque $x \to b$ par valeurs inférieures. On utilise les deux résultats suivant d'analyse:

(i) $F(x)$ (resp. $G(x)$) ont une limite lorsque $x \to b$ par valeurs inférieures si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de points de I, si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x_n)$ (resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} G(x_n)$) existe,

(ii) une suite réelle $\big(F(x_n)\big)_n$ (resp. $\big(G(x_n)\big)_n$) est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Soit $(x_n)_n$ une suite donnée quelconque de points de I qui tend vers b. La suite $\big(F(x_n)\big)_n$ converge par hypothèse et en vertue de (i) ci-dessus. En vertue de (ii) la suite est donc de Cauchy. On a pour tous $p, q \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|G(x_q) - G(x_p)| &= \left|\int_a^{x_q} f(t)dt - \int_a^{x_p} f(t)dt\right| \\
&= \left|\int_{x_p}^{x_q} f(t)dt\right| \\
&\leq \left|\int_{x_p}^{x_q} |f(t)|dt\right| \\
&= \left|\int_a^{x_q} |f(t)|dt - \int_a^{x_p} |f(t)|dt\right| \\
&= |F(x_q) - F(x_p)| \ .
\end{aligned}$$

Comme $\big(F(x_n)\big)_n$ est de Cauchy, on en déduit que $\big(G(x_n)\big)_n$ est aussi de Cauchy. D'où, avec (ii), la convergence de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$. □

16. Critères de convergence pour les fonctions positives

On ne considère dans cette section que des fonctions réelles poistives définies et localement intégrable sur des intervalles du type $[a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \leq +\infty$. Des théorèmes analogues s'écrivent sans difficulté pour des fonctions positives définies et localement intégrables sur des intervalles du type $]a, b]$, avec $a \geq -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$. Par suite, on obtient aussi des critères de convergence pour les fonctions positives localement intégrables lorsque les problèmes de convergence se trouvent aux deux bornes de l'intégrale.

Proposition 16.1. *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction positive localement intégrable sur $[a, b[$. Pour que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge il faut et il suffit qu'il existe une constante réelle $M > 0$ telle que pour tout $a \leq x < b$, $\int_a^x f(t)dt \leq M$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que la positivité de f entraine la croissance de $\int_a^x f(t)dt$. Une fonction croissante sur $[a, b[$ a une limite finie si et seulement si elle est majorée. D'où le résultat. □

Le principe de comparaison suivant est une conséquence directe de ce qui vient d'être dit.

Théorème 16.1 (Principe de comparaison)**.** *Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions positives localement intégrables sur $[a, b[$. On suppose que pour tout $a \le x < b$, $f(x) \le g(x)$. Alors*

$$\int_a^b g(t)dt \text{ converge } \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt \text{ converge .}$$

En particulier, la divergence de $\int_a^b f(t)dt$ entraîne la divergence de $\int_a^b g(t)dt$.

Démonstration. En vertue de la proposition précédente, la convergence de $\int_a^b g(t)dt$ équivaut à l'existence d'une constante réelle $M > 0$ telle que pour tout $a \le x < b$,

$$\int_a^x g(t)dt \le M \ .$$

De l'inégalité $f \le g$, on tire que pour tout $a \le x < b$,

$$\int_a^x f(t)dt \le M \ ,$$

et il suit de la proposition précédente que $\int_a^b f(t)dt$ converge. D'où le résultat. $\square$

Le résultat suivant a lieu.

Théorème 16.2 (Condition nécessaire à l'infini)**.** *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive localement intégrable sur $[a, +\infty[$. On suppose que*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ existe et } \int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ converge .}$$

Alors nécessairement $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Démonstration. Supposons que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$, et pour alléger la redaction, supposons que $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0 \ / \ \forall x \ge A,\ |f(x) - \alpha| < \varepsilon \ .$$

Sachant que f est positive, nécessairement $\alpha \ge 0$. Supposons que $\alpha > 0$. En posant $\varepsilon = \alpha/2$, on obtient l'existence d'un $A > 0$ tel que pour tout $x \ge A$, $f(x) \ge \alpha/2$. Pour tout $x > A$ on aurait alors

$$\int_a^x f(t)dt \ge \int_A^x f(t)dt \ge \frac{\alpha}{2}\big(x - A\big) \ ,$$

ce qui entraîne que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha \text{ et } \int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ converge}$$

entraînent que $\alpha = 0$. D'où le résultat. $\square$

A propos de ce théorème, on remarquera qu'il existe des fonctions $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ positives et localement intégrables, pour lesquelles l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$

converge mais qui n'ont pas de limite en $+\infty$. Pour le voir on pourra par exemple considérer la fonction "en peigne" $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x) = n^2x + 1 - n^3 \text{ si pour un certain } n \geq 2,\ n - \frac{1}{n^2} \leq x \leq n \\ f(x) = -n^2x + n^3 + 1 \text{ si pour un certain } n \geq 2,\ n \leq x \leq n + \frac{1}{n^2} \\ f(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

La fonction vaut 1 aux entiers n, et comme on s'en convaincra facilement, f n'a pas de limite en $+\infty$. Par contre $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge puisque la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge. Dans le cas présent

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \ .$$

On le constate sans difficulté.

Remarque: Dire que la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge signifie que la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

existe et est finie. Pour démontrer cela on revient aux intégrales... Pour tout $n \geq 1$ on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \ .$$

On veut montrer que la suite (S_n) a une limite. On a $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + \frac{1}{4}$, $S_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$ ... Cette suite est croissante. Pour montrer qu'elle converge il suffit de montrer qu'elle est majorée. On remarque que

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2} dt$$

puisque $\frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{k^2}$ sur $[k-1, k]$. Par suite, pour tout $n \geq 2$, et en utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2} dt \\ &= 1 + \int_1^n \frac{1}{t^2} dt \text{ (Avec Chasles)} \\ &\leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \\ &< +\infty \end{aligned}$$

puisque l'intégrale de Riemann généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente. Donc (S_n) est croissante majorée. Il s'ensuit qu'elle converge. □

Le théorème suivant a lieu.

Théorème 16.3. *Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions positives localement intégrables sur $[a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \le +\infty$. On suppose qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que pour tout $c \le x < b$, $g(x) \neq 0$, et on suppose que*

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

existe.

(1) Si $0 < \alpha < +\infty$, les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature, à savoir simultanément convergentes ou simultanément divergentes.

(2) Si $\alpha = 0$, la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$ entraîne la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$.

(3) Si $\alpha = +\infty$, la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ entraine la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$.

Démonstration. Pour alléger la redaction, on suppose que $b < +\infty$. Dire que

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$, signifie que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ / \ \forall x,\ b - \eta < x < b \ \Rightarrow \ \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \alpha \right| < \varepsilon \ .$$

Supposons que $\alpha > 0$. En posant $\varepsilon = \alpha/2$, on obtient l'existence d'un $\eta > 0$ tel que pour tout $b - \eta < x < b$,

$$\frac{\alpha}{2}\ g(x) \ \le \ f(x) \ \le \ \frac{3\alpha}{2}\ g(x) \ .$$

Du principe de comparaison énoncé dans un théorème précédent, il s'ensuit facilement que les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature. Supposons maintenant que $\alpha = 0$. Alors

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ / \ \forall x,\ b - \eta < x < b \ \Rightarrow \ \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon \ .$$

En posant $\varepsilon = 1$, on obtient ainsi l'existence d'un $\eta > 0$ tel que pour tout $b-\eta < x < b$, $f(x) \le g(x)$. Là encore, il suit du principe de comparaison que la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$ entraîne la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$.

Enfin, si $\alpha = +\infty$, alors

$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0 \ / \ \forall x,\ b - \eta < x < b \ \Rightarrow \ \frac{f(x)}{g(x)} \ge A \ .$$

En prenant $A = 1$, on obtient qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $b - \eta < x < b$, $f(x) \ge g(x)$. On applique une fois de plus le principe de comparaison, d'où l'on tire que la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ entraîne la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$. Le théorème est démontré. □

Un corollaire immédiat au théorème est le résultat suivant.

Corollaire 16.1. *Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions positives localement intégrables sur $[a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \leq +\infty$. On suppose qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que pour tout $c \leq x < b$, $g(x) \neq 0$, et on suppose que*

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

existe. Si $\alpha = 0$, la divergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ entraîne la divergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$, et si $\alpha = +\infty$, la divergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$ entraîne la divergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$.

Un autre corollaire au théorème est donné par le résultat important suivant.

Théorème 16.4 (Critère de Riemann)**.** *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive définie et localement intégrable sur $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$. On suppose que pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = s$ existe. Alors:*

(i) Si $\alpha > 1$ et $0 \leq s < +\infty$, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge ,

(ii) Si $\alpha \leq 1$ et $0 < s \leq +\infty$, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge .

En particulier, si $0 < s < +\infty$, les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ sont de même nature.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème que l'on vient de démontrer avec pour fonction g la fonction $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, sachant que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. □

17. Pour résumer

En résumé de ce qui a été dit, lorsque les problèmes d'intégrale généralisée sont sur la **borne droite**, et lorsque les fonctions sont positives:

[1] Critère borné. Soient $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction positive localement intégrable sur $[a, b[$. Pour que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge il faut et il suffit qu'il existe une constante réelle $M > 0$ telle que pour tout $a \leq x < b$, $\int_a^x f(t)dt \leq M$.

[2] Principe de comparaison. Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions positives localement intégrables sur $[a, b[$. On suppose que pour tout $a \leq x < b$, $f(x) \leq g(x)$. Alors

$$\int_a^b g(t)dt \text{ converge } \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt \text{ converge .}$$

En particulier, la divergence de $\int_a^b f(t)dt$ entraîne la divergence de $\int_a^b g(t)dt$.

[3] Condition nécessaire à l'infini. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive localement intégrable sur $[a, +\infty[$. On suppose que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ existe et } \int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ converge .}$$

Alors nécessairement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

[4] Par équivalences. Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions positives localement intégrables sur $[a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \leq +\infty$. On suppose qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que pour tout $c \leq x < b$, $g(x) \neq 0$, et on suppose que

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

existe. Si $0 < \alpha < +\infty$, les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature, à savoir simultanément convergentes ou simultanément divergentes.

[5] Par comparaison. Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus, et si $\alpha = 0$, alors la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$ entraîne la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ (et contraposée). Et si $\alpha = +\infty$, la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ entraîne la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$ (et contraposée).

[6] Critère de Riemann. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive définie et localement intégrable sur $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$. On suppose que pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = s$ existe. Alors:

(i) Si $\alpha > 1$ et $0 \leq s < +\infty$, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge ,

(ii) Si $\alpha \leq 1$ et $0 < s \leq +\infty$, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge .

En particulier, si $0 < s < +\infty$, les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ sont de même nature.

Toujours en résumé de ce qui a été dit, mais maintenant lorsque les problèmes d'intégrale généralisée sont sur la **borne gauche**:

[1] Critère borné. Soient $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive localement intégrable sur $]a, b]$. Pour que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge il faut et il suffit qu'il existe une constante réelle $M > 0$ telle que pour tout $a < x \leq b$, $\int_x^b f(t)dt \leq M$.

[2] Principe de comparaison. Soient $f, g :]a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions positives localement intégrables sur $]a, b]$. On suppose que pour tout $a < x \leq b$, $f(x) \leq g(x)$. Alors

$$\int_a^b g(t)dt \text{ converge} \implies \int_a^b f(t)dt \text{ converge} .$$

En particulier, la divergence de $\int_a^b f(t)dt$ entraîne la divergence de $\int_a^b g(t)dt$.

[3] Condition nécessaire à l'infini. Soit $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive localement intégrable sur $] - \infty, b]$. On suppose que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \text{ existe et } \int_{-\infty}^b f(t)dt \text{ converge} .$$

Alors nécessairement $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

[4] Par équivalences. Soient $f, g :]a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions positives localement intégrables sur $]a, b]$, avec $b \in \mathbb{R}$ et $a \geq -\infty$. On suppose qu'il existe $c \in]a, b]$

tel que pour tout $a < x \leq c$, $g(x) \neq 0$, et on suppose que

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

existe. Si $0 < \alpha < +\infty$, les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature, à savoir simultanément convergentes ou simultanément divergentes.

[5] **Par comparaison.** Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus, et si $\alpha = 0$, alors la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$ entraîne la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ (et contraposée). Et si $\alpha = +\infty$, la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ entraîne la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$ (et contraposée).

[6] **Critère de Riemann.** Soit $f :]0, a] \to \mathbb{R}$ une fonction positive définie et localement intégrable sur $]0, a]$, $a \in \mathbb{R}^{+\star}$. On suppose que pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha f(x) = s$ existe. Alors:

(i) Si $\alpha < 1$ et $0 \leq s < +\infty$, $\int_0^a f(t)dt$ converge ,

(ii) Si $\alpha \geq 1$ et $0 < s \leq +\infty$, $\int_0^a f(t)dt$ diverge .

En particulier, si $0 < s < +\infty$, les intégrales $\int_0^a f(t)dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ sont de même nature.

18. Un exercice

Exercice: Montrer la convergence de l'intégrale généralisée

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1 + t^2} dt \ .$$

Calculer I en effectuant le changement de variables $x = \frac{1}{t}$.

Solution: La fonction $x \to \frac{\ln(x)}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$. L'intégrale est généralisée aux deux bornes 0 et $+\infty$. Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ la fonction intégrée $f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$. Cette fonction est négative pour $0 < x \leq 1$ et positive pour $x \geq 1$. Elle est donc de signe constant au voisinage des bornes et on peut donc appliquer les critères de convergence précédents. On a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{\ln(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 + x^2} = 1 \ .$$

L'intégrale généralisée $\int_0^1 \ln(t)dt$ (généralisée en 0) est convergente (cf. ci-dessus) Donc (par équivalence), I est convergente en 0. Pour ce qui est de la convergence en $+\infty$ on remarque que pour tout $0 < \alpha < 2$,

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = 0 \ .$$

En particulier, par exemple,

$$\lim_{x \to +\infty} x^{3/2} f(x) = 0 \ .$$

Comme $3/2 > 1$ le critère de Riemann permet alors d'affirmer que I est aussi convergente en $+\infty$. L'intégrale généralisée I est donc convergente en ses deux bornes. Au total, I est une intégrale convergente.

Reste maintenant à calculer I. Soient $0 < a < b < +\infty$. On effectue le changement de variable $x = 1/t$. Alors

$$dx = -dt/t^2 = -x^2 dt$$

et on récupère ainsi que

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt &= \int_{1/b}^{1/a} \frac{\ln(\frac{1}{x})}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{1}{x^2}dx\\ &= -\int_{1/b}^{1/a}\frac{\ln(x)}{1+x^2}dx\ .\end{aligned}$$

En passant à la limite en $a \to 0^+$ et $b \to +\infty$ on obtient que $I = -I$. Donc $I = 0$.
□

19. Les intégrales de Bertrand

Théorème 19.1 (Intégrales de Bertrand)**.** *Soient $a > 1$ et α, β deux réels. On considère l'intégrale $I_{\alpha\beta}$, dite de Bertrand, généralisée en $+\infty$, donnée par*

$$I_{\alpha\beta} = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}dt\ .$$

Alors $I_{\alpha\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ et β quelconque, ou alors $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Démonstration. Pour commencer, on suppose que $\alpha = 1$, et on montre que $I_{1\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$. Pour le voir on remarque qu'avec le changement de variables $u = \ln t$,

$$\int_a^x \frac{1}{t(\ln t)^\beta}dt = \int_{\ln a}^{\ln x}\frac{1}{u^\beta}du\ .$$

On est ainsi ramené à une intégrale de Riemann généralisée en $+\infty$, dont on sait qu'elle converge si et seulement si $\beta > 1$.

On suppose maintenant que $\alpha > 1$. On montre que $I_{\alpha\beta}$ converge pour tout β. Sachant que pour tout $s > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^s} = 0\ ,$$

on voit que pour $1 < \gamma < \alpha$,

$$\lim_{x\to+\infty} x^\gamma \frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta} = 0\ .$$

Le résultat annoncé découle alors du critère de Riemann.

Supposons pour finir que $\alpha < 1$. On montre que pour tout β, $I_{\alpha\beta}$ diverge. En effet, pour $\alpha < \gamma < 1$,

$$\lim_{x\to+\infty} x^\gamma \frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta} = +\infty\ ,$$

et là encore le résultat annoncé suit du critère de Riemann. □

20. Le critère d'Abel

Le critère d'Abel concerne les fonctions changeant de signe. On commence par démontrer le résultat suivant. Seule la deuxième formule de la moyenne nous sera utile.

Théorème 20.1 (Formules de la moyenne)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$, et soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.*

(1) (Première formule de la moyenne) Si $g \geq 0$ sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$.

(2) (Deuxième formule de la moyenne) Si f est décroissante et positive ou nulle sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)\int_a^c g(t)dt$.

Démonstration. (1) Soient m et M les minimums et maximums de f sur $[a, b]$. Comme $g \geq 0$, on a $mg \leq fg \leq Mg$ sur $[a, b]$. Par suite

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt} \leq M \ .$$

Le théorème des valeurs intermédiaires donne alors qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt} \ .$$

La première formule de la moyenne est démontrée.

(2) On démontre la deuxième formule de la moyenne en supposant pour simplifier que f est C^1 (et non pas seulement continue). Comme f est continue décroissante positive ou nulle sur $[a, b]$, on peut supposer que $f(a) > 0$ (car sinon $f = 0$ sur $[a, b]$ et le résultat est immédiat). L'équation étant homogène en f on peut aussi, quitte à multiplier f par $1/f(a)$, supposer que $f(a) = 1$. Soit

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt \ .$$

Alors G est continue sur $[a, b]$. On note m le minimum de G sur $[a, b]$ et M le maximum de G sur $[a, b]$. En raison du théorème des valeurs intermédiaires, G prend toutes les valeurs entre m et M. Il suffit donc de montrer que

$$m \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq M \ . \tag{20.1}$$

En intégrant par parties,

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)g(t)dt \ .$$

Comme f est décroissante, $f' \leq 0$. La première formule de la moyenne donne qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\begin{aligned}\int_a^b (-f'(t))g(t)dt &= G(c)\int_a^b (-f'(t))dt \\ &= G(c)\left(f(a) - f(b)\right) \ .\end{aligned}$$

Donc

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(b)G(b) + (1 - f(b))\,G(c)$$

puisqu'ici $f(a) = 1$. On a $0 \leq f(b) \leq 1$ puisque f est décroissante et positive ou nulle. Donc

$$\min\left(G(b), G(c)\right) \leq f(b)G(b) + (1 - f(b))\, G(c) \leq \max\left(G(b), G(c)\right)$$

et comme $m \leq \min\left(G(b), G(c)\right)$ et $\max\left(G(b), G(c)\right) \leq M$, on en déduit (20.1). D'où le théorème. □

On énonce et démontre maintenant le critère d'Abel pour les fonctions changeant de signe. Les hypothèses de continuité assumées dans l'énoncé peuvent être relaxées en des hypothèses plus souples (par exemple sans hypothèse de régularité sur f et en supposant que g admet une limite à droite en tout point de $[a, b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a, b[$).

Théorème 20.2 (Le critère d'Abel)**.** *Soient $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions définies et continues sur $[a, +\infty[$. On suppose que f est positive, décroissante, et tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$. On suppose par ailleurs qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x > a$, $\left|\int_a^x g(t)dt\right| \leq M$. L'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est alors convergente.*

Démonstration. On utilise la seconde formule de la moyenne. Pour $a \leq u \leq x$, il existe $c_x \in [u, x]$ tel que

$$\int_u^x f(t)g(t)dt = f(u) \int_u^{c_x} g(t)dt \ .$$

Donc

$$\left|\int_u^x f(t)g(t)dt\right| \leq M f(u) \ .$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > a$ tel que $0 \leq f(c) \leq \varepsilon/M$ pour tout $c \geq A$. Alors pour tout $u, x \in [A, +\infty[$,

$$\left|\int_u^x f(t)g(t)dt\right| \leq \varepsilon \ . \tag{20.2}$$

On veut montrer que $\int_a^x g(t)dt$ a une limite finie lorsque $x \to +\infty$. Cela revient à montrer que pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers $+\infty$, la suite des

$$u_n = \int_a^{x_n} g(t)dt$$

a une limite finie lorsque $n \to +\infty$, ou encore que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy. Pour tout $A > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}^\star$ tel que $x_n \geq A$ pour tout $n \geq N$. On a

$$u_q - u_p = \int_{x_p}^{x_q} f(t)g(t)dt \ .$$

Par suite (20.2) entraîne que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^\star \ / \ \forall p, q \geq N, |u_q - u_p| \leq \varepsilon \ ,$$

et donc $(u_n)_n$ est bien de Cauchy. D'où le théorème. □

On donne un exemple d'application du critère. On considère l'intégrale généralisée en $+\infty$,

$$I = \int_\pi^{+\infty} \frac{sint}{t} dt \ .$$

On prétend que cette intégrale est convergente mais pas absolument convergente. Que cette intégrale soit convergente s'obtient facilement à partir du critère d'Abel.

La fonction $x \to \frac{1}{x}$ est en effet positive, continue, décroissante et elle tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$. Par ailleurs, la fonction sinus est continue et pour tout $x > \pi$,

$$\left| \int_{\pi}^{x} sint dt \right| = \left| (-cost)_{\pi}^{x} \right| \leq 2 \ ,$$

de sorte qu'il est effectivement possible d'appliquer le critère d'Abel.

A l'inverse, on remarque que pour tout $n \geq 1$ entier, et tout $t \in [(n-1)\pi, n\pi]$,

$$\begin{aligned} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|sint|}{t} dt &\geq \frac{1}{n\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |sint| dt \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_{0}^{\pi} sint dt \\ &= \frac{2}{n\pi} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|sint|}{t} dt &= \sum_{p=2}^{n} \int_{(p-1)\pi}^{p\pi} \frac{|sint|}{t} dt \\ &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \ . \end{aligned}$$

Donc la convergence de l'intégrale généralisée $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|sint|}{t} dt$ devrait entrainer la convergence de la série $\sum \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|sint|}{t} dt$, et puisque la série harmonique de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, on tire de ce qui a été dit plus haut que l'intégrale généralisée $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|sint|}{t} dt$ diverge elle aussi.

En d'autres termes, l'intégrale généralisée

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$$

est convergente mais n'est pas absolument convergente.

21. Interversions limites et intégrales

On traite dans ce chapitre des interversions limites et intégrales. Le premier théorème traite du cas des intégrales définies. On rappelle que la convergence uniforme sur un ensemble I d'une suite $(f_n)_n$ de fonctions définies sur I vers une fonction f définie sur I se traduit par la phrase mathématique:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ .$$

On a alors le théorème suivant.

Théorème 21.1 (Convergence uniforme). *Soient $a < b$ deux réels et $I = [a, b]$. On considère une suite $(f_n)_n$ de fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f sur I, et que pour tout n, f_n est intégrable au sens de Riemann sur I. Alors f est intégrable au sens de Riemann sur I et*

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \lim_{n \to +\infty} \int_{a}^{b} f_n(x) dx \ .$$

Démonstration. (1) On commence par montrer l'intégrabilité de f. Soit $\varepsilon > 0$ donné quelconque. Par convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{21.1}$$

pour tout $x \in I$. Par ailleurs, comme f_n est intégrable au sens de Riemann sur I il existe $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ deux fonctions en escalier telles que

$$|f_n - \varphi_\varepsilon| \leq \psi_\varepsilon \tag{21.2}$$

dans I et

$$\int_a^b \psi_\varepsilon(x)dx < \frac{\varepsilon}{2} \ . \tag{21.3}$$

Avec (21.1) et (21.2) on obtient que

$$\begin{aligned} |f(x) - \varphi_\varepsilon(x)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \psi_\varepsilon(x) \end{aligned} \tag{21.4}$$

pour tout $x \in I$. La fonction

$$\tilde{\psi}_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \psi_\varepsilon$$

est une fonction en escalier, et il suit de (21.3) que

$$\begin{aligned} \int_a^b \tilde{\psi}(x)dx &= \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b \psi_\varepsilon(x)dx \\ &< \varepsilon \ . \end{aligned} \tag{21.5}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, il suit de (21.4) et (21.5) que f est bien intégrable au sens de Riemann sur I.

(2) Soit $\varepsilon > 0$ donné quelconque. Par convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $x \in I$,

$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \ .$$

On en déduit que

$$\int_a^b f_n(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f_n(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

et ainsi, en particulier,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon \ .$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

et le théorème est démontré. □

Le second théorème que l'on démontre traite du cas des intégrales généralisées. C'est une version faible du théorème de convergence dominée que vous verrez en L3 et dans laquelle l'hypothèse de convergence uniforme peut être remplacée par une hypothèse de convergence simple.

Théorème 21.2 (Convergence dominée faible). *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de bornes $a < b$ ($a \geq -\infty$, $b \leq +\infty$). On considère une suite $(f_n)_n$ de fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f sur tout intervalle fermé borné $[\alpha, \beta] \subset I$, et que pour tout n, f_n est localement intégrable sur I. On suppose de plus qu'il existe $g : I \to \mathbb{R}^+$ pour laquelle l'intégrale généralisée $\int_a^b g(x)dx$ est convergente et qui est telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout n et tout $x \in I$ (domination). Alors f est localement intégrable sur I, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente (ainsi que les intégrales généralisées $\int_a^b f_n(x)dx$) et*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)dx \ .$$

Démonstration. Que f soit localement intégrable sur I suit du théorème précédent. L'hypothèse de domination entraîne clairement, par passage à la limite en n, que $|f(x)| \leq g(x)$ pour tout $x \in I$. Donc, clairement, par critères de comparaison, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente. De même, les intégrales généralisées $\int_a^b f_n(x)dx$ sont absolument convergen,tes par domination et critères de comparaison. Pour simplifier la preuve supposons maintenant que $I = [a, b[$ et que les intégrales soient donc généralisées en b uniquement. En vertue du théorème précédent, pour tout $0 < \delta \ll 1$,

$$\int_a^{b-\delta} f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^{b-\delta} f_n(x)dx \ .$$

Par domination on a aussi que

$$\int_{b-\delta}^b |f(x)|dx \leq \int_{b-\delta}^b g(x)dx \text{ et } \int_{b-\delta}^b |f_n(x)|dx \leq \int_{b-\delta}^b g(x)dx$$

pour tout n. Soit $\varepsilon > 0$ donné quelconque. Par intégrabilité de g, il existe $0 < \delta \ll 1$ tel que

$$\int_{b-\delta}^b g(x)dx < \frac{\varepsilon}{4} \ .$$

On fixe un tel $\delta > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\left| \int_a^{b-\delta} f_n(t)dt - \int_a^{b-\delta} f(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{4} \ .$$

Pour $n \geq N$ on a alors

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt \right| \\ &\leq \left| \int_a^{b-\delta} f_n(t)dt - \int_a^{b-\delta} f(t)dt \right| + \int_{b-\delta}^b |f(x)|dx + \int_{b-\delta}^b |f_n(x)|dx \\ &\leq \frac{3}{4}\varepsilon \end{aligned}$$

et on a ainsi montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, \left| \int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt \right| < \varepsilon \ .$$

D'où le théorème. □

On s'attaque maintenant au cas de l'interversion intégrales et séries. Comme la somme d'une série n'est rien d'autres que la limite des sommes partielles, le premier théorème passe sans problème aux séries.

Théorème 21.3 (Convergence uniforme)**.** *Soient $a < b$ deux réels et $I = [a, b]$. On considère une suite $(u_n)_n$ de fonctions $u_n : I \to \mathbb{R}$. On suppose que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur I, et que pour tout n, u_n est intégrable au sens de Riemann sur I. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable au sens de Riemann sur I et*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)dx \ .$$

Pour le second des théorèmes que l'on a démontré il y a en fait beaucoup plus fort que sa simple traduction aux séries. On énoncé le théorème suivant sans preuve. Vous la verrez en L3.

Théorème 21.4 (Convergences dominée et monotone pour les séries)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de bornes $a < b$ ($a \geq -\infty$, $b \leq +\infty$). On considère une suite $(u_n)_n$ de fonctions $u_n : I \to \mathbb{R}$. On suppose que la série $\sum u_n$ converge simplement sur I vers une fonction f localement intégrable sur I. On suppose de plus que les intégrales $\int_a^b u_n(x)dx$ sont absolument convergentes et que la série numérique $\sum \int_a^b |u_n(x)|dx$ converge. Alors $\int_a^b f(x)dx$ est convergente, la série $\sum \int_a^b u_n(x)dx$ est convergente et*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)dx \ .$$

CHAPITRE 4

Fonctions définies par une intégrale

22. Un peu de topologie de $\mathbb{R}^2$.

On place sur $\mathbb{R}^2$ la distance euclidienne d. Alors $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par l'équation

$$d(a,b) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

pour tous points $a = (x_a, y_a)$ et $b = (x_b, y_b)$ de $\mathbb{R}^2$.

Définition 22.1. *Soit $a \in \mathbb{R}^2$ un point de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_n)_n$ une suite de points de $\mathbb{R}^2$. On dit que $(x_n)_n$ converge vers a si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, d(a, x_n) < \varepsilon \ .$$

On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$.

Soient $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$ un réel strictement positif. On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r le sous ensemble $B_a(r)$ de $\mathbb{R}^2$ constitué des points de $\mathbb{R}^2$ dont la distance au point a est strictement inférieure à r. Donc $B_a(r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \ / \ d(a,x) < r \right\}$.

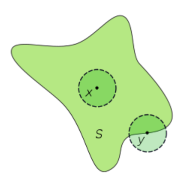
Définition 22.2 (Ouverts et fermés)**.** *Un sous ensemble $A \subset \mathbb{R}^2$ est dit un ouvert de $\mathbb{R}^2$ si*

$$\forall a \in A, \exists r_a > 0 \ / \ B_a(r_a) \subset A \ .$$

Donc $A \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ si tout point de A est centre d'une boule ouverte entièrement contenue dans A. Un sous ensemble $A \subset \mathbb{R}^2$ est dit un fermé de $\mathbb{R}^2$ si son complémentaire $\mathbb{R}^2 \backslash A$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Par convention, $\emptyset$ et $\mathbb{R}^2$ sont à la fois ouverts et fermés.

La **frontière** d'un sous ensemble $A \subset \mathbb{R}^2$est l'ensemble des points $a \in \mathbb{R}^2$ qui sont tels que pour tout $r > 0$, la boule ouverte $B_a(r)$ contient à la fois des points de A et de son complémentaire $\mathbb{R}^2 \backslash A$.

Un point $a \in A$ est par contre un **point intérieur** à A s'il existe $r_a > 0$ tel que $B_a(r_a) \subset A$.



Ici x est un point intérieur au patatoïde S, tandis que y est un point frontière.

Remarques: (1) Un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est un patatoïde qui ne contient aucun des points de sa frontière (tous les points de l'ensemble sont des points intérieurs à l'ensemble).

(2) Un fermé de $\mathbb{R}^2$ est un patatoïde qui contient tous les points de sa frontière.

(3) Un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ peut très bien n'être ni ouvert, ni fermé (contenir certains points de sa frontière et pas d'autres).

Tout point de la frontière d'un ensemble est limite d'une suite de points de l'ensemble. Et toute limite de points d'un ensemble est soit un point intérieur, soit un point frontière. On en déduit le résultat suivant.

Théorème 22.1. *Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$. Alors A est un fermé de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de points de A, si $(x_n)_n$ converge dans $\mathbb{R}^2$, alors sa limite est forcément dans A.*

Les carrés $]a,b[\times]c,d[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ Les carrés $[a,b]\times[c,d]$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$.

Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille de sous ensembles de $\mathbb{R}^2$. On dit que $(U_i)_{i\in I}$ est un **recouvrement** de A si $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.

Un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de A est un **recouvrement ouvert** de A si les U_i sont tous des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

23. Sous ensembles compacts de $\mathbb{R}^2$

Définition 23.1. *Un sous ensemble $K \subset \mathbb{R}^2$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si de tout recouvrement ouvert de K on peut extraire un sous recouvrement qui est fini. Autrement dit, K est un compact de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de K, il existe $J \subset I$ un sous ensemble fini de I pour lequel $(U_i)_{i\in J}$ est encore un recouvrement ouvert de K.*

Le théorème suivant a lieu.

Théorème 23.1. *Les compacts de $\mathbb{R}^2$ sont précisément les fermés bornés de $\mathbb{R}^2$. De plus, dans un compact, toute suite possède une sous suite convergente (et cette propriété est même caractéristique des compacts).*

Les carrés $[a,b]\times[c,d]$ $(a,b,c,d$ des réels) sont des compacts de $\mathbb{R}^2$.

Etant donnée une suite $(x_n)_n$ on appelle sous suite de $(x_n)_n$ toute suite obtenue à partir d'une sélection des x_n. Une sous suite de $(x_n)_n$ est alors une suite du type $(x_{\varphi(n)})_n$, où $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même.

$$\begin{array}{cccccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & \dots \\
\cancel{x_1} & x_2 & x_3 & \cancel{x_4} & x_5 & \cancel{x_6} & \cancel{x_7} & x_8 & x_9 & \dots \\
- & x_{\varphi(1)} & x_{\varphi(2)} & - & x_{\varphi(3)} & - & - & x_{\varphi(4)} & x_{\varphi(5)} & \dots
\end{array}$$

Pour toute application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ de $\mathbb{N}$ dans lui-même, $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (le résultat se démontre facilement par récurrence sur n).

Un sous ensemble A de $\mathbb{R}^2$ est dit borné s'il existe $R > 0$ tel que $d(0,x) \leq R$ pour tout $x \in A$, où d est la distance euclidienne et 0 est le $0 = (0,0)$ de $\mathbb{R}^2$.

Une sous suite d'une suite convergente est convergente et de même limite (ce qui traduit le fait que si toute la suite converge vers un point x, une sélection va continuer à converger vers x).

24. Fonctions de deux variables réelles

Définition 24.1. *Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$. Soit $a \in A$ un point de A. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue au point a si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in A,\ d(a,x) < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \ .$$

Par extension on dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A.

Autrement dit, f est continue au point a si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de $f(a)$, pourvu que x soit suffisamment proche de a.

On démontre (relativement) facilement que $f : A \to \mathbb{R}$ est continue au point a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de points de A, si $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

Définition 24.2. *Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est uniformément continue sur A si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x, y \in A,\ d(x,y) < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon \ .$$

La continuité sur A se traduit par la phrase mathématique

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall y \in A,\ d(x,y) < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon \ .$$

Dans cette phrase le η dépend à la fois de ε et de x. Dans l'uniforme continuité le η devient uniforme par rapport à x.

Une fonction uniformément continue est continue. La réciproque (qui est fausse en générale) est néanmoins vraie sur les compacts.

Théorème 24.1. *Une fonction continue sur un compact y est uniformément continue.*

Démonstration. Soit donc A un compact et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur A. On veut montrer que f est uniformément continue sur A. On raisonne par l'absurde. On suppose que f n'est pas uniformément continue sur A. Alors

$$\exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall \eta > 0 \ ,\ \exists x, y \in A \text{ avec } d(x,y) < \eta \text{ et } |f(y) - f(x)| \geq \varepsilon \ .$$

On prend $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = \frac{1}{2}$,...,$\eta_n = \frac{1}{n}$,... Pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$ il existe alors $x_n, y_n \in A$ tels que

$$\begin{cases} d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \\ |f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon \ . \end{cases} \tag{24.1}$$

On obtient donc deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ de points de A. On procède alors par extraction successive de sous suites. La suite $(x_n)_n$ est une suite de A qui est compact. Donc il existe $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même pour laquelle la sous suite $(x_{\varphi(n)})_n$ converge. On note x sa limite. Comme A est fermé $x \in A$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = x \ . \tag{24.2}$$

On considère maintenant la suite $(y_{\varphi(n)})_n$. C'est une suite de points de A qui est compact. Donc elle possède une sous suite convergente et il existe $\psi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même pour laquelle la sous suite $(y_{\varphi(\psi(n))})_n$ converge. On note y sa limite. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} y_{\varphi(\psi(n))} = y \ . \tag{24.3}$$

Comme la suite $(x_{\varphi(\psi(n))})_n$ est une sous suite de la suite $(x_{\varphi(n)})_n$, et comme toute sous suite d'une suite convergente est convergente et a même limite, il suit de (24.2) que

$$\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(\psi(n))} = x \ . \tag{24.4}$$

On revient à (24.1). Alors, pour tout n,

$$\begin{cases} d(x_{\varphi(\psi(n))}, y_{\varphi(\psi(n))}) < \frac{1}{\varphi(\psi(n))}, \\ \left|f(y_{\varphi(\psi(n))}) - f(x_{\varphi(\psi(n))})\right| \geq \varepsilon \ . \end{cases} \tag{24.5}$$

Comme $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ et $\psi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$, on a

$$\varphi(\psi(n)) \geq \psi(n) \geq n$$

pour tout n. La première équation de (24.5) implique alors que pour tout n,

$$d(x_{\varphi(\psi(n))}, y_{\varphi(\psi(n))}) < \frac{1}{n} \ .$$

En passant à la limite en $n \to +\infty$, et en utilisant (24.3) et (24.4), on devrait avoir $d(x,y) = 0$, et donc $x = y$. En passant par ailleurs à la limite en $n \to +\infty$ dans la seconde équation de (24.5), on obtient par continuité de f et (24.3) et (24.4) que $|f(y) - f(x)| \geq \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ il y a là une contradiction. Le théorème est démontré. $\square$

25. Petit précis de continuité

Les fonctions coordonnées $(x,y) \to x$ et $(x,y) \to y$ sont continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Les fonctions constantes sont continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

La somme et le produit de fonctions continues et une fonction continue.

Le quotient de deux fonctions continues est une fonction continue là où le dénominateur ne s'annule pas.

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue et si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, alors $g \circ f$ est continue.

On regroupe ces propriétés sous les termes de **propriétés générales sur la continuité.**

Ainsi, par propriétés générales sur la continuité, les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$: $(x,y) \to x^3y^2$, $(x,y) \to 1 + x^2y$, $(x,y) \to x^3y^2 + \cos(x^2y^4)$, $(x,y) \to \ln(1 + x^2y^6)$, $(x,y) \to \frac{x^5y^7}{1+x^2y^4}$ etc.

26. Dérivées partielles

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(a,b) \in \Omega$ un point de Ω. Comme Ω est un ouvert, il existe $r > 0$ pour lequel $B_{(a,b)}(r) \subset \Omega$.

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère les fonctions partielles f_a, f_b, fonctions d'une variable réelles (donc dont la variable est dans une partie ou dans tout $\mathbb{R}$) définies par $f_a(y) = f(a,y)$ et $f_b(x) = f(x,b)$. On vérifie facilement que f_a est définie sur au moins l'intervalle $]b-r, b+r[$ et que f_b est définie sur au moins l'intervalle $]a-r, a+r[$.

Définition 26.1 (Dérivées partielles)**.** *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, (a,b) un point de Ω et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur Ω. On appelle dérivée partielle de f par rapport à x au point (a,b), si elle existe, la dérivée de la fonction f_b au point a. On la note $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$. De même, on appelle dérivée partielle de f par rapport à y au point (a,b), si elle existe, la dérivée de la fonction f_a au point b. On la note $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.*

On a donc, lorsqu'elles existent,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f_b'(a) \ ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = f_a'(b) \ .$$

Par exemple, si

$$f(x,y) = x^3y^2 + \cos(xy) \ ,$$

alors les dérivées partielles de f existent en tout point de $\mathbb{R}^2$, et pour tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 - y\sin(xy) \ ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y - x\sin(xy) \ .$$

Note: Attention, la différentiablité d'une fonction f en un point (a,b) ne se traduit pas par la seule existence des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ en ce point. Il faut en plus demander que

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a,b) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ &+ \|(x-a,y-b)\|o(1) \end{aligned}$$

où $\|(x-a,y-b)\| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ et où $o(1) \to 0$ lorsque $(x,y) \to (a,b)$. On parle alors de différentiablitié de f en (a,b) (et non plus de dérivabilité de f en (a,b)). La différentielle de f en (a,b) (qui remplace la dérivée en (a,b)) est l'application linéaire de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$(x,y) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)y \ .$$

Si par contre les dérivées partielles existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω alors f est effectivement différentiable sur Ω et même de classe C^1 sur Ω.

27. Fonctions définies par une intégrale définie

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a < b$ deux réels, et $f : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur $I \times [a,b]$. On suppose que pour tout $x \in I$, la fonction $t \to f(x,t)$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$. On peut alors définir la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)dt \ .$$

La question ici est de savoir sous quelle(s) condition(s) portant sur f, la fonction F va être continue, dérivable, ou intégrable.

Théorème 27.1. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a < b$ deux réels, et $f : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur $I \times [a,b]$. Si f est continue sur $I \times [a,b]$, la fonction réelle F définie sur I par $F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ est alors continue sur I.*

Démonstration. Pour simplifier la présentation, on suppose que $I = [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$ deux réels. Cela ne change pas grand chose car la continuité est une notion locale. Le produit $I \times [a,b]$ est alors un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, donc un compact de $\mathbb{R}^2$. Il s'ensuit (cf. plus haut) que f est en fait uniformément continue sur $I \times [a,b]$. En particulier, pour x_0 donné dans I, et pour $\varepsilon > 0$ quelconque, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in I,\ \forall t \in [a,b],\ |x - x_0| < \eta \ \Rightarrow\ |f(x,t) - f(x_0,t)| < \varepsilon\ .$$

Par suite, pour tout $x \in I$ tel que $|x - x_0| < \eta$,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_a^b \big(f(x,t) - f(x_0,t) \big) dt \right| \\ &\le \int_a^b |f(x,t) - f(x_0,t)|\, dt \\ &\le \varepsilon(b-a)\ . \end{aligned}$$

On a ainsi montré que

$$\forall x_0 \in I,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \eta\ \Rightarrow\ \big|F(x) - F(x_0)\big| < \varepsilon\ ,$$

à savoir que F est continue sur I. D'où le théorème. □

Pour la dérivabilité, le théorème suivant a lieu.

Théorème 27.2. *Soient $\alpha < \beta$ et $a < b$ quatre réels, et $f :]\alpha, \beta[\times [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et continue sur $]\alpha, \beta[\times [a,b]$. On suppose que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $]\alpha, \beta[\times [a,b]$. La fonction $F :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ est alors dérivable sur $]\alpha, \beta[$, de dérivée en tout point x de $]\alpha, \beta[$, la fonction $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.*

Démonstration. Soit $x_0 \in]\alpha, \beta[$. Pour tout $x \in]\alpha, \beta[$,

$$\begin{aligned} &F(x) - F(x_0) - (x - x_0) \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt \\ &= \int_a^b \left(f(x,t) - f(x_0,t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right) dt\ . \end{aligned}$$

Si on applique maintenant le théorème des accroissements finis à la fonction $x \to f(x,t)$, on obtient que pour tout $t \in [a,b]$, et tout $x \in]\alpha, \beta[$, il existe $\theta_x^t \in]0,1[$ tel que

$$f(x,t) - f(x_0,t) = (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_x^t(x - x_0), t)\ .$$

Soit alors $\delta > 0$ tel que $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset]\alpha, \beta[$. Le produit $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [a,b]$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, et donc un compact de $\mathbb{R}^2$. Il s'ensuit que la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est uniformément continue sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [a,b]$. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, $\eta < \delta$, tel que

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[,\ \forall t \in [a,b],\ \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| < \varepsilon\ .$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x,t) \in]x_0-\eta, x_0+\eta[\times[a,b]$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_x^t(x-x_0),t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| < \varepsilon\ ,$$

et on obtient ainsi que pour x tel que $|x-x_0|<\eta$,

$$\begin{aligned}
&\left|F(x)-F(x_0)-(x-x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt\right| \\
&\le \int_a^b \left|f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| dt \\
&= |x-x_0| \int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_x^t(x-x_0),t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| dt \\
&\le (\varepsilon|b-a|)\,|x-x_0|\ .
\end{aligned}$$

En d'autres termes, on a montré que

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon>0,\ \exists \eta>0\ /\ 0<|x-x_0|<\eta \\
&\Rightarrow \left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt\right| < \varepsilon\ ,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt\ .$$

Cela signifie encore que F est dérivable au point x_0 de dérivée en ce point

$$F'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt\ .$$

Puisque x_0 est quelconque dans $]\alpha,\beta[$, cela démontre le théorème. □

Pour finir, on traite de l'intégrabilité de F.

Théorème 27.3. *Soient $\alpha<\beta$ et $a<b$ quatre réels, et $f:]\alpha,\beta[\times[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction réelle définie et continue sur $]\alpha,\beta[\times[a,b]$. Pour tout intervalle $[\alpha_1,\beta_1]\subset]\alpha,\beta[$ la fonction réelle $F:]\alpha,\beta[\to\mathbb{R}$ définie par $F(x)=\int_a^b f(x,t)dt$ est alors intégrable au sens de Riemann sur $[\alpha_1,\beta_1]$ et $\int_{\alpha_1}^{\beta_1} F(x)dx = \int_a^b\big(\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(x,t)dx\big)dt$.*

Démonstration. Posons

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \int_a^b \Big(\int_{\alpha_1}^x f(\theta,t)d\theta\Big)dt \\
\Psi(x) &= \int_{\alpha_1}^x \Big(\int_a^b f(\theta,t)dt\Big)d\theta\ .
\end{aligned}$$

D'après ce qui a été dit plus haut (théorème sur la continuité), la fonction $\theta\to\int_a^b f(\theta,t)dt$ est continue. Par suite, Ψ est dérivable de dérivée

$$\Psi'(x) = \int_a^b f(x,t)dt\ .$$

Par ailleurs,

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{\alpha_1}^{x} f(\theta,t)d\theta = f(x,t)$$

existe et est continue. De ce qui a été dit plus haut (théorème sur la dérivabilité) on tire que Φ est dérivable de dérivée

$$\Phi'(x) = \int_a^b f(x,t)dt\ .$$

Ainsi, $\Psi' = \Phi'$, et puisque l'on a aussi que $\Phi(\alpha_1) = \Psi(\alpha_1)$ $(= 0)$, on obtient que $\Psi = \Phi$. En particulier, $\Psi(\beta_1) = \Phi(\beta_1)$, ce qui démontre le théorème. $\square$

Remarque: On pourra regarder ces théorèmes comme des théorèmes d'interversion. Leurs conclusions respectives équivalent à la validité des interversions

$$\lim_{x\to x_0}\int_a^b = \int_a^b \lim_{x\to x_0}$$
$$\frac{d}{dx}\int_a^b = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}$$
$$\int_\alpha^\beta\int_a^b = \int_a^b\int_\alpha^\beta\ .$$

C'est parfois (et même souvent) sous cet angle qu'il faudra interpréter ces théorèmes.

28. Fonctions définies par une intégrale généralisée

Définition 28.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soient $a < b$ avec $a \geq -\infty$ et $b \leq +\infty$ et soit $f : I\times]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur $I\times]a,b[$. On suppose que pour tout $x \in I$, la fonction $t \to f(x,t)$ est localement intégrable sur $]a,b[$. On dit que l'intégrale généralisée*

$$I_x = \int_a^b f(x,t)dt$$

converge normalement sur $I\times]a,b[$ s'il existe une fonction positive $g :]a,b[\to \mathbb{R}$, localement intégrable sur $]a,b[$, qui est telle que

$$\forall x \in I,\ \forall t \in]a,b[,\ |f(x,t)| \leq g(t)$$

et qui est telle que l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$ converge.

La convergence normale implique la convergence (absolue) ponctuelle: pour tout $x \in I$, l'intégrale I_x est absolument convergente dès que I_x est normalement convergente sur $I\times]a,b[$.

Théorème 28.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soient $a < b$ avec $a \geq -\infty$ et $b \leq +\infty$ et soit $f : I\times]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et continue sur $I\times]a,b[$. On suppose que $\int_a^b f(x,t)dt$ converge normalement sur tout produit du type $[\alpha,\beta]\times]a,b[$ où $[\alpha,\beta] \subset I$. La fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ est alors continue sur I.*

Démonstration. Soit $x_0 \in I$. Pour fixer les idées, on suppose que x_0 est intérieur à I, à savoir qu'il existe $\delta > 0$ tel que $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subset I$, et on suppose que a et b sont réels. Par hypothèse, il existe $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction positive localement intégrable qui vérifie

(i) $\forall (x,t) \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \times]a,b[, \ |f(x,t)| \leq g(t)$,

(ii) $\int_a^b g(t)dt$ converge.

Pour $\eta > 0$ petit, et pour $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$,

$$\begin{aligned}
&|F(x) - F(x_0)| \\
&\leq \int_a^b |f(x,t) - f(x_0,t)|dt \\
&= \int_{a+\eta}^{b-\eta} |f(x,t) - f(x_0,t)|dt + \int_a^{a+\eta} |f(x,t) - f(x_0,t)|dt \\
&\quad + \int_{b-\eta}^{b} |f(x,t) - f(x_0,t)|dt \\
&\leq \int_{a+\eta}^{b-\eta} |f(x,t) - f(x_0,t)|dt + 2\int_a^{a+\eta} g(t)dt + 2\int_{b-\eta}^{b} g(t)dt \ .
\end{aligned}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ donné. Comme $\int_a^b g(t)dt$ converge, pour $\eta > 0$ suffisamment petit, on va avoir

$$\int_a^{a+\eta} g(t)dt \leq \varepsilon \text{ et } \int_{b-\eta}^{b} g(t)dt \leq \varepsilon \ .$$

Fixons $\eta > 0$ comme ci-dessus. Avec le même raisonnement que celui fait dans la preuve du théorème de continuité dans le cas défini, on obtient l'existence d'un $\tilde{\eta} > 0$ tel que si $|x - x_0| < \tilde{\eta}$, alors

$$\int_{a+\eta}^{b-\eta} |f(x,t) - f(x_0,t)|dt < \varepsilon \ .$$

Ainsi,

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \tilde{\eta} > 0 \ / \ \forall x \in I, \ |x - x_0| < \tilde{\eta} \ \Rightarrow \ |F(x) - F(x_0)| < 5\varepsilon \ ,$$

et F est bien continue au point x_0, par suite sur tout I (puisque x_0 est quelconque dans I). D'où le résultat. □

Pour finir, on traite de la dérivabilité de la fonction F définie dans le théorème précédent.

Théorème 28.2. *Soit $f :]\alpha,\beta[\times]a,b[\to \mathbb{R}$, $a \geq -\infty$, $b \leq +\infty$, une fonction réelle définie et continue sur $]\alpha,\beta[\times]a,b[$. On suppose que:*

(i) $\forall x \in]\alpha,\beta[$, $\int_a^b f(x,t)dt$ converge,

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $]\alpha,\beta[\times]a,b[$,

(iii) $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ converge normalement sur tout produit du type $[\alpha_1,\beta_1] \times]a,b[$ où $[\alpha_1,\beta_1] \subset]\alpha,\beta[$.

La fonction $F :]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ est alors dérivable sur $]\alpha,\beta[$ et pour tout $x \in]\alpha,\beta[$, $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

Démonstration. Soient $x_0 \in]\alpha,\beta[$ et $\delta > 0$ tels que $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subset]\alpha,\beta[$. Pour fixer les idées, on suppose que a et b sont réels. D'après (iii), il existe $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction positive localement intégrable sur $]a,b[$ qui est telle que:

(iv) $\forall (x,t) \in [x_0-\delta, x_0+\delta]\times]a,b[$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \le g(t)$,

(v) $\int_a^b g(t)dt$ converge.

Pour $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ et $\eta > 0$, η petit, on écrit maintenant que

$$
\begin{aligned}
&\left|F(x) - F(x_0) - (x-x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt\right| \\
&\le \int_a^b \left|f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| dt \\
&= |x-x_0| \int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta(x-x_0),t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| dt \\
&\le |x-x_0| \int_{a+\eta}^{b-\eta} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta(x-x_0),t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| dt \\
&\quad + |x-x_0| \int_a^{a+\eta} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta(x-x_0),t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| dt \\
&\quad + |x-x_0| \int_{b-\eta}^{b} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta(x-x_0),t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| dt \\
&\le |x-x_0| \int_{a+\eta}^{b-\eta} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta(x-x_0),t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| dt \\
&\quad + 2|x-x_0| \int_a^{a+\eta} g(t)dt + 2|x-x_0| \int_{b-\eta}^{b} g(t)dt\ .
\end{aligned}
$$

où $\theta \in]0,1[$ dépend de x et de t. On conclue ici en choisissant $\eta > 0$ petit pour que

$$\int_a^{a+\eta} g(t)dt \le \varepsilon \text{ et } \int_{b-\eta}^{b} g(t)dt \le \varepsilon\ ,$$

et on raisonne comme dans la preuve du théorème analogue dans le cas défini pour l'intégrale définie

$$\int_{a+\eta}^{b-\eta} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta(x-x_0),t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| dt\ .$$

On obtient alors que

$$
\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0,\ \exists \tilde{\eta} > 0\ /\ |x-x_0| < \tilde{\eta}\ \Rightarrow \\
&\left|F(x) - F(x_0) - (x-x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt\right| < 5\varepsilon|x-x_0|\ ,
\end{aligned}
$$

et donc que

$$
\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0,\ \exists \tilde{\eta} > 0\ /\ |x-x_0| < \tilde{\eta}\ \Rightarrow \\
&\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt\right| < 5\varepsilon\ ,
\end{aligned}
$$

ce qui prouve le résultat. $\square$

En copiant la preuve du Théorème 27.3 vous pourrez aussi "fabriquer" des théorèmes d'interversion d'intégrales, mais vous les verrez plutôt sous la forme de théorèmes de Fubini qui seront étudiés en L3.

29. L'intégrale de Gauss

On appelle intégrale de Gauss toute intégrale du type

$$I_a = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt \ ,$$

où $a > 0$ est un réel strictement positif. On veut montrer le résultat suivant.

Lemme 29.1. *Les intégrales de Gauss sont convergentes et*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

pour tout $a > 0$.

Démonstration. Clairement les intégrales de Gauss sont convergentes puisque $e^{-at^2} \leq 1/at^2$ pour tout $|t| \geq 1$. Pour ce qui est du calcul de ces intégrales, on traite le cas $a = 1$. Le cas général s'obtient à partir du cas $a = 1$ avec le changement de variable $u = \sqrt{a}t$. Par parité,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-at^2} dt \ .$$

On introduit les fonctions

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2} dt \ , \\ g(x) &= \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt \ , \\ h(x) &= g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 \ . \end{aligned}$$

Ces fonctions sont dérivables. Pour f on obtient avec les théorèmes des sections précédentes que

$$f'(x) = -\int_0^1 e^{-(1+t^2)x} dt \ .$$

Comme $g(x) = f(x^2)$ on en déduit pour $x > 0$ que

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2x \int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2} dt \\ &= -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-t^2x^2} dt \\ &= -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du \end{aligned}$$

avec le changement de variable $u = tx$. En ce qui concerne h on trouve alors que

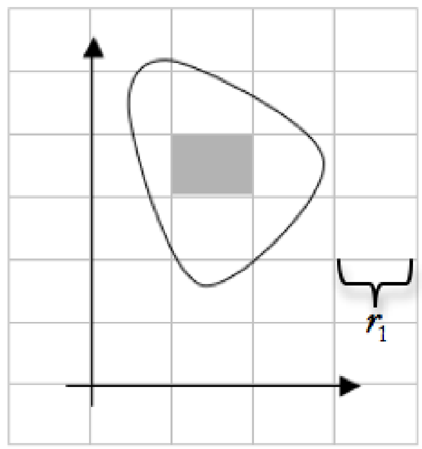
$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(x) + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour tout $x > 0$. On a
$$f(0) = \mathrm{Arctg}(1) = \frac{\pi}{4} \ .$$
Par suite, comme $f(0) = g(0) = h(0)$, on voit que $h(x) = \frac{\pi}{4}$ pour tout $x > 0$ (car h étant à dérivée nulle elle est constante). Toujours en raison des théorèmes des sections précédentes,
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \ .$$
On en déduit que
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$
puisque $g(x) = f(x^2)$. En faisant tendre $x \to +\infty$ dans l'équation $h(x) = \frac{\pi}{4}$ on obtient alors que
$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2 = \frac{\pi}{4} \ .$$
Comme l'intégrale est positive, on en déduit que
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
et la parité donne finalement le résultat voulu. Le lemme est démontré. $\square$

CHAPITRE 5

Intégrales doubles des fonctions continues

Soit Ω un domaine (un patatoïde) de $\mathbb{R}^2$. On considère un quadrillage de $\mathbb{R}^2$ en rectangles de tailles $\varepsilon_1 = \Delta x$ et $\varepsilon_2 = \Delta y$. On a alors le schéma suivant:

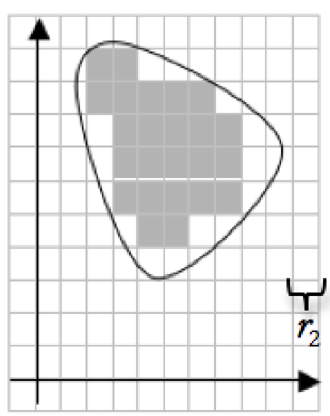


Ici $\Delta x = \Delta y = r_1$.
Une cellule est grisée.

On note m_{ij} les centres des rectangles qui constituent le quadrillage de $\mathbb{R}^2$. On considère alors la somme de Riemman:

$$S^f_{\Omega,\Delta x,\Delta y} = \sum_{i,j} f(m_{ij})\Delta x\Delta y \ ,$$

où la somme est effectuée sur les i, j pour lesquels le rectangle correspondant Rect_{ij} est entièrement inclus dans Ω (à savoir $\mathrm{Rect}_{ij} \subset \Omega$).



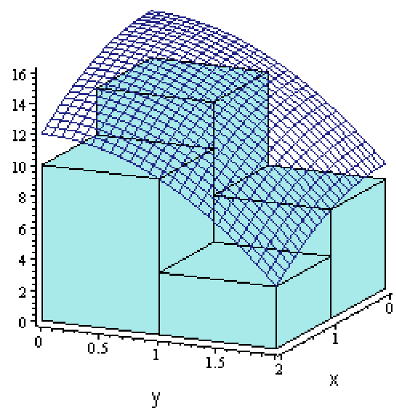
Ici $\Delta x = \Delta y = r_2$.

On a alors le théorème/définition suivant.

Définition 29.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine fermé borné de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur Ω. Les sommes de Riemann $S^f_{\Omega,\Delta x,\Delta y}$ convergent lorsque $\Delta x \to 0$ et $\Delta y \to 0$ vers une quantité notée*

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy \overset{def}{=} \lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0} S^f_{\Omega,\Delta x,\Delta y}$$

et que l'on appelle intégrale double de f sur Ω.



Lemme 29.2 (Propriétés premières de l'intégrale double)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine fermé borné de $\mathbb{R}^2$.*

1) *$\forall f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ continues, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\iint_\Omega (f+g)(x,y)dxdy = \iint_\Omega f(x,y)dxdy + \iint_\Omega g(x,y)dxdy \ ,$$

$$\iint_\Omega (\lambda f)(x,y)dxdy = \lambda \iint_\Omega f(x,y)dxdy \ ,$$

2) *$\forall f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ continues, si $f \le g$, alors*

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy \le \iint_\Omega g(x,y)dxdy \ ,$$

3) *$\forall f : \Omega \to \mathbb{R}$ continue,*

$$\left|\iint_\Omega f(x,y)dxdy\right| \le \iint_\Omega |f(x,y)|\, dxdy \ .$$

On a aussi la relation de Chasles étendue.

Lemme 29.3. *Si Ω se découpe en deux domaines ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ si on oublie les problèmes de bord), alors $\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega_1} f(x,y)dxdy + \iint_{\Omega_2} f(x,y)dxdy$.*

Et aussi les propriétés suivantes.

Lemme 29.4. *(1) $\iint_\Omega 1dxdy = Aire(\Omega)$,*

(2) Si $f \ge 0$, $\iint_\Omega f(x,y)dxdy = 0 \ \Leftrightarrow \ f \equiv 0$ (f continue).

30. Le théorème de Fubini

Théorème 30.1 (Fubini Sur Rectangle)**.** *Si f est continue sur un rectangle $\Omega = [\alpha, \beta] \times [a, b]$, alors*

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,y)dy \right) dx$$
$$= \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,y)dx \right) dy \ .$$

La dernière égalité a déjà été vue au chapitre précédent. Le théorème de Fubini ramène ainsi le calcul d'une intégrale double au calcul d'intégrales simples. Il y a des versions plus étendues de ce théorème.

Un domaine en piles de $\mathbb{R}^2$ est un domaine A du type

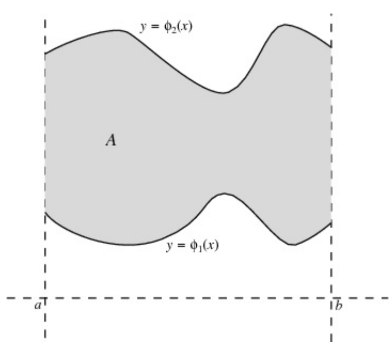
$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \leq x \leq b \ , \ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) \right\} \ ,$$

où $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues avec $\phi_1 \leq \phi_2$.

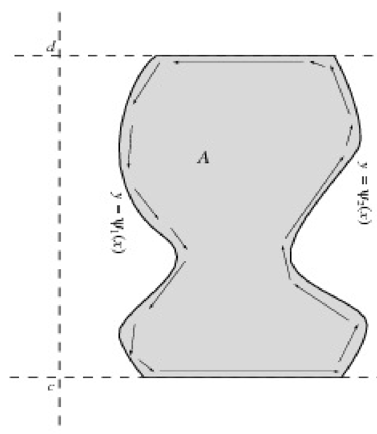
Un domaine en tranches de $\mathbb{R}^2$ est un domaine A du type

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \leq y \leq b \ , \ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \right\} \ ,$$

où $\psi_1, \psi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues avec $\psi_1 \leq \psi_2$.



Domaine en piles



Domaine en tranches

Théorème 30.2 (Fubini généralisé)**.** *Si Ω est un domaine en piles, à savoir un domaine de la forme $\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \leq x \leq b \ , \ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) \right\}$, où $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont continues avec $\phi_1 \leq \phi_2$, alors*

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

pour toute fonction continue $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Si Ω est un domaine en tranches, $\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \leq y \leq b \ , \ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \right\}$, où $\psi_1, \psi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont continues avec $\psi_1 \leq \psi_2$, alors

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

pour toute fonction continue $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

31. Changement de variables dans les intégrales doubles

On considère tout d'abord une application $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Donc $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, où $\Phi_1, \Phi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ si:

(1) les dérivées partielles $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}$ et $\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}$ existent en tout point de $\mathbb{R}^2$,

(2) les dérivées partielles $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}$ et $\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ en tant qu'applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

On dit que Φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ si:

(1) Φ est bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$,

(2) Φ et Φ^{-1} sont de classe C^1.

Ces définitions se généralisent facilement au cas où l'on remplace $\mathbb{R}^2$ par un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ (et on peut parler d'application de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, ou encore de C^1-difféomorphisme d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$).

La matrice jacobienne en un point (x, y) d'une application Φ de classe C^1 est la matrice

$$M_j(\Phi).(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

On a alors le théorème de changement de variables suivant.

Théorème 31.1 (Changement de variables). *Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^2$ et soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un C^1-difféomorphisme. Alors*

$$\begin{aligned} &\iint_\Omega f(x,y)dxdy \\ &= \iint_{\Phi^{-1}(\Omega)} (f \circ \Phi)(x,y) \times \left| det M_j(\Phi).(x,y) \right| dxdy \end{aligned}$$

pour toute fonction continue $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Emmanuel Hebey, Université de Cergy-Pontoise, Département de Mathématiques, Site de Saint-Martin, 2 avenue Adolphe Chauvin, 95302 Cergy-Pontoise cedex, France
E-mail address: Emmanuel.Hebey@cyu.fr