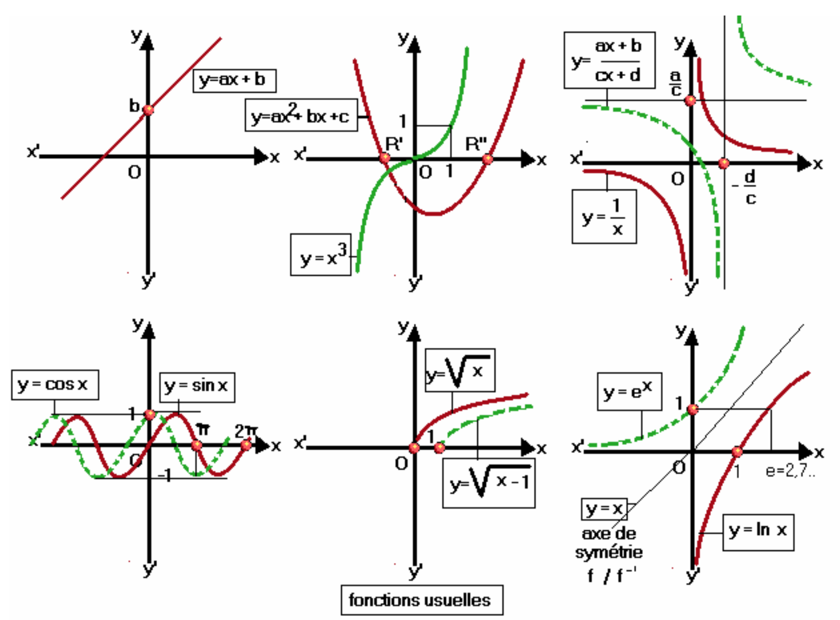
CALCUL DIFFÉRENTIEL AVANCÉ
DE LA DROITE RÉELLE
AUX PATATOÏDES

Licence-Master
Emmanuel Hebey



Le plan du polycopié en un schéma

Calcul différentiel dans $\mathbb{R}$.
Fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$\nwarrow \nearrow$
$+$ Topologie
$\swarrow \searrow$

$\downarrow$

Calcul différentiel pour les applications
de plusieurs variables réelles.
Applications $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.

$\swarrow \qquad \searrow$

Calcul différentiel dans les espaces
de Banach. Applications
$f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$.

Calcul différentiel sur des patatoïdes.
Applications $f : M \to N$.
Géométrie Différentielle.

$\downarrow$

Eléments de Géométrie
riemannienne.

Version du polycopié:
04 Mars 2025

Contents

Introduction

L'idée dans ce polycopié est de produire une histoire continue de la dérivation des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ aux applications entre patatoïdes. L'idée qui, je l'espère, ressortira de ce polycopié est qu'on raconte finalement toujours la même histoire construite autour des mêmes grands principes, et qu'il suffit souvent de regarder les choses un peu autrement, avec un peu de recul, pour découvrir qu'elles s'étendent facilement aux nouvelles configurations rencontrées.

Du coup, le polycopié prend les choses très à la base, pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour aboutir à la différentiation sur les variétés en passant par les applications de plusieurs variables réelles et les applications entre espaces vectoriels normés, de la première année de Licence donc, à la première année de Master.

Paris, le 16 Novembre 2022

CHAPITRE 1

Calcul différentiel en une variable réelle

On s'intéresse dans cette partie aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on entend une fonction définie sur un intervalle I, ou un sous ensemble D de $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, à savoir qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Suites réelles

Une suite réelle est une famille de réels indéxée par $\mathbb{N}$. On a donc un premier élément, souvent commençant à 0 ou 1, puis un second, puis un troisième etc. Une suite réelle est donc une famille (x_n) de réels avec $n \in \mathbb{N}$, ou $n \in \mathbb{N}^\star$, ou $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$ etc. La question intéressante pour les suites est leur comportement à l'infini, donc lorsque $n \to +\infty$, puisque lorsqu'on coupe une suite au delà d'un $N \in \mathbb{N}$ on ne se retrouve finalement qu'avec un nombre fini de points sans grand intérêt.

Définition 1.1. *Soit (x_n) une suite réelle et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que (x_n) a pour limite ℓ lorsque $n \to +\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, |x_n - \ell| < \varepsilon \ .$$

On écrit alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell$ ou encore $x_n \to \ell$ lorsque $n \to +\infty$. Une suite qui possède une limite finie est dite convergente.

L'unicité de la limite lorsqu'elle existe est donnée par le théorème suivant.

Théorème 1.1. *La limite, lorsqu'elle existe, est unique.*

Démonstration. Supposons qu'une suite (x_n) ait deux limites ℓ et ℓ'. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, |x_n - \ell| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N', |x_n - \ell'| < \varepsilon$$

On fixe $\varepsilon > 0$ quelconque. Soit n tel que $n \geq \max(N, N')$. Alors $|x_n - \ell| < \varepsilon$ et $|x_n - \ell'| < \varepsilon$. Donc

$$\begin{aligned} |\ell - \ell'| &= |\ell - x_n + x_n - \ell'| \\ &\leq |x_n - \ell| + |x_n - \ell'| \\ &< 2\varepsilon \ . \end{aligned}$$

On a ainsi montré que $|\ell - \ell'| < 2\varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, nécessairement $\ell' = \ell$. Le théorème est démontré. □

Une suite (x_n) n'a pas forcément de limite, c'est le cas par exemple lorsque $x_n = (-1)^n$ pour tout n. Par ailleurs, une suite (x_n) peut avoir une limite infinie. On dit que (x_n) a pour limite $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, x_n > A \ .$$

On dit que (x_n) a pour limite $-\infty$ lorsque $n \to +\infty$ si

$$\forall A < 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, x_n < A \ .$$

Des opérations sur les limites des suites convergentes sont données par le résultat suivant. Elles se généralisent aux limites infinies dès lors qu'on ne rencontre pas les opérations interdites $0 \times \pm\infty$, $\infty - \infty$ etc.

Lemme 1.1. *Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles convergentes et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors (λx_n), $(x_n + y_n)$ et $(x_n y_n)$ sont convergentes et*

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} (\lambda x_n) = \lambda \lim_{n\to+\infty} x_n \ , \\
&\lim_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n + \lim_{n\to+\infty} y_n \ , \\
&\lim_{n\to+\infty} (x_n \times y_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n \times \lim_{n\to+\infty} y_n \ .
\end{aligned}$$

De même, si $\lim_{n\to+\infty} x_n \neq 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} x_n}$$

et $x_n \neq 0$ pour n grand.

Démonstration. On va se limiter à démontrer deux affirmations: d'une part que $x_n y_n \to xy$ si $x_n \to x$ et $y_n \to y$, et d'autre part qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$ si $x \neq 0$ et $x_n \to x$. Supposons donc que $x_n \to x$ et $y_n \to y$ lorsque $n \to +\infty$. On écrit que

$$\begin{aligned}
|x_n y_n - xy| &= |(x_n - x)y_n + x(y_n - y)| \\
&\leq |x_n - x| \times |y_n| + |x| \times |y_n - y| \ .
\end{aligned}$$

Par hypothèses,

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, |x_n - x| < \varepsilon \\
&\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N', |y_n - y| < \varepsilon \ .
\end{aligned}$$

En prenant $\varepsilon = 1$ on obtient qu'il existe $N_0 = N$ tel que $|y_n| \leq |y| + 1$ pour tout $n \geq N_0$. On fixe maintenant $\varepsilon > 0$ quelconque. Soit $N_1 = \max(N_0, N, N')$. Alors

$$\begin{aligned}
|x_n y_n - xy| &\leq (|y| + 1)\varepsilon + |x|\varepsilon \\
&\leq (|x| + |y| + 1)\, \varepsilon
\end{aligned}$$

pour tout $n \geq N_1$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$, $|x_n y_n - xy| < (|x| + |y| + 1)\, \varepsilon$, et comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on a en fait montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N_1, |x_n y_n - xy| < \varepsilon \ .$$

D'où la convergence de $(x_n y_n)$ vers xy si $x_n \to x$ et $y_n \to y$ lorsque $n \to +\infty$.

On montre maintenant que si $x_n \to x$ lorsque $n \to +\infty$ et si $x \neq 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$. On reprend la phrase de convergence de (x_n) vers x. On choisit $\varepsilon = \frac{1}{2}|x|$. Il existe alors $n_0 = N$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|x_n - x| < \frac{1}{2}|x|$. Or $|x_n - x| \geq |x| - |x_n|$. Donc $|x_n| \geq |x| - \frac{1}{2}|x| = \frac{1}{2}|x| > 0$ pour tout $n \geq n_0$. D'où l'affirmation. □

En couplant les propriétés du lemme, si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \neq 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n} \ .$$

On verra plus loin qu'on a aussi

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right)$$

dès que f est continue, ce qui permet, avec le lemme, de "calculer" les limites d'expressions comme $z_n = x_n y_n^2 \sin(x_n + 2y_n)$ par exemple. Un résultat très utile est donné par le théorème des gendarmes qui suit.

Théorème 1.2 (Théorème des gendarmes). *Soient (x_n), (y_n) et (z_n) trois suites réelles. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \leq y_n \leq z_n$ pour tout $n \geq n_0$. On suppose que (x_n) et (z_n) convergent et on même limite ℓ. Alors (y_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \ell$.*

Démonstration. Par hypothèses

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, |x_n - \ell| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N', |z_n - \ell| < \varepsilon \ .$$

On fixe $\varepsilon > 0$ quelconque. Soit $\tilde{N} \ = \max(N, N')$. Alors

$$x_n > \ell - \varepsilon \text{ et } z_n < \ell + \varepsilon$$

pour $n \geq \tilde{N}$. Comme $x_n \leq y_n \leq z_n$ pour $n \geq n_0$ on obtient en posant $\hat{N} = \max(N, N', n_0)$ que $\ell - \varepsilon < y_n < \ell + \varepsilon$ pour tout $n \geq \hat{N}$. On a ainsi montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \hat{N} \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq \hat{N}, |y_n - \ell| < \varepsilon$$

et donc que (y_n) est convergente avec $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \ell$. □

Le théorème sui suit est très important. On dit d'une suite (x_n) qu'elle est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \leq M$ pour tout n, et qu'elle est minorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \geq M$ pour tout n.

Théorème 1.3. *Soit (x_n) une suite réelle.* **(1)** *On suppose que (x_n) est croissante à partir d'un certain rang, à savoir qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \leq x_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$. Alors (x_n) a une limite lorsque $n \to +\infty$ qui est soit finie soit égale à $+\infty$. Cette limite est finie, et la suite (x_n) est convergente, si et seulement si (x_n) est majorée.*
(2) *On suppose que (x_n) est décroissante à partir d'un certain rang, à savoir qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \geq x_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$. Alors (x_n) a une limite lorsque $n \to +\infty$ qui est soit finie soit égale à $-\infty$. Cette limite est finie, et la suite (x_n) est convergente, si et seulement si (x_n) est minorée.*

Démonstration. Il suffit de montrer (1) car on passe de (2) à (1) en considérant $(-x_n)$ au lieu de (x_n). Soit donc (x_n) une suite croissante à partir d'un certain rang n_0. Si (x_n) n'est pas majorée alors $\forall A > 0$, $\exists N \geq n_0$ tel que $x_n > A$ car sinon il existe $A > 0$ tel que $x_n \leq A$ pour tout $N \geq n_0$ et (x_n) est donc majorée par

$$M(n_0, A) = \max(\max_{i=0,\ldots,n_0-1} |x_i|, A) \ .$$

Par croissance de la suite à partir du rang n_0 on obtient ainsi que

$$\forall A > 0, \exists N \ / \ \forall n \geq N, x_n > A \ ,$$

ce qui signifie précisément que $x_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Donc

$$(x_n) \text{ non majorée } \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \ . \tag{1.1}$$

Supposons maintenant que (x_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Par croissance de (x_n) on a forcément qu'il existe N tel que $x_n \leq \ell$ pour tout $n \geq N$. Sinon on aurait en effet que pour tout N, il existe $n \geq N$ tel que $x_n > \ell$. Mais alors, par croissance à partir du rang n_0, en prenant $N = n_0$, on obtiendrait l'existence de $n_1 \geq N$ avec $x_n \geq x_{n_1} > \ell$ pour tout $n \geq n_1$. Mais il est alors impossible d'avoir que $x_n \to \ell$ lorsque $n \to +\infty$. Donc, effectivement, à partir d'un certain rang N, $x_n \leq \ell$. En particulier, (x_n) est bornée par une constante du type $M(N,\ell)$ comme ci-dessus. Donc:

$$\text{Si } (x_n) \text{ converge, alors } (x_n) \text{ est majorée.} \tag{1.2}$$

Réciproquement, supposons que (x_n) est majorée. On considère $\mathcal{S} = \{x_n, n \geq n_0\}$. Alors $\mathcal{S}$ est majoré, donc a une borne supérieure. On note $\ell = \sup \mathcal{S}$ la borne supérieure de $\mathcal{S}$, donc le plus petit des majorants de $\mathcal{S}$. Alors

(i) $\forall n \geq n_0, x_n \leq \ell$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq n_0 \ / \ x_N > \ell - \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé quelconque. Soit N donné par (ii). Par croissance de (x_n), $x_n > \ell - \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Et par (i) on obtient que $\ell - \varepsilon < x_n \leq \ell$ pour tout $n \geq N$. Or $\ell - \varepsilon < x_n \leq \ell$ implique que $|x_n - \ell| < \varepsilon$. Donc, comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, |x_n - \ell| < \varepsilon \ .$$

Il s'ensuit que:

$$\text{Si } (x_n) \text{ est majorée, alors } (x_n) \text{ converge.} \tag{1.3}$$

En combinant (1.1)-(1.3) on voit donc que (x_n) a toujours une limite, qui est soit finie soit égale à $+\infty$, et que cette limite est finie, et la suite (x_n) convergente, si et seulement si (x_n) est majorée. D'où le théorème. □

La notion de sous suite d'une suite est très importante. Soit (x_n) une suite réelle. Une sous suite de (x_n) est une sélection des x_n que l'on réordonne en un 1er élément, un second etc. La définition formelle est donnée par le théorème suivant.

Définition 1.2. *Soit (x_n) une suite réelle. Une sous suite de (x_n) est une suite qui s'écrit $(x_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.*

Plus visuellement:

$$\begin{array}{cccccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & \dots \\
\cancel{x_1} & x_2 & x_3 & \cancel{x_4} & x_5 & \cancel{x_6} & \cancel{x_7} & x_8 & x_9 & \dots \\
- & x_{\varphi(1)} & x_{\varphi(2)} & - & x_{\varphi(3)} & - & - & x_{\varphi(4)} & x_{\varphi(5)} & \dots
\end{array}$$

On montre facilement par récurrence que si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors $\varphi(n) \geq n$ pour tout n (puisque dans $\mathbb{N}$, $m > n \Leftrightarrow m \geq n+1$).

Théorème 1.4. *Toute sous suite d'une suite convergente est convergente et a même limite.*

Démonstration. Soient (x_n) une suite convergente, ℓ sa limite, et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Par hypothèse,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, |x_n - \ell| < \varepsilon \ .$$

Comme φ est strictement croissante, $\varphi(n) \geq n$ pour tout n (voir la remarque ci-dessus). Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, |x_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$$

et ainsi $(x_{\varphi(n)})$ est convergente et $\lim_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)} = \ell$. Le théorème est démontré. $\square$

Le théorème qui suit est extrêmement important. C'est un théorème dit de "compacité" qui exprime en fait que les intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$ sont des compacts de $\mathbb{R}$.

Théorème 1.5 (Théorème de Bolzano-Weierstrass). *Toute suite réelle bornée possède une sous suite convergente.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite réelle bornée. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note

$$y_n = \sup_{p \geq n} x_p$$

la borne supérieure de l'ensemble des x_p pour $p \geq n$, donc de $N_n = \{x_p \ / \ p \geq n\}$. Comme (x_n) est borné, l'ensemble N_n est borné et il possède donc bien une borne supérieure. Comme $N_{n+1} \subset N_n$, on a que $y_{n+1} \leq y_n$. Donc la suite (y_n) est décroisante. Comme elle est aussi manifestement bornée, et donc minorée, elle est convergente. Il existe donc $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = \ell \ .$$

Par définition de la borne supérieure:

(i) $\forall p \geq n, x_p \leq y_n$

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists p \geq n \ / \ x_p > y_n - \varepsilon$.

La première condition exprime que y_n est un majorant de N_n. La seconde qu'il n'y a pas de majorant de N_n qui soit strictement plus petit que y_n. Avec (i) et (ii), y_n est donc le plus petit des majorants de N_n, ce qui est précisément la définition de la borne supérieure. On construit maintenant, par récurrence, une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante vérifiant pour tout $n \geq 1$,

$$|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}| < \frac{1}{n} \ . \tag{1.4}$$

La construction de $\varphi(1)$ ne pose pas vraiment de problème. Avec $n = 1$ et $\varepsilon = 1$ on obtient à partir de (i) et (ii) qu'il existe $p \geq 1$ tel que $y_1 - 1 < x_p \leq y_1$. On pose $\varphi(1) = p$. Par défintion de y_p, $x_p \leq y_p$. Par ailleurs, (y_n) étant décroissante, $y_1 \geq y_p$. Donc $y_p - 1 < x_p \leq y_p$ et ainsi, on a bien que $|y_{\varphi(1)} - x_{\varphi(1)}| < 1$. Supposons maintenant $\varphi(1), \dots, \varphi(k)$ construits avec donc $\varphi(1) < \dots < \varphi(k)$ et (1.4) vérifiée pour tout $n = 1, \dots, k$. On pose $n = \varphi(k) + 1$ et $\varepsilon = 1/(k+1)$. Avec (i)-(ii) il existe $p \geq \varphi(k) + 1$ tel que

$$y_{\varphi(k)+1} - \frac{1}{k+1} < x_p \leq y_{\varphi(k)+1} \ .$$

On pose $\varphi(k+1) = p$. Alors $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ et par définition de y_n, on a que $x_{\varphi(k+1)} \leq y_{\varphi(k+1)}$. Par ailleurs, comme (y_n) est décroissante, $y_{\varphi(k+1)} \leq y_{\varphi(k)+1}$. Ainsi

$$y_{\varphi(k+1)} - \frac{1}{k+1} < x_{\varphi(k+1)} \leq y_{\varphi(k+1)}$$

et donc, en particulier, (1.4) est vérifié pour $n = k+1$. On a donc bien construit, φ par récurrence. La suite (y_n) étant convergente, la suite $(y_{\varphi(n)})$ l'est aussi, puisque toute sous suite d'une suite est convergente. Avec (1.4) et le théorème 1.2 des "gendarmes" on en déduit que $(x_{\varphi(n)})$ est convergente. Le théorème est démontré. $\square$

Une des conséquences de ce théorème est qu'une suite bornée qui ne converge pas, ne converge pas "moralement" non pas parce qu'il est impossible de lui trouver des limites mais parce que, en un certain sens (celui des sous suites), "elle en a trop". Une suite bornée qui ne converge pas aura forcément au moins deux sous suites convergentes de la suite mais avec des limites différentes. Pour le voir supposons que (x_n) est bornée mais ne converge pas. Comme elle est bornée, elle a une sous suite convergente. Soit ℓ la limite de cette sous suite. Par hypothèse, (x_n) ne converge pas vers ℓ. Donc

$$\exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \text{ avec } |x_n - \ell| \geq \varepsilon \ . \tag{1.5}$$

A partir de cette formulation on fabrique facilement une sous suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) qui vérifie que $|x_n - \ell| \geq \varepsilon$ pour tout n. On pose $N = 1$ et on pose $\varphi(1) = n$ donné par (1.5) avec $N = 1$. Une fois $\varphi(1), \ldots, \varphi(k)$ construits, on prend $N = \varphi(k)+1$ et on pose $\varphi(k+1) = n$ donné par (1.5) avec $N = \varphi(k)+1$. On donc bien construit $(x_{\varphi(n)})$. Cette suite est bornée tout comme (x_n) l'était. Elle possède donc une sous suite convergente $(x_{\varphi(\psi(n))})$. Une sous suite d'une sous suite est une sous suite. Si

$$\lim_{n \to +\infty} x_{\varphi(\psi(n))} = \ell'$$

alors $\ell' \neq \ell$ puisque $|x_{\varphi(\psi(n))} - \ell| \geq \varepsilon$ pour tout n implique que $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon$. Ainsi, si (x_n) bornée ne converge pas, alors il existe au moins deux sous suites convergentes de (x_n) qui ont des limites différentes. Un exemple très simple: le cas de la suite des $(-1)^n$ qui a deux sous suites (choix des n pairs et choix des n impairs) convergeant chacune vers deux limites différentes -1 et $+1$.

REMARQUE 1.1. *Une autre formulation de ce que l'on vient de dire fait intervenir la notion de valeur d'adhérence. On dira que $x \in \mathbb{R}$ est valeur d'adhérence d'une suite (x_n) s'il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) avec*

$$\lim_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)} = x \ .$$

Soit (x_n) une suite bornée. Si elle converge elle a une unique valeur d'adhérence puisque toute sous suite d'une suite convergente est convergente et a même limite. On vient de montrer la réciproque. Donc: une suite bornée (x_n) converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

Il manque à cette section la notion de suite de Cauchy, que nous abordons maintenant. Une suite de Cauchy est une suite qui s'écrase sur elle-même.

DÉFINITION 1.3. *Soit (x_n) une suite réelle. On dit que (x_n) est de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall p, q \geq N, |x_p - x_q| < \varepsilon \ .$$

On écrira aussi que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, \forall p \geq 0, |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Il est facile de voir qu'une suite convergente est nécessairement une suite de Cauchy. La réciproque n'est pas toujours vraie, mais elle l'est dans $\mathbb{R}$. C'est l'objet du théorème qui suit.

THÉORÈME 1.6. *Soit (x_n) une suite réelle. Alors (x_n) est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

DÉMONSTRATION. Il est tout d'abord facile de vérifier que si (x_n) est convergente, alors elle est de Cauchy. Supposons que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, |x_n - \ell| < \varepsilon$$

pour $\ell \in \mathbb{R}$. En remarquant que

$$\begin{aligned} |x_p - x_q| &= |(x_p - x) + (x - x_q)| \\ &\leq |x_p - x| + |x_q - x| \ , \end{aligned}$$

on obtient que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que pour tous $p, q \geq N$, $|x_p - x_q| < 2\varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque on a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall p, q \geq N, |x_p - x_q| < \varepsilon \ ,$$

et donc que (x_n) est une suite de Cauchy. La réciproque se déduit facilement du théorème de Bolzano-Weierstrass. Si (x_n) est de Cauchy, en prenant $\varepsilon = 1$ et $q = N$ dans la phrase des suites de Cauchy on obtient que $|x_p| \leq |x_N| + 1$ pour tout $p \geq N$. Donc (x_n) est bornée. Mais si (x_n) est bornée alors, avec le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) qui converge. Soit ℓ sa limite. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N', |x_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon \ .$$

On a $\varphi(n) \geq n$ pour tout n. Soit $\varepsilon > 0$ fixé quelconque. Pour tout $n \geq N$, $|x_n - x_{\varphi(n)}| < \varepsilon$. On pose $\hat{N} = \max(N, N')$. Alors

$$\begin{aligned} |x_n - x| &= |(x_n - x_{\varphi(n)}) + (x_{\varphi(n)} - x)| \\ &\leq |x_n - x_{\varphi(n)}| + |x_{\varphi(n)} - x| \\ &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

pour tout $n \geq \hat{N}$. Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \hat{N} \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq \hat{N}, |x_n - \ell| < \varepsilon$$

Donc (x_n) est convergente. Le théorème est démontré. □

Ce théorème est très utile et la théorie des séries est d'ailleurs basée sur ce résultat. Le point fondamental ici est, qu'en dehors d'utiliser la croissance ou la décroissance, il était jusque là impossible de montrer qu'une suite converge sans avoir à deviner sa limite pour vérifier ensuite que la phrase de convergence vers cette limite est vraie. Avec ce théorème on a maintenant un autre outil qui ne nécessite pas la connaissance de la limite: montrer que la suite est de Cauchy.

2. Limites des fonctions

Par définition la limite des fonctions s'entend "par valeurs différentes". Si $D \subset \mathbb{R}$ on notera $\overline{D}$ le sous ensemble de $\mathbb{R}$ constitué des $x \in \mathbb{R}$ qui sont limites d'une suite de points de D. Par exemple, si $D =]a, b[$ alors $\overline{D} = [a, b]$. On a bien sûr toujours $D \subset \overline{D}$ (si $x \in D$, alors x est limite de la suite constante $x_n = x$ pour tout n, qui est bien une suite de points de D).

Définition 1.4. *Soit $D \subset \mathbb{R}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur D. Soit $a \in \overline{D}$ un point de $\overline{D}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$ un réel. On dit que f admet ℓ pour limite lorsque x tend vers a si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in D, x \neq a, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \ .$$

On écrit alors $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Il se peut très bien dans cette définition que a soit à une des bornes de D, par exemple si $D = [a, b]$ avec $b > a$ ou $D = [c, a]$ avec $c < a$, auquel cas la limite telle que définie ci-dessus renvoie en fait à la notion de limite à droite ou de limite à gauche. Il se pourrait aussi très bien qu'il n'y ait pas de $x \neq a$ proche de a qui soit dans D, par exemple si $D = [0, 1] \bigcup \{2\}$ et $a = 2$. Dans ce cas la définition est vide et l'on s'abstient de parler de limite en a. Dans la plupart des cas étudiés, D est un intervalle, ou une union d'intervalles, et cette situation étrange ne se rencontre pas. A noter: la double condition $x \neq a$ et $|x-a| < \eta$ s'écrira aussi $0 < |x-a| < \eta$, une formulation que l'on trouvera dans plusieurs ouvrages.

Théorème 1.7. *La limite, lorsqu'elle existe, est unique.*

Démonstration. Supposons qu'une fonction f ait deux limites ℓ et ℓ' lorsque $x \to a$. Alors

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in D, x \neq a, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \\ &\forall \varepsilon > 0, \exists \eta' > 0 \ / \ \forall x \in D, x \neq a, |x - a| < \eta' \Rightarrow |f(x) - \ell'| < \varepsilon \end{aligned}$$

On fixe $\varepsilon > 0$ quelconque. Soit $x \in D$, $x \neq a$, tel que $|x - a| < \min(\eta, \eta')$. Alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ et $|f(x) - \ell'| < \varepsilon$. Donc

$$\begin{aligned} |\ell - \ell'| &= |\ell - f(x) + f(x) - \ell'| \\ &\leq |f(x) - \ell| + |f(x) - \ell'| \\ &< 2\varepsilon \ . \end{aligned}$$

On a ainsi montré que $|\ell - \ell'| < 2\varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, nécessairement $\ell' = \ell$. Le théorème est démontré. □

Là encore un parle de limites finies, mais on peut très bien définir les limites infinies, et même les limites lorsque x tend vers $-\infty$ ou alors vers $+\infty$. Cela donne les phrases suivantes pour les limites infinies en un $a \in D$,

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \text{ si } \forall \ A < 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in D, x \neq a, |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) < A \\ &\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ si } \forall \ A > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in D, x \neq a, |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) > A \end{aligned}$$

les phrases suivantes pour les limites en $-\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ si } \forall\ A < 0, \exists B < 0\ /\ \forall x \in D, x < B \Rightarrow f(x) < A$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \text{ si } \forall\ A > 0, \exists B < 0\ /\ \forall x \in D, x < B \Rightarrow f(x) > A$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists B < 0\ /\ \forall x \in D, x < B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

où $\ell \in \mathbb{R}$, et les phrases suivantes pour les limites en $+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \text{ si } \forall\ A < 0, \exists B > 0\ /\ \forall x \in D, x > B \Rightarrow f(x) < A$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ si } \forall\ A > 0, \exists B > 0\ /\ \forall x \in D, x > B \Rightarrow f(x) > A$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0\ /\ \forall x \in D, x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

toujours avec $\ell \in \mathbb{R}$. Soit D_a^+ l'ensemble des x de D qui sont tels que $x \geq a$ et D_a^- l'ensemble des x de D qui sont tels que $x \leq a$. En remplaçant D par D_a^+ dans les phrases mathématiques des limites en a on obtient la notion de limite à droite en a. En remplaçant D par D_a^- dans les phrases mathématiques des limites en a on obtient la notion de limite à gauche en a. On écrit souvent

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \text{ et } \lim_{x\to a^-} f(x)$$

pour les limites à droite et les limites à gauche.

Lemme 1.2 (Limites, limites à droite, limites à gauche). *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$ un point intérieur à D au sens où il existe $\eta > 0$ tel que $]a - \eta, a + \eta[\subset D$. Alors f admet une limite ℓ en a si et seulement si elle admet une limite à gauche en a, une limite à droite en a et ces deux limites à gauche et à droite sont égales à ℓ.*

Démonstration. On se restreint au cas où $\ell \in \mathbb{R}$, mais le lemme reste vrai pour $\ell = \pm\infty$. Tout d'abord, qui peut le plus peut le moins. Il est donc clair que si f a une limite ℓ en a alors elle a aussi des limites à gauche et à droite en a qui valent toutes deux ℓ. Réciproquement, supposons que f a des limites à gauche et à droite en a qui sont égales. Soit ℓ cette valeur commune. On a donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0\ /\ \forall x \in D_a^-, x \neq a, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta' > 0\ /\ \forall x \in D_a^+, x \neq a, |x - a| < \eta' \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\ .$$

En posant $\eta'' = \min(\eta, \eta')$ on obtient que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta'' > 0\ /\ \forall x \in D, x \neq a, |x - a| < \eta'' \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\ ,$$

soit donc que f a une limite en a qui vaut ℓ. Le lemme est démontré. □

Théorème 1.8. *Soit $D \subset \mathbb{R}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur D. Soit $a \in \overline{D}$ un point de $\overline{D}$. La fonction f admet une limite lorsque x tend vers a si et seulement si pour toute suite (x_n) de point de $D\backslash\{a\}$ qui tend vers a lorsque $n \to +\infty$, la suite des $f(x_n)$ a une limite lorsque $n \to +\infty$.*

Démonstration. La première chose qui surprend dans cet énoncé est qu'on ne demande pas une valeur commune aux limites des $f(x_n)$. On va tout de suite régler ce petit problème: si pour toute suite (x_n) de point de $D\backslash\{a\}$ qui tend vers a, la suite des $f(x_n)$ a une limite lorsque $n \to +\infty$, alors ces suites $(f(x_n))$ ont toutes la même limite. Considérons en effet deux suites (x_n) et (y_n) de points de

$D\backslash\{a\}$ qui tendent toutes deux vers a lorsque $n \to +\infty$. Soit (z_n) la suite définie par $z_{2n} = x_n$ et $z_{2n+1} = y_n$. On montre sans grande difficulté que les z_n sont dans $D\backslash\{a\}$ et surtout que $z_n \to a$ lorsque $n \to +\infty$. Mais donc la suite des $f(z_n)$ a une limite. Or les suites des $f(x_n)$ et $f(y_n)$ sont des sous suites de cette suite. Ces trois suites ont donc la même limite. En particulier la limites des $f(x_n)$ est égale à la limite des $f(y_n)$. On passe maintenant à la preuve du résultat proprement dite. Par "emboitement" ("rentrer" une relation dans une autre) il est aisé de montrer que si la fonction f admet une limite lorsque x tend vers a alors pour toute suite (x_n) de point de $D\backslash\{a\}$ qui tend vers a lorsque $n \to +\infty$, la suite des $f(x_n)$ a une limite lorsque $n \to +\infty$ qui vaut précisément la limite de f lorsque x tends vers a. Réciproquement on suppose que pour toute suite (x_n) de point de $D\backslash\{a\}$ qui tend vers a lorsque $n \to +\infty$, la suite des $f(x_n)$ a une limite lorsque $n \to +\infty$. La limite des $f(x_n)$ est toujours la même comme on vient de le voir. Supposons cette limite réelle pour fixer les idées. Soit ℓ cette limite. On montre que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a. On raisonne par l'absurde et on suppose que $f(x)$ n'a pas ℓ pour limite (ou même pas de limite du tout) lorsque $x \to a$. Alors:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ / \ \forall \eta > 0,\ \exists x \in D\backslash\{a\} \text{ avec } |x-a| < \eta \text{ et } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon_0 \ .$$

En posant $\eta = 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on fabrique une suite (x_n) de points de $D\backslash\{a\}$ qui est telle que $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$ pour tout $n \geq 1$. La première inégalité donne par théorème des gendarmes que $x_n \to a$ lorsque $n \to +\infty$. On devrait ainsi avoir que $f(x_n) \to \ell$ lorsque $n \to +\infty$, ce qui est rendu impossible par la seconde inégalité. Une contradiction. Ce qui prouve le théorème. □

3. Continuité

On aborde maintenant la définition de la continuité d'une fonction en un point. Intuitivement la continuité d'une fonction réelle sur un intervalle signifie que l'on peut tracer le graphe de cette fonction "sans lever la main".

DÉFINITION 1.5. *Soit $D \subset \mathbb{R}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur D. Soit $a \in D$ un point de D. On dit que f est continue au point a si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée:*

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in D, |x-a| < \eta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$,

(iii) pour toute suite $(x_n)_n$ de points de D vérifiant que $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$, on a forcément que $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$.

On dit que f est continue sur D lorsque f est continue en tout point de D.

La limite dans (i) s'entend pour les $x \in D$, le domaine de définition de la fonction (il est toujours sous entendu que la fonction est inconnue et non définie en dehors de son domaine de définition D même si, dans les faits, il peut arriver qu'on la connaisse en dehors de D, par exemple parce qu'elle provient d'une formule explicite). Dans le cas où $D = [a, b]$ cette définition inclue les notions de continuité à droite en a et de continuité à gauche en b.

PREUVE DE L'ÉQUIVALENCE DE (I)-(III) DANS LA DÉFINITION. Le point (ii) est la traduction mathématique exacte du point (i). Par définition (i) et (ii) sont équivalents. Pour l'équivalence de (i) et (iii) on procède comme dans la preuve du Théorème 1.8. On répète les arguments car ils sont importants.

Montrons maintenant l'équivalence de (i) et (iii). Il est déjà clair que (i) $\Rightarrow$ (iii). Supposons en effet (i) et soit (x_n) une suite de points de D qui converge vers a. Alors (x_n) est aussi proche que l'on veut de a pourvu que n soit suffisamment grand tandis que $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de $f(a)$ pourvu que x soit suffisamment proche de a. On en déduit facilement que $f(x_n)$ est aussi proche que l'on veut de $f(a)$ pourvu que n soit suffisamment grand. D'où l'affirmation que (i) implique (iii).

Réciproquement supposons (iii) et montrons (i). Comme (i) et (ii) sont en fait équivalentes, on peut se "borner" à montrer que (iii) $\Rightarrow$ (ii). Pour cela on va raisonner par l'absurde. On suppose donc à la fois (iii) et le contraire de (ii), à savoir:

$$\exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall \eta > 0, \exists x \in D \text{ vérifiant } |x-a| < \eta \text{ et } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon \ .$$

On se donne une suite (ε_n) de réels strictement positifs qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Pour tout n on pose $\eta = \varepsilon_n$. On obtient alors une suite (x_n) de points de D qui vérifie

$$\begin{cases} 0 \leq |x_n - a| < \varepsilon_n \ , \\ |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon \ , \end{cases}$$

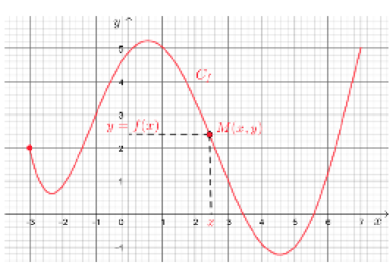
pour tout $n \in \mathbb{N}$. La première de ces deux relations entraîne que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a \ .$$

En ayant supposé (iii) cela implique que

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a) \ .$$

Mais cette dernière affirmation est en désaccord total avec la seconde équation du système précédent. D'où une contradiction et on a bien que (iii) $\Rightarrow$ (ii). Les trois affirmations de la définition sont bien équivalentes. $\square$



Graphe d'une fonction de IR dans IR. La continuité exprime le fait que ce graphe peut être tracé sans lever la main.

Le théorème suivant portera le nom de théorème général sur la continuité.

Théorème 1.9 (Théorème général sur la continuité). *Si f et g sont continues en un point a, alors $f+g$ et fg sont continues en a. Si de plus $g(a) \neq 0$ alors $g(x) \neq 0$ pour x proche de a et $\frac{f}{g}$ est continue en a. Si par ailleurs f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a. Pour finir, les fonctions polynômes,* cos, sin, tan, exp, ln *sont continues là où elles sont définies.*

Démonstration. Que $f+g$ et fg soient continues en a si f et g le sont suit facilement du point (iii) de la Définition 1.5 et du Lemme 1.1. Si $g(a)\neq 0$, et g est continue au point a, il existe forcément $\eta>0$ tel que $g(x)\neq 0$ pour tout $x\in D_g\cap]a-\eta,a+\eta[$, où D_g est le domaine de définition de g. Deux approches pour démontrer cette affirmation sont possible. Par l'absurde, on fabriquerait sinon une sous suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) qui converge vers a et pour laquelle $g(x_{\varphi(n)})=0$ pour tout n. Par passage à la limite $n\to+\infty$ et continuité de g on devrait alors avoir $g(a)=0$. On peut sinon procéder par voie directe. Par continuité de g en a,

$$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0\ /\ \forall x\in D_g, |x-a|<\eta\ \Rightarrow\ |g(x)-g(a)|<\varepsilon\ .$$

Comme $g(a)\neq 0$ on peut choisir $\varepsilon=\frac{1}{2}|g(a)|$. On obtient alors un $\eta>0$ tel que pour tout $x\in D_g$ vérifiant que $|x-a|<\eta$, $|g(x)-g(a)|<\frac{1}{2}|g(a)|$. Or $|g(x)-g(a)|\geq|g(a)|-|g(x)|$ et donc, pour tout $x\in D_g$ vérifiant que $|x-a|<\eta$, $|g(x)|\geq|g(a)|-\frac{1}{2}|g(a)|=\frac{1}{2}|g(a)|>0$. D'où l'affirmation faite un peu plus haut. En appliquant de nouveau le point (iii) de la Définition 1.5 et le Lemme 1.1, on obtient la continuité de f/g en a si f et g sont continues en a et $g(a)\neq 0$. Pour $g\circ f$ notons D le domaine de définition de cette composée. Soit (x_n) une suite de points de D convergent vers a. Avec le point (iii) de la Définition 1.5, appliqué à f, $f(x_n)\to f(a)$ lorsque $n\to+\infty$. En appliquant de nouveau le point (iii) de la Définition 1.5, $g\left(f(x_n)\right)\to g\left(f(a)\right)$ puisque g est continue en $f(a)$. Comme (x_n) est quelconque dans D convergent vers a, c'est que, toujours en raison du point (iii) de la Définition 1.5, $g\circ f$ est continue en a. Reste à montrer que les fonctions usuelles sont continues là où elle sont définies. Pour les fonctions polynômes la preuve suite du point (iii) de la Définition 1.5 et du Lemme 1.1. Pour les autres fonctions il faut à chaque fois trouver un argument spécifique. On se restreint ici à une discussion rapide du cas des fonctions sinus et cosinus. Pour la fonctions sinus on pourra montrer (en comparant aires de triangles et aires de secteurs angulaires dans la représentation circulaire du sinus) que pour tout $x\in]-\pi/2,\pi/2[$, $|\sin(x)|\leq|x|$. De là, on tire du point (iii) de la Définition 1.5 que sin est continue en 0. Comme $\cos=\sqrt{1-\sin^2}$ au voisinage de 0, la fonction cos est elle aussi continue en 0 en vertu de ce que nous avons démontré plus haut. Reste pour obtenir la continuité des fonctions sinus et cosinus en un point a quelconque à utiliser les formules trigonométriques

$$\begin{aligned}\sin(a+x)&=\sin(x)\cos(a)+\sin(a)\cos(x)\\ \cos(a+x)&=\cos(a)\cos(x)-\sin(a)\sin(x)\end{aligned}$$

et à utiliser la continuité en 0 que l'on vient de démontrer, le point (iii) de la Définition 1.5 et le Lemme 1.1. D'où le théorème. □

Dans ce théorème certains énoncés peuvent présenter des difficultés cachées. Par exemple il se peut que $g\circ f$ ne soit au final défini qu'au point a, de sorte que la question de la continuité de $g\circ f$ devient très relative. C'est par exemple le cas si l'on considère la fonction f définie pour $x\geq 0$ par $f(x)=x|\ln(x)|$ si $x>0$ et $f(0)=0$. Pour cette fonction $D_f=[0,+\infty[$, où D_f est le domaine de définition de f, et f est continue en 0 d'après notre définition. Si maintenant g est la fonction définie sur $]-\infty,0]$ par $g(x)=x\ln(-x)$ si $x<0$ et $g(0)=0$, alors $D_g=]-\infty,0]$, où D_g est le domaine de définition de g, et g est continue en 0 d'après notre définition. Si l'on regarde $g\circ f$ cette fonction n'est définie qu'en 0. Une telle configuration limite ne se produira pas si g est définie sur au moins un intervalle ouvert contenant

$f(a)$. Dans ce cas, par continuité de f en a, il existe $\eta > 0$ pour lequel $g \circ f$ est définie sur $]a - \eta, a + \eta[$.

Proposition 1.1. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et continue sur I, et $a < b$ deux points de I. On suppose que f change de signe en a et b et donc que $f(a)f(b) < 0$. Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Démonstration. Supposons que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Notons

$$J = \{t \in [a, b] \ / \ \forall t' \in [a, t], f(t') < 0\} \ .$$

Clairement J est un sous intervalle non vide ($a \in J$) de I. Notons c la borne droite de J. On a $a < c < b$ puisque

(i) $f(a) < 0$ et la continuité de f en a entraînent que $f < 0$ dans un intervalle du type $[a, a + \eta]$, et donc $[a, a + \eta] \subset J$,

(ii) $f(b) > 0$ et la continuité de f en b entraînent que $f > 0$ dans un intervalle du type $[b - \eta, b]$ pour $0 < \eta \ll 1$.

Par continuité de f en c:

(iii) si $f(c) < 0$ alors $f < 0$ dans un intervalle du type $[c, c + \eta]$

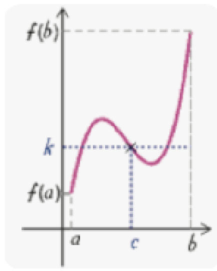
(iv) si $f(c) > 0$ alors $f > 0$ dans un intervalle du type $[c - \eta, c]$.

Dans le premier cas c ne serait pas la borne droite de J car on aurait en fait $[a, c + \varepsilon] \subset J$. Dans le second cas c ne serait toujours pas la borne droite de J car cette fois-ci on aurait $J \subset [a, c - \varepsilon]$. Donc, forcément, $f(c) = 0$. La proposition est démontrée. □

Il y a cachée derrière cette preuve une notion topologique importante: la connexité (les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes et les connexes de $\mathbb{R}$ sont des intervalles). Le résultat est trivialement faux si on ne suppose plus que I est un intervalle (penser au graphe de la fonction inverse $x \to \frac{1}{x}$ sur $I =]-\infty, 0[\bigcup]0, +\infty[$. Le résultat est par ailleurs intuitif. Dans le tracé du graphe de f, si on part d'un point $(a, f(a))$ avec $f(a) < 0$ pour rejoindre un point $(b, f(b))$ avec $f(b) > 0$, et s'il est interdit de lever la main, alors il faudra bien couper l'axe des x à un moment. A noter: rien n'interdit de le couper plusieurs fois. La preuve ci-dessus fournit en fait la première abscisse en partant de a où f s'annule. La proposition 1.1 est souvent énoncée sous la forme suivante, connue sous le nom de théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 1.10 (Théorème des valeurs intermédiaires). *Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et continue sur $[a, b]$. Alors f prend toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$.*

Démonstration. Supposons $f(a) \leq f(b)$. Si ce n'est pas le cas, on pourra changer f en $-f$ pour se ramener à cette situation. Si $f(a) = f(b)$ le théorème dit juste que f prend la valeur $f(a)$, ce qui est évident. On pourra donc supposer que $f(a) < f(b)$. Soit $d \in]f(a), f(b)[$ et soit $g = f - d$. Alors g est continue sur I, $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$ de sorte que $g(a)g(b) < 0$. Donc il existe $c \in]a, b[$ tel que $g(c) = 0$, soit $f(c) = d$. Le théorème est démontré. □



Théorème des valeurs intermédiaires: *f est continue sur [a,b]. Pour tout k dans [f(a),f(b)] il existe c dans [a,b] tel que f(c) = k.*

Le théorème des valeurs intermédiaires s'étend facilement au cas où $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ est continue, f a une limite s à droite en a, $s \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, et une limite t à gauche en b, $t \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors f prend toutes les valeurs strictement comprises entre s et t. Pour tout sous intervalle $[A,B]$ strictement compris entre s et t on va effectivement pouvoir trouver des $c,d \in]a,b[$ tels que $f(c) \leq A$ et $f(b) \geq B$ et on se ramène alors au Théorème 1.10.

Le théorème qui suit explore maintenant les relations entre compacité (ici la compacité des intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$) et continuité.

Théorème 1.11. *Soient $I = [a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et continue sur I. Alors f est bornée sur I et f admet un point de maximum et un point de minimum sur I.*

Démonstration. Cette fois-ci c'est la notion de compacité qui se cache derrière ce résultat. Les intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$ sont des compacts et donc (en topologie métrique) des ensembles ayant la propriété que toute suite de points dans l'ensemble possède une sous suite convergente comme nous l'avons vu avec le théorème de Bolzano-Weierstrass. Montrons par exemple que f et majorée et possède un point de maximum dans $[a,b]$. Notons

$$M = \text{borne sup}\,\{f(x), x \in [a,b]\}$$

ce qui se note traditionnellement $M = \sup_{x\in I} f(x)$. Par définition M est le plus petit des majorants de l'ensemble $\{f(x), x \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}$ (et possiblement, à ce stade de la preuve, on pourrait avoir $M = +\infty$). On a alors

(i) $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq M$

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in I$ avec $M - \varepsilon \leq f(x) \leq M$ si $M < +\infty$

(iii) $\forall R > 0$, $\exists x \in I$ avec $f(x) \geq R$ si $M = +\infty$.

Prenons une suite (ε_n) de réels strictement positifs qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. En prenant $\varepsilon = \varepsilon_n$ dans le cas (ii), et $R = \frac{1}{\varepsilon_n}$ dans le cas (iii), et ce pour tout n, on obtient immédiatement une suite (x_n) de points de I qui vérifie que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = M \ .$$

Comme I est fermé borné, il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) qui est convergente. Notons $\overline{x}$ sa limite de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = \overline{x}$. Toute sous suite d'une suite convergente étant convergente et de même limite, on a aussi que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = M \ .$$

Comme f est continue (en particulier en $\overline{x}$) on peut écrire (voir la Définition 1.5) que $\lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(\overline{x})$. D'où $f(\overline{x}) = M$. En particulier $M < +\infty$ et, avec (i), le théorème est démontré. $\square$

Un autre résultat est fréquemment associé à la compacité: si $I = [a, b]$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle définie et continue sur I, alors f est en fait uniformément continue sur I, la continuité uniforme sur I signifiant que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x, y \in I, |y - x| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon \ .$$

Cette phrase de continuité uniforme est plus forte que la phrase de continuité en tout $x \in I$ puisque, maintenant, dans la continuité uniforme, le η ne dépend que de ε et non pas du point x où l'on regarde la continuité (d'où la mention uniforme). Le η est "uniforme" par rapport à x.

Corollaire 1.1. *Soient $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et continue sur I. On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors soit il existe $c \in]a, b[$ un point où f atteint son minimum, soit il existe $d \in]a, b[$ un point où f atteint son maximum, soit les deux.*

Démonstration. Si f est constante la dernière situation est trivialement satisfaite (tous les points de l'intervalle sont à la fois des points de minimum et de maximum). Supposons que f n'est pas constante. D'après le Théorème 1.11 il existe $c, d \in [a, b]$ tels que

$$f(c) = \inf_{x\in I} f(x) \text{ et } f(d) = \sup_{x\in I} f(x) \ .$$

On ne peut avoir simultanément $c, d \in \{a, b\}$ puisque $f(a) = f(b)$ et f n'est pas constante. Donc soit $c \in \{a, b\}$ et alors $d \in]a, b[$, soit $d \in \{a, b\}$ et alors $c \in]a, b[$, soit encore $c, d \in]a, b[$. D'où le corollaire. $\square$

4. Dérivée première

La dérivée d'une fonction en un point, lorsqu'elle existe, est la limite finie du taux d'accroissement de la fonction en ce point. Elle s'interprète géométriquement comme le coefficient directeur de la tangente au graphe de f en ce point.

Définition 1.6. *Soient $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $c \in]a, b[$ un point de I, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur I. On dit que f est dérivable au point c si le quotient*

$$Q(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

admet une limite lorsque x tend vers c. Lorsque cette limite existe elle et bien sûr unique, on la note $f'(c)$ et on dit que $f'(c)$ est la dérivée de f en c. La fonction f est dite dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable en tout point de I.

L'écriture mathématique de la limite de la définition est la suivante:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in I\backslash\{c\}, |x - c| < \eta \ \Rightarrow \ \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < \varepsilon \ . \qquad (1.6)$$

Une fonction dérivable en un point est forcément continue en ce point. C'est l'objet du théorème suivant. L'idée est que si le taux d'accroissement a une limite, comme le dénominateur tend vers zéro, focément le numérateur tend lui aussi vers zéro. Par suite $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ et f est donc continue en c.

THÉORÈME 1.12. *Si une fonction est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point.*

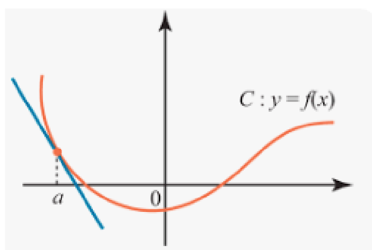
DÉMONSTRATION. On utilise (1.6). Soit $\varepsilon > 0$ fixé quelconque. Il existe alors $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I\backslash\{c\}$,

$$|f(x) - f(c)| < |f'(c)| \times |x - c| + \varepsilon|x - c|$$

dès que $0 < |x - c| < \eta$. On pose

$$\hat{\eta} = \min\left(\eta, \frac{\varepsilon}{|f'(c)| + 1}, 1\right) .$$

Pour tout $x \in I\backslash\{c\}$ tel que $|x - c| < \hat{\eta}$ on a alors que $|f(x) - f(c)| < 2\varepsilon$, et on peut réintégrer $x = c$ puisque clairement $0 < 2\varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on a obtenu la phrase de continuité de f en c. Le théorème est démontré. □



Tangente en a: ***Si f est dérivable en a, l'équation***
y = f'(a)(x-a)+f(a)
est l'équation d'une droite (en bleue sur la figure) appelée tangente à la courbe C (en rouge sur la figure) de f en a.

Tout comme pour les fonctions continues, il y a un théorème général pour les fonctions dérivables.

THÉORÈME 1.13 (Théorème général sur la dérivabilité). *Si f et g sont dérivables en un point c, alors $f + g$ et fg sont dérivables en c et*

$$(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c) \ , \ (fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c) \ .$$

Si de plus $g(c) \neq 0$ alors $g(x) \neq 0$ pour x proche de c et $\frac{f}{g}$ est dérivable en c avec

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2} \ .$$

Si par ailleurs f est dérivable en c et g est dérivable en $f(c)$, alors $g \circ f$ est dérivable en c avec

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \times f'(c) \ .$$

Pour finir, les fonctions polynômes, cos, sin, tan, exp, ln *sont dérivables là où elles sont définies et on a que* $(x^n)' = nx^{n-1}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$, $\sin'(x) = \cos(x)$, $\exp'(x) = \exp(x)$, $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

DÉMONSTRATION. Pour ne pas trop alourdir la présentation, on se restreint à ne démontrer ce théorème que dans le cas de fg. On écrit que

$$f(x)g(x) - f(c)g(c) = (f(x) - f(c))\,g(x) + f(c)\,(g(x) - g(c)) \ .$$

Par suite,

$$\frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \times g(x) + f(c) \times \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \ .$$

Les taux d'accroissements de f et g en c ont une limite lorsque $x \to c$ par valeurs différentes. De même, par continuité de g en c, puisque dérivable implique continue, g a une limite lorsque $x \to c$. On en déduit facilement que le taux d'accroissement de fg en c a une limite lorsque $x \to c$ par valeurs différentes, et que cette limite vaut $f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$. D'où le résultat. □

DÉFINITION 1.7. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction rélle définie sur I. On dit que f est de classe C^1 sur I si f est dérivable sur I et si dérivée $f' : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur I.*

En "mélangeant" les théorèmes généraux sur la continuité et la dérivabilité on obtient facilement le théorème suivant.

THÉORÈME 1.14 (Théorème général sur la classe C^1). *Si f et g sont de classe C^1 sur un intervalle ouvert I, alors $f + g$ et fg sont de classe C^1 sur I. Si de plus $g \neq 0$ sur I, alors $\frac{f}{g}$ est de classe C^1 sur I. Si par ailleurs f est de classe C^1 sur I et g est de classe C^1 sur J, avec $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est de classe C^1 sur I. Pour finir, les fonctions polynômes,* cos, sin, tan, exp, ln *sont de classe C^1 sur les intervalles ouverts où elles sont définies.*

Par extremum local d'une fonction f on entend un maximum local ou un minimum local de f. On dira que f a un maximum local en un point c si f est définie sur au moins un intervalle ouvert $]c-\eta, c+\eta[$ contenant c, donc $\eta > 0$, et si $f(x) \leq f(c)$ pour tout $x \in]c-\eta, c+\eta[$. On parle de maximum local strict si $f(x) < f(c)$ pour tout $x \in]c-\eta, c+\eta[$, $x \neq c$. De même, on dira que f a un minimum local en un point c si f est définie sur au moins un intervalle ouvert $]c-\eta, c+\eta[$ contenant c, donc $\eta > 0$, et si $f(x) \geq f(c)$ pour tout $x \in]c-\eta, c+\eta[$. On parle de minimum local strict si $f(x) > f(c)$ pour tout $x \in]c-\eta, c+\eta[$, $x \neq c$.

THÉORÈME 1.15. *Si une fonction admet un extremum local en un point, et est dérivable en ce point, alors sa dérivée en ce point est forcément nulle.*

On dit encore que les extremums locaux d'une fonction dérivable sont forcément des (à rechercher parmi les) points critiques de de cette fonction. Par définition les points critiques d'une fonction dérivable f sont les x pour lesquels $f'(x) = 0$.

DÉMONSTRATION. Supposons que f a un minimum local en c et que f est dérivable en c. Alors $f(x) - f(c) \geq 0$ pour x proche de c. D'un autre côté,

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ ,$$

et le dénominateur $x - c$ change de signe selon que x tende vers c en restant à la gauche de c, ou que x tende vers c en restant à la droite de c. On a donc pour Q (selon que l'on fasse tendre x vers c en restant à la gauche de c ou en restant à la doite de c) des quotients du type

$$Q = \frac{\text{quantité positive ou nulle}}{\text{quantités tantôt positives tantôt négatives}}$$

et donc $f'(c)$ devrait être à la fois négative ou nulle et positive ou nulle. La seule possibilité est que $f'(c) = 0$. Le théorème est démontré. □

5. Le théorème des accroissements finis

Le théorème des accroissements finis est à la base des analyses de croissance et décroissance des fonctions. Il est une conséquence simple de ce qui a été dit jusqu'à maintenant.

THÉORÈME 1.16 (Le théorème des accroissement finis). *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Il existe alors $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.*

DÉMONSTRATION. On définit la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = (f(b) - f(a))(x-a) - (b-a)(f(x) - f(a))$$

Alors g est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et elle vérifie que

$$g(a) = g(b) = 0 \ .$$

D'après le Théorème 1.11, g étant continue puisque f l'est, il existe $c_1, c_2 \in [a,b]$ deux points où g admet un minimum (en c_1) et un maximum (en c_2). Si $c_1, c_2 \in \{a,b\}$ alors $g(c_1) = g(c_2) = 0$ et g est donc la fonction nulle. Le théorème est alors trivialement vrai avec n'importe quel point c de $]a,b[$. Sinon, au moins l'un des deux points c_1, c_2 est dans $]a,b[$. On note c ce point. Alors g est extrémale en c et $c \in]a,b[$. Donc, d'après le Théorème 1.15, $g'(c) = 0$. Or $g'(c) = f(b) - f(a) - (b-a)f'(c)$. D'où le théorème des accroissements finis. $\square$

Par définition une fonction f définie sur un ensemble $D_f \subset \mathbb{R}$ est dite croissante (respectivement strictement croissante) sur $\mathbb{R}$ si $f(x) \leq f(y)$ pour tous $x \leq y$ dans D_f (respectivement $f(x) < f(y)$ pour tous $x < y$ dans D_f). De même, f est dite décroissante (respectivement strictement croissante) sur $\mathbb{R}$ si $f(x) \geq f(y)$ pour tous $x \leq y$ dans D_f (respectivement $f(x) > f(y)$ pour tous $x < y$ dans D_f). La notion de connexité se cache derrière le résultat suivant. Le résultat est trivialement faux si on ne se place plus sur un intervalle, il suffit de penser à la fonction inverse sur $]-\infty, 0[\bigcup]0, +\infty[$.

THÉORÈME 1.17. *Soit I un intervalle d'extrémités $a < b$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $]a,b[$. Alors f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a,b[$ et décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a,b[$. De plus si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors f est strictement croissante sur I et si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors f est strictement décroissante sur I.*

DÉMONSTRATION. Traitons le cas de la croissance (on passe de croissante à décroissante en changeant f en $-f$). Supposons que $f' \geq 0$ (resp. $f' > 0$) sur I. Soient $a < b$ deux points de I. Avec la formule des accroissements finis il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

et si $f' \geq 0$ (resp. $f' > 0$) sur I alors $f'(c) \geq 0$ (resp. $f'(c) > 0$) et donc $f(a) \leq f(b)$ (resp. $f(a) < f(b)$). Comme $a < b$ sont quelconques, f est croissante (resp. strictement croissante). Réciproquement, si f est croissante, comme pour tout $c \in I$

$$f'(c) = \lim_{x \to c, x \neq c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ ,$$

on constate que $f'(c) \geq 0$ pour tout c en remarquant que $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ pour tout $x \neq c$ (si $x > c$ on a du "positif sur positif" et si $x < c$ on a du "négatif sur négatif", donc encore du positif). Le théorème est démontré. $\square$

Les conditions $f'(x) > 0$ (respectivement $f'(x) < 0$) pour tout $x \in]a, b[$ dans la seconde partie du théorème peuvent être généralisées en: $f'(x) > 0$ (respectivement $f'(x) < 0$) pour tout $x \in]a, b[\backslash \mathcal{S}$ lorsque $\mathcal{S} \subset]a, b[$ est fini. Pour le voir, et si par exemple $\mathcal{S} = \{c_1, \ldots, c_n\}$, il suffira tout simplement d'appliquer le théorème tel qu'énoncé ci-dessus sur les intervalles $[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$,$\ldots$,$[c_{n-1}, c_n]$, $[c_n, b]$.

6. Dérivées d'ordre supérieur

Dans le cas des fonctions rélles d'une variable réelle les dérivées d'ordre supérieur se définissent en boucle par la formule de récurrence

$$f^{(n)}(a) = \left(f^{(n-1)}\right)'(a) \ ,$$

à savoir la dérivée $n$ième de f au point a = la dérivée au point a de la dérivée $(n-1)$ième de f. En particulier $f''(a) = (f')'(a)$ (on note traditionnellement plutôt f'' que $f^{(2)}$, mais à partir de la dérivée troisième on va plutôt trouver les notations $f^{(3)}$, $f^{(4)}$, etc.)

DÉFINITION 1.8. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$ un point de I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On dit que f est deux fois dérivable au point a, et on note $f''(a)$ la dérivée seconde de f en a, si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ (donnée par l'hypothèse que f est dérivable sur I) est elle-même dérivable en a. On a alors $f''(a) = (f')'(a)$. On dit que f est deux fois dérivable sur I si f' est dérivable en tout point de I. On récupère alors une fonction $f'' : I \to \mathbb{R}$ à partir de laquelle on peut définir la notion de dérivée troisième, etc. Une fonction qui est n-fois dérivable sur I et dont la dérivée d'ordre n est continue sur I est dite de classe C^n.*

Dans cette théorie, savoir dériver une fois suffit donc pour savoir dériver autant de fois que l'on veut. On notera que si f est n fois dérivable sur I, et puisque *dérivable* $\Rightarrow$ *continue*, les fonctions f, f', f'', $f^{(3)}$, $\ldots$, $f^{(n-1)}$ sont automatiquement continues sur I. Par convention $f^{(0)} = f$.

THÉORÈME 1.18 (Formule de Leibniz). *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions n-fois dérivable en un point $a \in I$. La fonction fg est alors elle aussi n fois dérivable en a et*

$$\left(fg\right)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a) \ ,$$

où, par convention, $f^{(0)} = f$ et $g^{(0)} = g$, et où les $\binom{n}{k}$ sont les coefficients binomiaux donnés par $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

DÉMONSTRATION. On se borne à démontrer la formule. La preuve que fg est bien n-fois dérivable en a procède de la même approche par récurrence. Comme dans la preuve de la formule du binôme, la clef dans la preuve est la formule de Pascal:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \tag{1.7}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout $p \in [\![0, n-1]\!]$. On démontre la formule de Leibniz par récurrence sur n. Si $n = 0$, la formule de Leibniz est immédiate. On suppose la formule vraie à l'ordre n. On la démontre à l'ordre $n+1$. On peut écrire avec le Théorème 1.13, et par hypothèse de récurrence, que

$$\begin{aligned}
\big(fg\big)^{(n+1)}(a) &= \big((fg)^n\big)'(a) \\
&= \big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\big)'(a) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(a) g^{(n-k)}(a) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n+1-k)}(a) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(a) g^{(n+1-k)}(a) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n+1-k)}(a)
\end{aligned}$$

où k est changé en $k-1$ dans la première somme de la dernière ligne de la série d'égalités ci-dessus. Avec (1.7) et ce que l'on vient de montrer on peut maintenant écrire que

$$\begin{aligned}
\big(fg\big)^{(n+1)}(a) &= \sum_{k=1}^{n} \Big(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\Big) f^{(k)}(a) g^{(n+1-k)}(a) \\
&\quad + f^{(n+1)}(a) g(a) + f(a) g^{(n+1)}(a) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(a) g^{(n+1-k)}(a) \\
&\quad + f^{(n+1)}(a) g(a) + f(a) g^{(n+1)}(a) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(a) g^{(n+1-k)}(a)
\end{aligned}$$

ce qui est précisément la formule de Leibniz à l'ordre $n+1$. Le théorème est démontré. □

7. Formules de Taylor

La formule de Taylor-Lagrange est une extension du théorème des accroissements finis aux dérivées d'ordres supérieurs.

Théorème 1.19 (Formule de Taylor-Lagrange). *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $(n+1)$-fois dérivable sur I (donc en particulier de classe C^n sur I), $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tous points $a < b$ de I il existe un point $c \in]a, b[$ pour lequel*

$$\begin{aligned}
f(b) = f(a) &+ (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!} f^{(3)}(a) \\
&+ \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)\ ,
\end{aligned}$$

où les $f^{(k)}$ sont les dérivées kièmes de f.

Lorsque $n = 0$ on retrouve tout simplement le théorème des accroissements finis.

Démonstration. On procède comme dans le cas du théorème des accroissements finis avec la construction d'une fonction "astucieuse". On pose

$$C = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) ,$$

avec la convention $X^0 = 1$ quelque soit X. On définit ensuite la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} C .$$

On a alors

$$g(a) = g(b) = f(b)$$

et donc, en vertu du Corollaire 1.1 et du Théorème 1.15, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^{(k-1)}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) \\ &\quad - \frac{(b-x)^n}{n!} C \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) \\ &\quad - \frac{(b-x)^n}{n!} C \\ &= \frac{(b-x)^n}{n!} \left(f^{(n+1)}(x) - C \right) . \end{aligned}$$

Ainsi il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n+1)}(c) = C$, et c'est bien la formule de Taylor-Lagrange qui était à démontrer. □

Une autre formule de Taylor est donnée par le théorème suivant. La formule de Taylor-Young généralise aux dérivées d'ordres supérieurs la relation première qui suit de la définition même de la dérivée. A savoir

$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + (x-c)\varepsilon(x)$$

où la fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ est telle que $\lim_{x \to c} \varepsilon(x) = 0$. Cette relation est en effet bien équivalente au fait que le taux d'accroissement $Q(x)$ de f en c a pour limite $f'(c)$ lorque $x \to c$.

Théorème 1.20 (Formule de Taylor-Young). *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$ un point de I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de $(n-1)$-fois dérivable sur I et n fois dérivable en a. Alors pour tout $x \in I$,*

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f^{(3)}(a) \\ + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) , \end{aligned}$$

où la fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ est telle que $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Cette formule à l'apparence très savante ne dit rien d'autre que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}{(x-a)^n} = 0 \ ,$$

l'égalité du théorème définissant de fait la fonction ε comme le quotient dans la limite ci-dessus. C'est le fait que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ qui “dit” quelque chose.

Démonstration. On démontre la formule sous l'hypothèse plus forte que f est de classe C^n sur I. Avec la formule de Taylor-Lagrange du Théorème précédent on voit que

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)\right) \ ,$$

où pour chaque x, $a < c_x < x$ ou $x < c_x < a$ selon que x est à gauche de a ou pas. L'hypothèse que $f^{(n)}$ est continue entraîne que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ puisque si $x \to a$ alors $c_x \to a$ par l'encadrement même de c_x. D'où la formule de Taylor-Young. $\square$

Il existe enfin une formule de Taylor généralisant le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral (pour lequel une primitive de la dérivée d'une fonction est la fonction elle-même). La formule de Taylor avec reste intégral (dit de Laplace) est la suivante: soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} sur I. Pour tous points $a < b$ de I,

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!} f^{(3)}(a) \\ + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \ , \end{aligned}$$

où les $f^{(k)}$ sont les dérivées $k$ièmes de f. Lorsque $n = 0$ on retrouve la relation $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$ du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.

8. Problèmes d'extremums

Un grand “classique” de l'étude des fonctions réelles d'une variable réelle est la recherche d'extremums locaux. On sait déjà que ceux-ci sont à rechercher parmi les points critiques de la fonction. C'est le Théorème 1.15. Intuitivement on a envie de dire qu'en un point de maximum local c de f, la fonction f va être croissante un peu avant c puis décroissante un peu après, et qu'en un point de minimum local la fonction f va être décroissante un peu avant ce point puis croissante un peu après. Autant il est clair que si f et décroissante un peu avant c puis croissante un peu après c alors elle va avoir un minimum local en c, autant la réciproque, que l'on trouve pourtant dans plusieurs livres, est loin d'être évidente (même chose bien sûr avec les maximums locaux) ...Et pour cause: cette réciproque est fausse.

Proposition 1.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f(x) = x^4 \sin^2(\frac{1}{x})$$

si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. La fonction f est C^1 sur $\mathbb{R}$, elle admet un minimum en 0, et pourtant sa dérivée change constamment de signe à droite de 0, et cela aussi proche que l'on soit de 0.

DÉMONSTRATION. On commence par montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}$, la dérivée en tout point $x \neq 0$ étant donnée par la formule

$$f'(x) = 4x^3 \sin^2(\frac{1}{x}) - 2x^2 \sin(\frac{1}{x}) \cos(\frac{1}{x}) \ . \tag{1.8}$$

et la dérivée en 0 étant donnée par $f'(0) = 0$. La formule pour $x \neq 0$ s'obtient facilement par calcul à partir des règles de dérivation. En 0 on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^3 \sin^2(\frac{1}{x})$$

et comme pour tout x, $0 \leq \sin^2(\frac{1}{x}) \leq 1$, on en déduit que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \ ,$$

ce qui prouve que f est bien dérivable en 0 (la limite existe) et que $f'(0) = 0$. Pour ce qui est de la continuité de la dérivée elle suit des règles élémentaires lorsque $x \neq 0$. Le seul problème possible est la continuité de f' en 0. Les fonctions sinus et cosinus étant bloquées entre -1 et $+1$, il suit de (1.8) que

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0 = f'(0) \ .$$

Donc f' est continue en 0. Clairement f admet un minimum en 0 puisque $f \geq 0$ et $f(0) = 0$. On montre pour finir que la dérivée de f change constamment de signe à droite de 0, et cela aussi proche que l'on soit de 0. Pour se faire, on va montrer qu'il existe deux suite $(x_k)_k$ et $(y_k)_k$ de points dans $\mathbb{R}^{+\star}$ (donc à droite de 0), qui tendent toutes deux vers 0 mais qui sont telles que $f'(x_k) < 0$ pour tout $k \gg 1$ (ie pour tout k grand) tandis que $f'(y_k) > 0$ pour tout $k \gg 1$. Pour démontrer l'existence de telles suites on reprend la formule (1.8) que l'on réecrit de la façon suivante:

$$f'(x) = 2x^2 \sin(\frac{1}{x}) \left(2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) \right) \ . \tag{1.9}$$

On définit alors les suites $(x_k)_k$ et $(y_k)_k$ par les équations

$$\frac{1}{x_k} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ et } \frac{1}{y_k} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

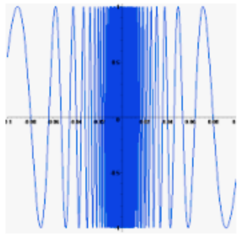
pour $k \in \mathbb{N}$. Clairement $\lim_{k \to +\infty} x_k = 0$ et $\lim_{k \to +\infty} y_k = 0$ puisque $\lim_{k \to +\infty} 2k\pi = +\infty$. Pour $k \gg 1$, la fonction sinus étant toujours bloquée entre -1 et $+1$, à la fois $x_k \sin(\frac{1}{x_k})$ et $y_k \sin(\frac{1}{y_k})$ vont être très petits. On a par contre

$$\cos(\frac{1}{x_k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \cos(\frac{1}{y_k}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

pour tous k. Enfin, $\sin(\frac{1}{x_k}) > 0$ et $\sin(\frac{1}{y_k}) > 0$ pour tous k (les cosinus et sinus de $\pi/4$ sont tous deux positifs, le sinus de $3\pi/4$ est positif mais son cosinus est négatif). En conclusion, comme on le voit sur (1.9),

$$f'(x_k) < 0 \text{ et } f'(y_k) > 0$$

pour tous $k \gg 1$. La proposition est démontrée. $\square$



Les oscillations de la fonction sin(1/x), définie pour x non nul, au voisinage de 0.

L'étude classique des problèmes d'extremums consiste maintenant en deux théorèmes basés sur la formule de Taylor-Young à l'ordre deux.

Théorème 1.21 (Précision). *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On suppose que f admet un extremum local au point c et que f est deux fois dérivable en c. Alors $f''(c) \geq 0$ s'il s'agit d'un minimum et $f''(c) \leq 0$ s'il s'agit d'un maximum.*

Démonstration. Comme f admet un extremum en c, forcément $f'(c) = 0$. Avec la formule de Taylor-Young à l'ordre deux on a alors que pour tout x (proche de c),

$$f(x) = f(c) + (x-c)^2 \left(\frac{1}{2} f''(c) + \varepsilon(x) \right) ,$$

où $\lim_{x \to c} \varepsilon(x) = 0$. Si f admet un minimum local au point c alors $f(x) \geq f(c)$ pour tout x proche de c. Donc

$$\frac{1}{2} f''(c) + \varepsilon(x) \geq 0$$

pour tout x proche de c, et en faisant tendre $x \to c$ on récupère que $f''(c) \geq 0$. Même genre de raisonnement bien sûr avec les extremums (on peut aussi changer f en $-f$), et le théorème est démontré. $\square$

Un moyen mnémotechnique pour se souvenir du signe de $f''(c)$ en un extremum c est de penser à la fonction $f(x) = x^2$. Elle a un minimum en 0 et sa dérivée seconde $f''(0) = 2$ est positive. Donc "minimum $\Rightarrow$ dérivée 2nde positive" et "maximum $\Rightarrow$ dérivée 2nde négative".

Théorème 1.22 (Condition suffisante). *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Soit $c \in I$ un point critique de f. On suppose que f est deux fois dérivable en c et que $f''(c) > 0$ (resp. $f''(c) < 0$). Alors f admet un minimum local strict (resp. un maximum local strict) au point c.*

Démonstration. Supposons par exemple $f''(c) > 0$. Comme c est un point critique de f, on obtient avec la formule de Taylor-Young à l'ordre deux que pour tout x (proche de c),

$$f(x) = f(c) + (x-c)^2 \left(\frac{1}{2} f''(c) + \varepsilon(x) \right) ,$$

où $\lim_{x \to c} \varepsilon(x) = 0$. Clairement, puisque $\lim_{x \to c} \varepsilon(x) = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]c-\eta, c+\eta[$, $|\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{4} f''(c)$. Mais alors, pour tout $x \in]c-\eta, c+\eta[$,

$$\frac{1}{2} f''(c) + \varepsilon(x) \geq \frac{1}{4} f''(c) > 0 ,$$

et donc $f(x) > f(c)$ pour tout $x \in]c-\eta, c+\eta[$ dès que $x \neq c$. D'où le théorème. $\square$

CHAPITRE 2

Applications $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

On précise quelques éléments de topologie dont nous aurons besoin avant un retour sur la topologie aux Chapitres 3 et 6. Ici c'est l'espace $\mathbb{R}^n$ qui nous intéresse. C'est un ensemble sur lequel on peut placer une norme (la norme euclidienne, associée à sa structure d'espace vectoriel) et une distance (la distance euclidienne, associée à la norme euclidienne). Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ est un point de $\mathbb{R}^n$ la norme euclidienne $\|x\|$ de x est donnée par

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \ .$$

La distance d associée est donnée par: si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont deux points de $\mathbb{R}^n$, alors

$$d(x,y) = \|y - x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} \ .$$

Normes et distances vérifient les inégalités triangulaires $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tous x, y, d'où l'on déduit que $\|y - x\| \geq \|y\| - \|x\|$ comme avec les valeurs absolues, et $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ pour tous x, y, z. Dès lors qu'on a une distance on a une topologie associée (des ouverts, des fermés, des compacts etc.). Les *ouverts* de $\mathbb{R}^n$ sont les $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ qui vérifient la propriété suivante: pour tout point de Ω il existe une boule centrée en ce point qui est entièrement contenue dans Ω. Donc:

$$\forall x \in \Omega, \exists r_x > 0 \text{ t.q. } B_x(r_x) \subset \Omega \ ,$$

où $B_x(r_x) = \{y \in \mathbb{R}^n \ / \ d(x,y) < r_x\}$. Les *fermés* de $\mathbb{R}^n$ sont les complémentaires des ouverts. Donc un sous ensemble $F \subset \mathbb{R}^n$ est un fermé si et seulement si $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash F$ est un ouvert. Intuitivement: les ouverts sont les patatoïdes qui ne contiennent aucun point de leur frontière et les fermés sont les patatoïdes qui contiennent tous les points de leur frontière. Un ensemble peut très bien n'être ni ouvert ni fermé s'il contient une partie des points de sa frontière mais pas tous. Par convention l'ensemble vide $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont à la fois ouverts et fermés.

Un sous ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est dit *compact* si de tout recouvrement $(\Omega_i)_I$ de K par des ouverts (à savoir $K \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$) on peut extraire un sous recouvrement fini (à savoir $K \subset \bigcup_{i \in J} \Omega_i$, où $J \subset I$ est fini). Par ailleurs, une suite (x_n) d'un espace $\mathbb{R}^p$ converge vers un point x, on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, \|x_n - x\| < \varepsilon \ ,$$

où $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^p$, et donc (x_n) converge vers x si x_n est aussi proche que l'on veut de x pourvu que n soit suffisamment grand. En écrivant

$x_n = (x_n^1, \dots, x_n^p)$ pour tout n, la suite (x_n) est entièrement représentée par ses p suites coordonnées (x_n^i), $i = 1, \dots, p$. Et bien sûr, si $x = (x_1, \dots, x_p)$ est un point de $\mathbb{R}^p$ alors

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ si et seulement si } \forall i = 1, \dots, p, \lim_{n\to+\infty} x_n^i = x^i \ .$$

Ce dernier point est intuitif mais découle mathématiquement du double encadrement

$$\max_{i=1,\dots,p} |x_i| \leq \|x\| \leq \sqrt{p} \max_{i=1,\dots,p} |x_i|$$

pour tout $x = (x_1, \dots, x_p)$ dans $\mathbb{R}^p$ qui entraîne que $\|x_n - x\|$ est petit si et seulement si tous les $|x_n^i - x^i|$ le sont. Le lien entre convergence des suites et compacité est donné par le théorème suivant. Comme dans le cas des suites réelles, une sous suite d'une suite (x_n) n'est rien d'autre qu'une suite obtenue à partir des x_n par sélection d'indices puis renumérotation. Une sous suite de (x_n) est donc une suite qui s'écrit $(x_{\varphi(n)})$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.

Théorème 2.1 (Théorème de Bolzano-Weierstrass). *Un sous ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si toute suite de points de K possède une sous suite convergente dans K.*

Dans le cas spécifique de $\mathbb{R}^n$ (attention ce n'est plus forcément vrai pour des espaces plus généraux, voir le Chapitre 3), le théorème suivant a lieu. Par définition on dit qu'un sous ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est borné s'il existe $R > 0$ tel que $A \subset B_0(R)$ (et donc si aucune partie de A ne s'échappe à l'infini).

Théorème 2.2. *Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont précisément les fermés bornés de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Ce théorème est une conséquence directe du Théorème 1.5. Qu'un compact soit un fermé borné est une propriété générale facile à démontrer (voir le Chapitre 3). C'est la réciproque qui est plus intéressante. Là il suffit de procéder par extraction successive de sous suite avec la caractérisation des compacts du théorème de Bolzano-Weierstrass. Soit K un fermé borné de $\mathbb{R}^p$. Soit (x_n) une suite de points de K. On note (x_n^i), $i = 1, \dots, p$, les suites coordonnées. La suite (x_n^1) est bornée. Le Théorème 1.5 donne l'existence de $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante pour laquelle $(x_{\varphi_1(n)}^1)$ converge. On considère alors la suite $(x_{\varphi_1(n)}^2)$. Elle aussi est bornée. En vertue du Théorème 1.5 il existe donc $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante pour laquelle $(x_{\varphi_1(\varphi_2(n))}^2)$ converge. Soit $\psi_2 = \varphi_1 \circ \varphi_2$. Alors $\psi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante. En remarquant que $(x_{\psi_2(n)}^1)$ est une sous suite de $(x_{\varphi_1(n)}^1)$ on obtient que $(x_{\psi_2(n)}^1)$ est convergente. Ainsi, $(x_{\psi_2(n)}^1)$ et $(x_{\psi_2(n)}^2)$ sont toutes deux convergentes. On considère alors la suite $(x_{\psi_2(n)}^3)$. Elle est bornée et possède donc une sous suite convergente $(x_{\psi_2(\varphi_3(n))}^3)$. On construit ainsi une application $\psi_3 = \psi_2 \circ \varphi_3$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Les suites $(x_{\psi_3(n)}^1)$ et $(x_{\psi_3(n)}^2)$ convergent en tant que sous suites des suites convergentes $(x_{\psi_2(n)}^1)$ et $(x_{\psi_2(n)}^2)$, et $(x_{\psi_3(n)}^3)$ converge par construction. On recommence ainsi jusqu'à atteindre p. Ainsi toute suite de points de K possède une sous suite convergente. Reste à montrer que la limite est forcément dans K, ce qui suit trivialement de la caractérisation des fermés par les suites (voir le Chapitre 3). $\square$

Une autre notion importante est la notion de complétude. Une suite (x_n) est dite de Cauchy si les x_n s'écrasent les uns sur les autres comme dans le cas de $\mathbb{R}$.

Donc (x_n) est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, \forall m \geq 0, \|x_{n+m} - x_n\| < \varepsilon \ .$$

Une suite convergente est toujours une suite de Cauchy par inégalité triangulaire. Réciproquement, si (x_n) est de Cauchy elle est forcément bornée. Il suit du théorème de Bolzano-Weierstrass qu'elle possède une sous suite convergente. On en déduit, comme dans $\mathbb{R}$ qu'elle est alors elle-même convergente. Les suites de Cauchy dans les espaces $\mathbb{R}^n$ sont donc convergentes. On dit que $\mathbb{R}^n$ est un espace complet. La dimension finie joue ici un rôle fondamental. Un tel résultat, comme nous le verrons plus tard, cesse d'être nécessairement vrai en dimension infinie.

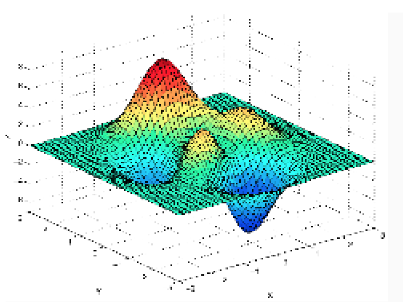
Pour finir avec ces rappels de topologie, un sous ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est *connexe* si, c'est la définition première de la connexité, il ne peut s'écrire comme réunion disjointe de deux ouverts non vides. On montre que dans $\mathbb{R}^n$ un sous ensemble ouvert est connexe si et seulement si il est *connexe par arcs*, et donc si et seulement si deux points quelconques de Ω peuvent être joints par un chemin continu entièrement contenu dans Ω. A savoir: un ouvert Ω est connexe par arcs (et donc connexe pour les ouverts de $\mathbb{R}^n$) si et seulement si

$$\forall x, y \in \Omega, \exists \gamma : [0,1] \to \Omega, \gamma \text{ continue, avec } \gamma(0) = x \text{ et } \gamma(1) = y$$

Ici la continuité de γ sur $[0,1]$ se traduit par le fait que pour tout $t_0 \in [0,1]$, $\lim_{t \to t_0} \gamma(t) = \gamma(t_0)$ où les t qui tendent vers t_0 dans cette limite restent dans $[0,1]$.

1. Continuité

Une remarque simple est la suivante: soit $D \subset \mathbb{R}^p$ un sous ensemble de $\mathbb{R}^p$ et soit $f : D \to \mathbb{R}^q$ une application de D dans $\mathbb{R}^q$. En écrivant que $f = (f_1, \ldots, f_q)$, l'application f est entièrement représentée par ses q fonctions coordonnées f_i, $i = 1, \ldots, q$. Les $f_i : D \to \mathbb{R}$ sont des fonctions réelles définies sur D. Le graphe d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ de $\mathbb{R}$ se dessine dans $\mathbb{R}^{p+1}$.



Graphe d'une fonction de IR² dans IR.

Définition 2.1. *Soient $D \subset \mathbb{R}^p$ un sous ensemble de $\mathbb{R}^p$, $a \in D$ un point de D et $f : D \to \mathbb{R}^q$ une application de D dans $\mathbb{R}^q$. On dit que f est continue au point a si l'une des quatre propositions équivalentes suivantes est vérifiée:*

(i) $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in D, \|x - a\| < \eta \ \Rightarrow \ \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$,

(iii) pour toute suite $(x_n)_n$ de points de D vérifiant que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} x_n = a$, on a forcément que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$,

(iv) les q fonctions coordonnées f_i de f sont toutes continues au point a.

On dit que f est continue sur D lorsque f est continue en tout point de D.

L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) suit du fait que (ii) n'est rien d'autre que la définition mathématique de (i). L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iii) se démontre comme dans le cas réel en remplaçant les valeurs absolues de $\mathbb{R}$ par les normes euclidiennes des espaces $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$. L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iv) suit de la remarque précédant la définition.

THÉORÈME 2.3 (Théorème général sur la continuité). *Si f et g sont continues en un point a, alors $f+g$ et fg (dans le cas $q=1$) sont continues en a. Si de plus $g(a) \neq 0$ alors $g(x) \neq 0$ pour x proche de a et $\frac{f}{g}$ (dans le cas $q=1$) est continue en a. Si par ailleurs f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a. Pour finir, les fonctions coordonnées $(x_1, \ldots, x_n) \to x_i$ sont continues sur $\mathbb{R}^n$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.*

DÉMONSTRATION. Que $f+g$ et fg (lorsque $q=1$) soient continues en a si f et g le sont suit facilement du point (iii) de la Définition 2.1 et du Lemme 1.1. Si $g(a) \neq 0$, et g est continue au point a, il existe forcément $\eta > 0$ tel que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in D_g \cap B_a(\eta)$, où D_g est le domaine de définition de g et $B_a(\eta)$ est la boule ouverte de centre a et de rayon η. Deux approches pour démontrer cette affirmation sont possible. Par l'absurde, on fabriquerait sinon une sous suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) qui converge vers a et pour laquelle $g(x_{\varphi(n)}) = 0$ pour tout n. Par passage à la limite $n \to +\infty$ et continuité de g on devrait alors avoir $g(a) = 0$. On peut sinon procéder par voie directe. Par continuité de g en a,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in D_g, \|x-a\| < \eta \ \Rightarrow \ \|g(x) - g(a)\| < \varepsilon \ .$$

Comme $g(a) \neq 0$ on peut choisir $\varepsilon = \frac{1}{2}\|g(a)\|$. On obtient alors un $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D_g$ vérifiant que $\|x-a\| < \eta$, $\|g(x) - g(a)\| < \frac{1}{2}\|g(a)\|$. Or $\|g(x) - g(a)\| \geq \|g(a)\| - \|g(x)\|$ par inégalité triangulaire et donc, pour tout $x \in D_g$ vérifiant que $\|x-a\| < \eta$, $\|g(x)\| \geq \|g(a)\| - \frac{1}{2}\|g(a)\| = \frac{1}{2}\|g(a)\| > 0$. D'où l'affirmation faite un peu plus haut. En appliquant de nouveau le point (iii) de la Définition 2.1 et le Lemme 1.1, on obtient la continuité de f/g en a si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$ (et $q = 1$ pour pouvoir parler du quotient). Pour $g \circ f$ notons D le domaine de définition de cette composée. Soit (x_n) une suite de points de D convergent vers a. Avec le point (iii) de la Définition 2.1, appliqué à f, $f(x_n) \to f(a)$ lorsque $n \to +\infty$. En appliquant de nouveau le point (iii) de la Définition 2.1, $g(f(x_n)) \to g(f(a))$ puisque g est continue en $f(a)$. Comme (x_n) est quelconque dans D convergent vers a, c'est que, toujours en raison du point (iii) de la Définition 1.5, $g \circ f$ est continue en a. Reste à montrer que les fonctions coordonnées sont continues, ce qui suit très facilement de l'inégalité $|y_i - x_i| \leq \|y - x\|$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ et tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. D'où le théorème. $\square$

On démontre maintenant le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonction continues à valeurs dans $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 2.4 (Théorème des valeurs intermédiaires). *Soient $D \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert connexe de $\mathbb{R}^p$, $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue sur D et $a, b \in D$ deux points de D. On suppose que f change de signe en a et b, et donc que $f(a)f(b) < 0$. Il existe alors $c \in D$ tel que $f(c) = 0$. On en déduit que f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.*

DÉMONSTRATION. Comme connexité et connexité par arcs coïncident pour les ouverts des espaces $\mathbb{R}^p$, D est aussi connexe par arcs. Soit $\gamma : [0,1] \to D$ un chemin entièrement contenu dans D joignant a à b. On définit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(\gamma(t))$. Par composition, g est continue sur $[0,1]$. Par hypothèse g change de signe en 0 et 1. Le Chapitre 1 donne alors l'existence d'un point $t_0 \in]0,1[$ tel que $g(t_0) = 0$. En posant $c = \gamma(t_0)$ on récupère que $f(c) = 0$. La proposition est démontrée. La première partie du théorème est démontrée. Pour la second on peut supposer que $f(a) < f(b)$. On prend n'importe quel $d \in]f(a), f(b)[$. On pose $g = f - d$. Alors g est continue sur D et $g(a)g(b) < 0$ de sorte qu'il existe $c \in D$ avec $g(c) = 0$, soit $f(c) = d$. Le théorème est démontré. $\square$

Une autre preuve possible de la première partie procède comme suit: on raisonne par l'absurde et on suppose que f ne s'annule jamais sur D. On pose

$$\Omega_1 = \{x \in D \;/\; f(x) < 0\} \text{ et } \Omega_2 = \{x \in D \;/\; f(x) > 0\} \;.$$

Alors $\Omega_1 = f^{-1}(]-\infty, 0[)$ et $\Omega_2 = f^{-1}(]0, +\infty[)$ de sorte que Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts de D (l'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert). Par hypothèse $\Omega_1 \neq \emptyset$ et $\Omega_2 \neq \emptyset$ puisque $a \in \Omega_1$ et $b \in \Omega_2$ (ou réciproquement). Par hypothèse d'absurde $\Omega_1 \bigcup \Omega_2 = D$. Clairement $\Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \emptyset$. Une contradiction avec la connexité de D. On ré'cupère aussi pour les fonction continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ les théorèmes relatifs à la compacité.

THÉORÈME 2.5. *Soient $K \subset \mathbb{R}^p$ un sous ensemble compact de $\mathbb{R}^p$ et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur K. Alors f est bornée sur K et elle y atteint ses bornes.*

DÉMONSTRATION. Elle est identique à la preuve du théorème correspondant du Chapitre 1. On prend une suite (x_n) de points de K telle que $f(x_n) \to m$ lorsque $n \to +\infty$, où $m = \inf_K f$ (ou alors aussi $m = \sup_K f$). Par compacité cette suite possède une sous suite convergente dans K. Si $\overline{x}$ est la limite de la sous suite, et par continuité de f, on récupère $f(\overline{x}) = m$, ce qui clôt la preuve du théorème. $\square$

On a ici la même remarque qu'au Chapitre 1: un autre résultat fréquemment associé à la compacité est que toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue (et il n'est pas besoin ici de supposer que l'arrivée est $\mathbb{R}$).

2. Le critère polaire de continuité

On considère ici les fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour simplifier l'écriture on suppose que $0 \in \Omega$. Il existe alors $\eta > 0$ tel que $B_0(\eta) \subset \Omega$, où $B_0(\eta)$ est la boule ouverte de centre 0 et de rayon η.

THÉORÈME 2.6 (Critère polaire de continuité). *Soit Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant 0 et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Alors f est continue en 0 si et seulement si il existe $\varepsilon : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}^+$ telle que*

$$|f(r\cos(\theta), r\sin(\theta) - f(0,0)| \leq \varepsilon(r) \tag{2.1}$$

pour tout $r > 0$ suffisamment petit et tout $\theta \in [0, 2\pi]$, avec $\lim\limits_{r \to 0^+} \varepsilon(r) = 0$.

DÉMONSTRATION. Supposons que f est continue en $(0,0)$. Alors f est bornée au voisinage de $(0,0)$. Pour $(x,y) \in \Omega$ on pose $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. On pose ensuite

$$\varepsilon(r) = \sup_{\theta \in [0,2\pi]} |f(r\cos(\theta), r\sin(\theta) - f(0,0)| \;.$$

Cette fonction existe pour $r > 0$ suffisamment petit. Par ailleurs, il suit de la phrase de continuité que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall 0 < r < \eta, \forall \theta \in [0, 2\pi], |\varepsilon(r)| < \varepsilon \ .$$

Donc $\varepsilon(r) \to 0$ lorsque $r \to 0^+$ et on a bien que (2.1) est vérifiée. Réciproquement supposons qu'une telle fonction ε existe vérifiant (2.1) pour tout $0 < r < r_0$, $r_0 > 0$ petit. Soit $\varepsilon > 0$ fixé quelconque. Comme $\varepsilon(r) \to 0$ lorsque $r \to 0^+$ il existe $0 < \eta < r_0$ tel que $|\varepsilon(r)| < \varepsilon$ pour tout $0 < r < \eta$. En posant $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, on obtient alors par (2.1) que $|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$ pour tout (x,y) tel que $\|(x,y)\| < \eta$. On retrouve ainsi la phrase de continuité de f en zéro. Le critère polaire de continuité est démontré. $\square$

On passe facilement de la continuité d'une application f en a à la continuité d'une application g en 0 en remarquant que f est continue en a équivaut à la continuité en 0 de l'application $x \to f(a+x)$.

3. Différentiabilité

On cherche à définir la notion de "dérivabilité" d'une fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Comme on ne peut plus diviser par des vecteurs on perd la notion même du taux d'accroissement qui ne fait plus sens:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ n'a pas de sens pour } x - a \in \mathbb{R}^p \text{ lorsque } p \geq 2 \ .$$

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a = (a_1, \dots, a_p)$ un point de Ω, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur Ω. On considère les p fonctions réelles f_a^i, $i = 1, \dots, p$, définies par

$$f_a^i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p) \ .$$

En d'autres termes,

$$\begin{aligned} &f_a^1(t) = f(t, a_2, \dots, a_p), \\ &f_a^2(t) = f(a_1, t, a_3, \dots, a_p), \\ &\dots, \\ &f_a^p(t) = f(a_1, \dots, a_{p-1}, t) \ . \end{aligned}$$

Sachant que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, il existe un $\varepsilon > 0$ pour lequel $B_a(\epsilon) \subset \Omega$, où $B_a(\varepsilon)$ est la boule ouverte de centre a et de rayon ε. Il s'ensuit que pour tout $i = 1, \dots, p$, f_a^i est définie sur au moins l'intervalle ouvert $]a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon[$.

Définition 2.2. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a = (a_1, \dots, a_p)$ un point de Ω, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur Ω. On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à x_i au point a si la fonction f_a^i est dérivable au point a_i. On note alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ la dérivée de f_a^i en a_i, et*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (f_a^i)'(a_i)$$

s'appelle la dérivée partielle de f par rapport à x_i au point a.

L'existence des dérivées partielles en un point ne suffit pas à garantir la différentiabilité de f en a. A noter: pour les fonctions de plusieurs variables réelles on utilise *différentiable* plutôt que dérivable, la dérivabilité étant associée à la limte du taux d'accroissement pour les fonctions d'une variable réelle. Dire que $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ est différentiable en a ce sera dire que les dérivées partielles des f_j en a existent toutes et que

$$f(x) = f(a) + Df(a).(x-a) + o(x-a)$$

où $o(x-a)$ est une application à valeurs $\mathbb{R}^q$ telle que $\frac{o(x-a)}{\|x-a\|} \to 0$ lorsque $x \to a$, et où $Df(a) \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ est l'application linéaire définie comme ci-après.

DÉFINITION 2.3. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a = (a_1, \ldots, a_p)$ un point de Ω, et $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$, $f = (f_1, \ldots, f_q)$, une application définie sur Ω. On dit que f est différentiable au point a si*

(i) Pour tout $i = 1, \ldots, p$ et tout $j = 1, \ldots, q$ les $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$ existent ,

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ / $\forall x \in \Omega \backslash \{a\}$,
$\|x-a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a) - Df(a).(x-a)\| < \varepsilon \|x-a\|$,

où $Df(a) \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ est l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ qui est donnée par

$$Df(a)_j.(X) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) X_i$$

pour tout $X \in \mathbb{R}^p$, $X = (X_1, \ldots, X_p)$, et tout $j = 1, \ldots, q$. On dit que $Df(a)$ est la différentielle de f en a. L'application est dite différentiable sur Ω si elle est différentiable en tout point de Ω.

On peut très bien avoir (i) sans pour autant avoir (ii). Par exemple la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \ , \end{cases}$$

a toutes ses dérivées partielles en $(0,0)$ mais elle n'est pas différentiable en $(0,0)$. En effet, comme $f(x,0) = 0$ et $f(0,y) = 0$ pour tout x et tout y, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et valent 0. Donc (i) est vérifiée par f en $a = (0,0)$. Par contre (ii) équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{a\}, \|(x,y)\| < \eta \Rightarrow \|f(x,y)\| < \varepsilon \|(x,y)\| \ .$$

En écrivant $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ on devrait donc avoir que

$$\frac{1}{r} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \to 0$$

uniformément par rapport à θ lorsque $r \to 0$. Or $f(r\cos\frac{\pi}{4}, r\sin\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$ pour tout $r > 0$, ce qui interdit cette limite à zéro.

DÉFINITION 2.4. *La matrice de représentation de $Df(a)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ est la matrice*

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$$

Elle est appelée matrice jacobienne de f en a. Son déterminant (lorsque $p = q$) est appelé jacobien de f en a.

Pour mémoire la matrice de représentation d'une application linéaire dans deux bases (une au départ et une à l'arrivée) est la matrice dont les colonnes sont constituées des coordonnées dans la base d'arrivée de l'image par l'application linéaire des vecteurs de la base de départ. Elle code les équations de l'application linéaire dans ces bases. Si $p = q = 1$ on a $Df(a).(x) = f'(a) \times x$ et $(f'(a))$ se regarde comme la matrice jacobienne de f en a.

Proposition 2.1. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a = (a_1, \ldots, a_p)$ un point de Ω, et $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$, $f = (f_1, \ldots, f_q)$, une application définie sur Ω. Alors f est différentiable en a si et seulement si les f_j sont différentiables en a pour tout $j = 1, \ldots, q$.*

Démonstration. L'équivalence des points (i) ne présente pas de difficulté. Pour ce qui est de l'équivalence des points (ii) on remarque que la $j$ème coordonnée de $Y = f(x) - f(a) - Df(a).(x - a)$ vaut

$$Y_j = f_j(x) - f_j(a) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)$$

et on sait que

$$\max_{j=1,\ldots,q} |Y_j| \leq \|Y\| \leq \sqrt{q} \max_{j=1,\ldots,q} |Y_j| \ .$$

Par suite (ii) pour $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ est bien équivalent à

$$\begin{aligned} &\forall j = 1, \ldots, q, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in \Omega \backslash \{a\}, \|x - a\| < \eta \\ &\Rightarrow \left| f_j(x) - f_j(a) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) \right| < \varepsilon \|x - a\| \ . \end{aligned}$$

D'où la proposition. □

Dans la preuve précédente on voit que $Df(a)_j = Df_j(a)$ pour tout $j = 1, \ldots, q$ (reconstruction de la différentielle). On revient maintenant brièvement sur la formule

$$Df(a).(x) = f'(a)x$$

pour les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Le point ici est que, pour ces fonctions,

$$\begin{aligned} & f(x) - f(a) - Df(a).(x - a) = o(|x - a|) \\ & \Leftrightarrow f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) = o(x - a) \\ & \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = o(1) \\ & \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = o(1) \\ & \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \ . \end{aligned}$$

Il y a bien équivalence, pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, entre différentiabilité et dérivabilité et le lien entre différentielle (application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et dérivée (un réel) est donné par $Df(a).(x) = f'(a)x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.7. *Une application différentiable en un point est continue en ce point.*

Démonstration. Soit a le point en question. Il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(a) - Df(a).(x-a)\| &\geq \|f(x) - f(a)\| - \|Df(a).(x-a)\| \\ &\geq \|f(x) - f(a)\| - C\|x-a\|\end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^p$. Par suite il est clair que (ii) entraîne que

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in \Omega, \|x-a\| < \eta \\ &\Rightarrow \ \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \ .\end{aligned}$$

Dans la preuve on récupère formellement une domination par $(\varepsilon + C)\eta$, et en choisissant η suffisamment petit pour que $(1+C)\eta < \varepsilon$, puisqu'on peut toujours diminuer η dans le point (ii), on obtient la formule ci-dessus pour les $0 < \varepsilon < 1$, puis donc pour tous les $\varepsilon > 0$. On a ainsi prouvé la continuité de f en a. D'où le théorème. □

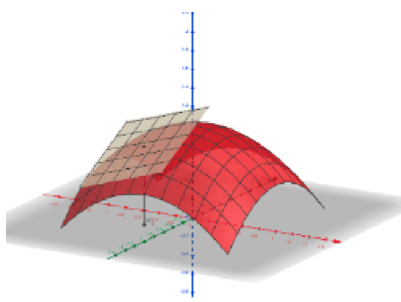
Pour les fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la différentiabilité en un point a donne lieu à la notion d'hyperplan tangent (un hyperplan est un sous espace de “dimension” 1 de moins que l'espace entier). Le graphe de f va se situer dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Si on note $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ les coordonnées de $\mathbb{R}^{n+1}$ l'hyperplant tangent en $(a, f(a))$ au graphe de f a pour équation

$$x_{n+1} = f(a) + Df(a)(x-a) \ ,$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$. C'est une équation qui s'écrit

$$x_{n+1} = f(a) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - a_i) \ ,$$

où $a = (a_1, \ldots, a_n)$ et $c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.



Hyperplan tangent au graphe d'une fonction f de IR² dans IR.

Comme pour les fonctions d'une variable réelle on a un théorème général sur la différentiabilité.

Théorème 2.8 (Théorème général sur la différentiabilité). *Si f et g sont différentiables en un point a, alors $f+g$ et fg (dans le cas $q = 1$) sont différentiables en a et, en tant qu'applications linéaires, $D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$ et*

$$D(fg)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a) \ .$$

Si de plus $g(a) \neq 0$ alors $g(x) \neq 0$ pour x proche de a et $\frac{f}{g}$ (dans le cas $q = 1$) est aussi différentiable en a avec

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{1}{g(a)^2}\left(g(a)Df(a) - f(a)Dg(a)\right) \ .$$

Si par ailleurs f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a avec

$$D(g \circ f)(a) = Dg\left(f(a)\right) \circ Df(a)\ .$$

En particulier, les matrices jacobiennes se multiplient. Pour finir, si $f \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ est linéaire (ce qui est le cas par exemple des fonctions coordonnées avec $q = 1$) alors f est différentiable en tout point a de $\mathbb{R}^p$ et $Df(a) = f$ pour tout $a \in \mathbb{R}^p$.

Démonstration. Il y a beaucoup de choses à démontrer dans ce théorème. Pour ne pas trop alourdir la rédaction on va se limiter à traiter de fg (avec donc $q = 1$) et du cas des applications linéaires $f \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$. En ce qui concerne les dérivées partielles il suit du théorème général de différentiabilité pour les fonctions d'une variables réelle que les dérivées partielles de fg en a existent toutes avec

$$\frac{\partial (fg)_j}{\partial x_i}(a) = g(a)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) + f(a)\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a)$$

pour tous $i = 1, \dots, p$ et tous $j = 1, \dots, q$. On écrit ensuite, comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle, que

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = \left(f(x) - f(a)\right)g(x) + \left(g(x) - g(a)\right)f(a)\ .$$

Comme g est différentiable en a elle est continue en a, et donc $g(x) - g(a) = o(1)$ et $g(x) = O(1)$ au sens où $g(x) - g(a)$ tend vers 0 lorsque $x \to a$ (la signification de $o(1)$) et où g est bornée au voisinage de a (la signification de $O(1)$). On a aussi, puisque $Df(a)$ est linéaire en dimension finie, que $Df(a).(X) = O(X)$ au sens où il existe $C \geq 0$, la norme de l'application linéaire $Df(a)$, telle que $\|Df(a).(X)\| \leq C\|X\|$ pour tout X. Par différentiabilité de f et g en a on a donc

$$\begin{aligned} &f(x) - f(a) - Df(a).(x - a) = o(x - a)\ , \\ &g(x) - g(a) - Dg(a).(x - a) = o(x - a) \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} &f(x)g(x) - f(a)g(a) - g(a)Df(a).(x - a) - f(a)Dg(a).(x - a) \\ &= \left(f(x) - f(a) - Df(a).(x - a)\right)g(x) \\ &\quad + \left(g(x) - g(a)\right)Df(a).(x - a) \\ &\quad + \left(g(x) - g(a) - Dg(a).(x - a)\right)f(a) \end{aligned}$$

et en passant aux normes on obtient que

$$\begin{aligned} &\|f(x)g(x) - f(a)g(a) - g(a)Df(a).(x - a) - f(a)Dg(a).(x - a)\| \\ &= \|O(1)\| \times \|o(x - a)\| + \|o(1)\| \times \|O(x - a)\| + \|o(x - a)\| \times \|f(a)\| \\ &= o(x - a) \end{aligned}$$

où, pour la dernière ligne, $\frac{o(x-a)}{\|x-a\|} \to 0$ dans $\mathbb{R}$ lorsque $x \to a$. D'où la différentiabilité de fg en a et la formule correspondante. Considérons maintenant $f \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ une application linéaire. Il existe alors des réels a_{ij}, $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$ tels que

$$f_j(x) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} x_i$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $x = (x_1, \dots, x_p)$, et tout $j = 1, \dots, q$. Par suite les dérivées partielles de f existent en tout point a de $\mathbb{R}^p$ et l'on a que $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) = a_{ij}$ pour tous $i = 1, \dots, p$ et $j = 1, \dots, q$. Dès lors

$$\begin{aligned} Df(a)_j.(X) &= \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) X_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} a_{ij} X_i \\ &= f_j(X) \end{aligned}$$

pour tout $X \in \mathbb{R}^p$, $X = (X_1, \dots, X_p)$, et tout $j = 1, \dots, q$. D' où l'égalité $Df(a) = f$. Le théorème est démontré. □

On retrouve facilement la formule $Df(a) = f$ pour tout a (lorsque f est linéaire) en remarquant que pour f linéaire, $f(x) - f(a) - f(x - a) = 0$ pour tout x et tout a, et donc, a fortiori, est un $o(x - a)$.

4. Le théorème des accroissements finis

Le théorème des accroissements finis en égalité, sous la forme du Chapitre 1, cesse d'être vrai en général dans le cas vectoriel. Considérons par exemple l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = (x^2, x^3)$. Soient aussi $a = -1$ et $b = +1$. Clairement f est différentiable sur $\mathbb{R}$ et sa différentielle est donnée par

$$Df(c).h = h(2c, 3c^2)$$

pour tout $h \in \mathbb{R}$. Notons f_1 et f_2 les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_1(x) = x^2$ et $f_2(x) = x^3$. L'égalité $f(b) - f(a) = Df(c).(b - a)$ pour un $c \in]-1, +1[$, si elle était vraie, entraînerait que

$$f_1(+1) - f_1(-1) = 4c \text{ et } f_2(+1) - f_2(-1) = 6c^2 \ .$$

Comme $f_1(-1) = f_1(+1)$, la première de ses deux équations donne $c = 0$. La seconde est alors impossible puisque $f_2(+1) - f_2(-1) = 2$. D'où l'affirmation. Il faut en fait corriger l'énoncé du théorème (par exemple) sous la forme suivante (nous reviendrons plus en détail sur les accroissements finis lorsque nous traiterons du cas des espaces de Banach). On rappelle qu'un sous ensemble A d'un espace euclidien est convexe si pour tous $x, y \in A$ le segment $[x, y]$ est entièrement contenu dans A. La convexité entraîne de façon évidente la connexité par arcs, donc aussi la connexité.

THÉORÈME 2.9. *Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ une application différentiable sur Ω. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $i = 1, \dots, p$, tout $j = 1, \dots, q$ et tout $x \in \Omega$, $\left|\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\right| \leq C$ (donc que les dérivées partielles de f sont toutes bornées dans Ω). Alors il existe $C' > 0$ telle que pour tous $x, y \in \Omega$,*

$$\|f(y) - f(x)\| \leq C' \|y - x\| \ , \tag{2.2}$$

et on peut prendre $C' = Cp\sqrt{q}$. En fait, le meilleur C' possible dans cette inégalité est $C' = \sup_{x \in \Omega} \|Df(x)\|$ et donc le sup sur les $x \in \Omega$ des normes des applications linéaires $Df(x)$.

Démonstration. On se borne à montrer l'existence d'une constante $C' > 0$ pour laquelle (2.2) a lieu. Nous verrons dans le chapitre sur la différentiabilité pour les applications entre espaces de Banach que cette constante est en fait le sup sur les $x \in \Omega$ des normes des applications linéaires $Df(x)$. On note f_i, $i = 1, \ldots, q$, les composantes de f. Soient $x, y \in \Omega$. Le segment $[x, y]$ est constitué des points $ty + (1-t)x$ avec $t \in [0,1]$. On note $g_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ les fonctions données par $g_i(t) = f_i(ty+(1-t)x)$ pour $t \in [0,1]$ et $i = 1, \ldots, q$. Le théorème des accroissements finis pour les fonctions d'une variable réelle donne que pour tout $i = 1, \ldots, q$ il existe $c_i \in]0,1[$ tel que $g_i(1) - g_i(0) = g_i'(c_i)$. Pour tout $i = 1, \ldots, q$, $g_i'(c) = Df_i(z_c).(y-x)$ et donc

$$g_i'(c) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z_c)(y_j - x_j) \ ,$$

où $z_c = cy + (1-c)x$. On obtient donc

$$\begin{aligned} |f_i(y) - f_i(x)| &= |\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z_{c_i})(y_j - x_j)| \\ &\le C \sum_{j=1}^{p} |y_j - x_j| \\ &\le Cp\|y - x\| \end{aligned}$$

pour tout $i = 1, \ldots, p$. Sachant que

$$\|f(y) - f(x)\| \le \sqrt{q} \max_{i=1,\ldots,q} |f_i(y) - f_i(x)| \ ,$$

on obtient que $\|f(y) - f(x)\| \le Cp\sqrt{q}\|y - x\|$ ce qui prouve l'existence d'une constante $C' > 0$ pour laquelle (2.2) a lieu. D'où le théorème. □

5. Applications de classe C^1

Les “ennuis” avec la théorie $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ commencent quand on veut définir la notion d'application C^1 ou encore la notion de dérivée d'ordre supérieur. Le problème est que, contrairement à la théorie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Df n'est plus de même nature que f puisque si f est différentiable sur Ω alors que

$$Df : \Omega \to L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \ .$$

Pour contourner cette difficulté on“ triche” un peu en “sortant des définitions du chapeau”. La théorie de différentiablité entre espaces de Banach rattrapera ce problème.

Définition 2.5. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$, $f = (f_1, \ldots, f_q)$, une application définie sur Ω. On dit que f est de classe C^1 sur Ω si pour tout $i = 1, \ldots, p$ et tout $j = 1, \ldots, q$ les $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ existent en tout point de Ω et, en tant que fonctions $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} : \Omega \to \mathbb{R}$, sont continues sur Ω.*

Cette définition élégante pose d'entrée un problème: il faut démontrer que “C^1 $\Rightarrow$ différentiable”, cette affirmation n'allant pas de soit à ce stade.

Démonstration de $C^1 \Rightarrow$ différentiable. Pour simplifier on suppose que $p = 2$ et $q = 1$. Soit (a, b) un point de $\mathbb{R}^2$ et soit (h, k) suffisamment proche de $(0, 0)$ pour que pour tous $t_1, t_2 \in [0,1]$, $(a + t_1h, b + t_2k) \in \Omega$. Avec la formule des accroissements finis pour les fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, vue au Chapitre 1, on obtient qu'il existe $\theta_1 \in]0,1[$ et $\theta_2 \in]0,1[$ tels que

$$\begin{aligned} &f(a+h,b+k) - f(a,b) \\ &= (f(a+h,b+k) - f(a,b+k)) + (f(a,b+k) - f(a,b)) \\ &= h\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b+k) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a, b+\theta_2 k) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} &\left| f(a+h,b+k) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k \right| \\ &\le \left| \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \right| \times |h| \\ &\quad + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(a, b+\theta_2 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \right| \times |k| \ . \end{aligned}$$

Or les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont par hypothèse continues sur Ω. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe ainsi $\eta > 0$ tel que si $\|(h,k)\| < \eta$, alors

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \right| < \frac{\epsilon}{2} \ , \\ &\left| \frac{\partial f}{\partial y}(a, b+\theta_2 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \right| < \frac{\epsilon}{2} \ . \end{aligned}$$

Comme par ailleurs $|h| \le \|(h,k)\|$ et $|k| \le \|(h,k)\|$, on obtient que

$$\begin{aligned} &\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ / \ 0 < \|(h,k)\| < \eta \ \Rightarrow \\ &\left| f(a+h,b+k) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k \right| < \epsilon \|(h,k)\| \ . \end{aligned}$$

Il s'ensuit que f est différentiable au point (a,b). $\square$

Le théorème général sur la classe C^1 qui suit est une conséquence directe des théorèmes généraux sur la continuité et la dérivabilité.

Théorème 2.10 (Théorème général sur la classe C^1). *Si f et g sont de classe C^1 sur un ouvert Ω alors $f+g$ et fg (dans le cas $q=1$) sont de classe C^1 sur Ω. Si de plus $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in \Omega$, $\frac{f}{g}$ (dans le cas $q=1$) est de classe C^1 sur Ω. Si par ailleurs f est de classe C^1 sur un ouvert Ω et g est de classe C^1 sur un ouvert Ω' avec $f(\Omega) \subset \Omega'$, alors $g \circ f$ est de classe C^1 sur Ω. Pour finir, les fonctions coordonnées $(x_1, \ldots, x_n) \to x_i$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.*

Démonstration. Le Théorème 2.8 donne que

$$\begin{aligned} \frac{\partial (f+g)_j}{\partial x_i} &= \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \ , \\ \frac{\partial (fg)}{\partial x_i} &= f\frac{\partial g}{\partial x_i} + g\frac{\partial f}{\partial x_i} \ , \\ \frac{\partial (\frac{f}{g})}{\partial x_i} &= \frac{g\frac{\partial f}{\partial x_i} - f\frac{\partial g}{\partial x_i}}{g^2} \ , \\ \frac{\partial (g\circ f)_k}{\partial x_i} &= \sum_j \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_j} \circ f\right)\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \end{aligned}$$

et il reste ensuite à appliquer le Théorème 2.3 pour avoir le résultat. Pour ce qui est des fonctions coordonnées on a que $\frac{\partial x_j}{\partial x_i}(x) = \delta_{ij}$ pour tout x, et ces fonctions sont donc bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. D'où le théorème. $\square$

Les fonctions coordonnées étant de classe C^1 toute application linéaire de $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ est de classe C^1 puisque chaque composante de f est une combinaison linéaire des fonctions coordonnées de $\mathbb{R}^p$.

6. Le théorème d'inversion locale

On traite du théorème d'inversion locale dans cette section. Une clef pour construire la bijection dans la preuve du théorème d'inversion locale est un théorème de point fixe. Ce théorème qui appartient au domaine de la topologie est démontré au Chapitre **??**, Théorème 6.17. Les applications qui vérifient (2.3) avec $C < 1$ sont dites C-contractantes (sinon on parle aussi d'application lipschitzienne de constante C lorsque C n'est pas nécessairement strictement plus petite que 1).

Théorème 2.11 (Théorème du point fixe). *Soient* $r > 0$, $B'_0(r)$ *la boule fermée de centre* 0 *et de rayon* $r > 0$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : B'_0(r) \to B'_0(r)$ *une application. On suppose qu'il existe* $0 \leq C < 1$ *tel que pour tous* $x, y \in B'_0(r)$,

$$\|f(y) - f(x)\| \leq C\|y - x\| \ . \tag{2.3}$$

Il existe alors un unique $x \in B'_0(r)$ *qui soit un point fixe de* f*, à savoir qui satisfasse que* $f(x) = x$.

On aborde maintenant la notion de difféomorphisme.

Définition 2.6. *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^p$, V *un ouvert de* $\mathbb{R}^q$*, et* $f : U \to \mathbb{R}^q$ *une application définie sur* U*. On dit que* f *est un difféomorphisme de classe* C^1 *de* U *sur* V *si*

(i) f *est de classe* C^1 *sur* U ,

(ii) f *réalise une bijection de* U *sur* V ,

(iii) f^{-1}*, l'inverse de* f*, est de classe* C^1 *sur* V .

On cherche ici des conditions simples sur f pour que f soit un difféomorphisme de classe C^1 de U sur V. On note $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ l'application identité de $\mathbb{R}^n$. C'est une application linéaire. De la formule de composition pour la différentielle et des formules $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p}$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^q}$ on tire par différenciation de ces formules que pour tout $a \in U$,

$$\begin{cases} Df^{-1}\left(f(a)\right) \circ Df(a) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p} \ , \\ Df(a) \circ Df^{-1}\left(f(a)\right) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^q} \ . \end{cases}$$

Par suite si f est un C^1-difféomorphisme de U sur V alors $Df(a)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^p$ sur $\mathbb{R}^q$, d'inverse $Df^{-1}\left(f(a)\right)$:

$$Df^{-1}\left(f(a)\right) = Df(a)^{-1} \ .$$

En particulier, comme un isomorphisme présèrve les dimensions (l'image d'une base par un isomorphisme est encore une base), s'il existe un C^1-difféomorphisme de U sur V alors nécessairement $p = q$. Le théorème qui répond à la question que nous avons posée plus haut est le théorème d'inversion locale. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si $a \in U$ et si $f : U \to \mathbb{R}^n$ est une application définie sur U et différentiable en

a, on rappelle que le *jacobien* $Jf(a)$ de f en a est le déterminant de la matrice jacobienne de f en a. Or (c'est de l'algèbre linéaire) $Df(a)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si le jacobien de f en a est non nul. Donc:

$$Df(a) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \ \Leftrightarrow \ Jf(a) \neq 0 \ ,$$

où $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des isomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Le théorème d'inversion locale s'énonce de la façon suivante.

THÉORÈME 2.12 (Le théorème d'inversion locale). *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, a un point de U, et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 sur U. On suppose que $Jf(a) \neq 0$. Il existe alors $\eta > 0$ tel que*

(i) $B_a(\eta) \subset U$ et $f\big(B_a(\eta)\big)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

(ii) f est un difféomorphisme de classe C^1 de $B_a(\eta)$ sur $f\big(B_a(\eta)\big)$,

où $B_a(\eta)$ est la boule ouverte de centre a et de rayon η dans $\mathbb{R}^n$. Si maintenant f est injective sur U, et si en tout point x de U, $Jf(x) \neq 0$, alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un difféomorphisme de classe C^1 de U sur $f(U)$.

Ce théorème généralise ce que l'on savait déjà pour les fonctions Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, si $a \in I$, et si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 telle que $f'(a) \neq 0$ alors soit $f'(a) > 0$ soit $f'(a) < 0$. Par suite, par continuité de f', pour η petit, et pour tout x dans $]a-\eta, a+\eta[$, $f'(x) > 0$ (ou $f'(x) < 0$). En particulier, f est strictement croissante sur $]a-\eta, a+\eta[$ ou strictement décroissante sur $]a-\eta, a+\eta[$, et f réalise ainsi une bijection, et même un difféomorphisme de classe C^1, de $]a-\eta, a+\eta[$ sur l'intervalle ouvert $f\big(]a-\eta, a+\eta[\big)$. On notera (en anticipant un peu sur la notion d'application de classe C^k) que la classe de différentiablilité s'adapte au théorème d'inversion locale. Si f est en fait de classe C^k, avec $k \geq 1$, alors on récupère un C^k-difféomorphisme.

DÉMONSTRATION. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, a un point de U, et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 sur U telle que $Jf(a) \neq 0$. On note $\Phi = Df(a)$ et $g = \Phi^{-1} \circ f$. Comme Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$, démontrer le théorème sur f ou sur g revient au même (les linéaires sont de classe C^1). On a ici

$$\begin{aligned} Dg(a) &= D\Phi\left(fa(a)\right) \circ Df(a) \\ &= \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \ , \end{aligned}$$

où $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ est l'application linéaire identité de $\mathbb{R}^n$. Sans perdre en généralité, quitte à changer g en $x \to g(a+x) - g(a)$, on pourra supposer que $a = 0$ et que $g(a) = 0$. On considère maintenant l'application φ donnée par

$$\varphi(x) = x - g(x) \ .$$

On a alors $D\varphi(0) = 0$, soit $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(0) = 0$ pour tous i, j. Par continuité des dérivées partielles (classe C^1) on obtient qu'il existe $r > 0$ tel que $B_0'(r) \subset U$ et

$$|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x)| \leq \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

pour tout $x \in B_0'(r)$. Avec le théorème des accroissements finis on obtient alors que pour tous $x, y \in B_0'(r)$,

$$\|\varphi(y) - \varphi(x)\| \leq \frac{1}{2}\|y - x\| \ .$$

Comme $\varphi(0) = 0$ on a en particulier que $\varphi\left(B_0'(r)\right) \subset B_0'(r/2)$. Soit $y \in B_0'(r/2)$ fixé quelconque. On note φ_y l'application donnée par $\varphi_y(x) = y + \varphi(x)$. On a

$$\|\varphi_y(x)\| \leq \|y\| + \|\varphi(x)\| \leq \frac{R}{2} + \frac{r}{2} = r$$

pour tout $x \in B_0'(r)$, et donc $\varphi_y\left(B_0'(r)\right) \subset B_0'(r)$. On a aussi par accroissements finis que

$$\begin{aligned}\|\varphi_y(x') - \varphi_y(x)\| &= \|\varphi(x') - \varphi(x)\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|y - x\|\end{aligned}$$

pour tous $x, y \in B_0'(r)$ et φ_y est donc C-contractante avec $C = \frac{1}{2} < 1$. On peut ainsi appliquer le théorème du point fixe et on obtient qu'il existe un unique point fixe x pour φ_y, soit un unique point $x \in B_0'(r)$ tel que $g(x) = y$ puisque $\varphi_y(x) = x$ équivaut à $g(x) = y$. L'application $g : g^{-1}\left(B_0'(r/2)\right) \to B_0'(r/2)$ est donc bijective. Le reste de la preuve consiste à montrer que g^{-1} est de classe C^1 sur un voisinage $B_0(\eta)$ de 0, ce que nous admettrons ici, et qui suffit à conclure pour la première partie du théorème. La seconde partie du théorème tel qu'énoncé est une version globale du théorème. Elle se déduit facilement de la partie locale en remarquant que si f est injective sur U alors f réalise une bijection de U sur $f(U)$. La partie locale impose ensuite que $f(U)$ est ouvert et que f^{-1} est C^1 sur f(U). □

7. Le théorème des fonctions implicites

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^{n+p}$, et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1 définie sur U. On écrit $\mathbb{R}^{n+p}$ sous la forme $\mathbb{R}^{n+p} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, et on écrit les points de $\mathbb{R}^{n+p}$ sous la forme (x, y) avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^p$. Etant donné (a, b) un point de U, on note f_a l'application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ définie par

$$f_a(y) = f(a, y) .$$

On vérifie facilement que le domaine de définition de f_a est un ouvert de $\mathbb{R}^p$. De même, on note f_b l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ définie par

$$f_b(x) = f(x, b) .$$

Là encore, on vérifie facilement que le domaine de définition de f_b est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Puisque f est de classe C^1 sur U, il est clair que f_a et f_b sont aussi de classe C^1 sur leurs domaines de définition respectifs. On note alors $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ la différentielle de f_a au point b, et $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ la différentielle de f_b au point a. On a donc

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = Df_a(b) , \\ \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = Df_b(a) \end{cases}$$

et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ sont respectivement des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ et de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Le théorème des fonctions implicites, objet de ce paragraphe, s'énonce de la façon suivante. Nous reviendrons plus en détail sur ce théorème (et sur sa preuve) lorsque nous traiterons du cas des espaces de Banach.

Théorème 2.13 (Théorème des fonctions implicites). *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^{n+p}$, (a, b) un point de U, et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une fonction de classe C^1 sur U. On suppose que $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \in Isom(\mathbb{R}^p)$. Il existe alors un ouvert V de $\mathbb{R}^{n+p}$ contenant le* *point (a,b) et contenu dans U, il existe un ouvert W de $\mathbb{R}^n$ contenant le point a, et il existe une fonction $g : W \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1 sur W tels que*

(i) $\forall (x,y) \in V$, si $f(x,y) = f(a,b)$ alors $x \in W$ et $y = g(x)$

(ii) $\forall x \in W$, $\big(x, g(x)\big) \in V$ et $f\big(x, g(x)\big) = f(a,b)$.

En particulier, $g(a) = b$. L'application g est de plus unique (au moins au voisinage de a).

Là encore la classe de différentiablilité s'adapte au théorème. Si f est en fait de classe C^k, avec $k \geq 1$, alors g est aussi de classe C^k.

8. Le théorème de Frobenius

Le théorème de Frobenius est un de ces grands théorèmes de la catégorie des théorèmes des Sections 6 et 7. Dans sa forme fonctionnelle il donne une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité locale d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre du type"système de Pfaff". On le donne ici sans preuve, et tel qu'énoncé par exemple dans Spivak [Differential Geometry, Tome 1, Chapitre 6]. Le théorème de Frobenius reçoit plusieurs autres formulations équivalentes et plus géométriques (voir là encore le Spivak). C'est un de ces théorèmes dont il est important de préciser la version à laquelle on fait référence, l'équivalence de ses différentes versions ne sautant pas nécessairement aux yeux. On anticipe là encore sur la notion d'application de classe C^k, $k \geq 2$.

Théorème 2.14 (Théorème de Frobenius - formulation fonctionnelle). *Soit U un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f_i : U \times V \to \mathbb{R}^m$ des applications de classe C^k, $1 \leq k \leq +\infty$. Pour tout $y_0 \in V$ il existe au plus une fonction $\alpha : W \to V$ de classe C^k et définie sur un voisinage ouvert W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ satisfaisant que $\alpha(0) = y_0$ et que*

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}(x) = f_i\left(x, \alpha(x)\right) \tag{2.4}$$

pour tout $x \in W$ et tous $i = 1, \ldots, n$. De plus, on pourra trouver un voisinage ouvert W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et une fonction $\alpha : W \to V$ de classe C^k vérifiant que $\alpha(0) = y_0$ et (2.4) si et seulement si

$$\frac{\partial f_j^\ell}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial f_j^\ell}{\partial x_\alpha} f_i^\alpha = \frac{\partial f_i^\ell}{\partial x_j} + \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial f_i^\ell}{\partial x_\alpha} f_j^\alpha$$

en tout point d'un voisinage ouvert de $(0, y_0)$ dans $U \times V$, pour tous $i, j = 1, \ldots, n$ et tout $\ell = 1, \ldots, m$.

La preuve du Théorème de Frobenius fait appel au Lemme de Poincaré (les formes fermées sont localement exactes) et au théorème des fonctions implicites.

9. Différentielles d'ordre supérieur

On est là encore confronté à une difficulté similaire à celle rencontrée pour parler de classe C^1: l'application différentielle Df n'est pas de même nature que f et on ne peut se borner à dire que f est deux fois différentiable si Df est une fois différentiable puisque l'on ne sait pas (encore) définir la différentiabilité d'une application à valeur $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, sauf à assimiler de façon artificielle $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ à

$\mathbb{R}^{pq}$. Pour simplifier la présentation et éviter l'abondance d'indices on va ici supposer que $q = 1$ (on se restreint donc à parler des fonctions). Mais bien sûr on retiendra que pour $f = (f_1, \dots, f_q)$, la différentiabilité de f, le caractère C^1 de f, la différentiabilité seconde de f, le caractère C^2 de f, etc. équivalent à ce que pour tout $j = 1, \dots, q$ les f_j sont différentiables, de classe C^1, deux fois différentiables, de classe C^2, etc. On passe ainsi "facilement de la théorie $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ à la théorie $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.

DÉFINITION 2.7. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, a un point de Ω, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur Ω. On suppose que pour tout $i = 1, \dots, n$, et tout $x \in \Omega$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existe. Si elle existe, on appelle dérivée partielle seconde de f par rapport à x_i et x_j au point a, et on note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$, la dérivée partielle par rapport à x_i au point a de la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_j}$. Pour tous $i, j = 1, \dots, n$, et tout $a \in \Omega$, on a donc*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)}{\partial x_i}(a) \ .$$

Lorsque $i = j$, on note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ au lieu de $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a)$.

La définition de la différentiabilité seconde suit.

DÉFINITION 2.8. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, a un point de Ω, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur Ω. On dit que f est deux fois différentiable au point a si les dérivées partielles premières de f sont différentiables au point a, autrement dit si pour tout $i = 1, \dots, n$, les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \to \mathbb{R}$ sont différentiables au point a. Si f est deux fois différentiable au point a, la différentielle seconde $D^2 f(a)$ de f au point a est alors (par définition) la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$ définie en tous $h = (h_1, \dots, h_n), k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ par*

$$D^2 f(a).(h, k) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i k_j$$

où les $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ sont les dérivées partielles secondes de f au point a. Par extension, on dit que f est deux fois différentiable sur Ω si f est deux fois différentiable en tout point de Ω.

Pour ce qui est de la définition de la classe C^2 on adopte la définition suivante.

DÉFINITION 2.9. *On dit que f est de classe C^2 sur Ω si les dérivées partielles premières de f sont de classe C^1 sur Ω, autrement dit si pour tout $i = 1, \dots, n$, les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1 sur Ω.*

En vertu de ce qui a été dit sur la classe C^1, une fonction de classe C^2 est bien deux fois différentiable. Comme toujours, si f et g sont deux fois différentiable (resp. de classe C^2) alors $f + g$, fg et $\frac{f}{g}$ si $g \neq 0$ sont aussi deux fois différentiables (resp. de classe C^2). De même, si $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_1}$ et $\Omega' \subset \mathbb{R}^{n_2}$ sont deux ouverts de $\mathbb{R}^{n_1}$ et $\mathbb{R}^{n_2}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^{n_2}$ est une application deux fois différentiable (resp. de classe C^2) sur Ω, $g : \Omega' \to \mathbb{R}^{n_3}$ est une application deux fois différentiable (resp. de classe C^2) sur Ω' et $Im(f) \subset \Omega'$, alors $g \circ f$ est deux fois différentiable (resp. de classe C^2) sur Ω. Pour finir, les applications linéaires de $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ (et donc aussi les fonctions coordonnées) sont de classe C^2.

A priori, étant donnée f une fonction réelle différentiable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et deux fois différentiable en un point a de Ω, f possède n^2 dérivées partielles secondes. En fait, pour des raisons de symétrie, il n'y en a que $n(n+1)/2$. C'est l'objet du théorème de Schwarz. On renvoie au chapitre sur la différentiabilité dans les espaces de Banach pour sa preuve.

THÉORÈME 2.15 (Théorème de Schwarz). *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, a un point de Ω, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur Ω. Si f est deux fois différentiable au point a, alors pour tous $i, j = 1, \dots, n$,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \ .$$

Une autre façon de dire les choses est encore que la différentielle seconde $D^2 f(a)$ de f au point a est symétrique au sens où pour tous $h, k \in \mathbb{R}^n$, $D^2 f(a).(h,k) = D^2 f(a).(k,h)$.

Lorsqu'on passe aux différentielles d'ordre supérieur, et puisqu'on perd la chaine d'hérédité sur les différentielles dans ce contexte, il faut "tricher". La définition propre récupérant une chaine d'hérédité comme dans le cas des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ revient lorsqu'on interprète tout cela dans le contexte des espaces de Banach comme à la Section 14 du Chapitre 4. La notion de dérivée partielle à l'ordre k se définit avec une pseudo chaine d'hérédité en posant que

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}\Big)$$

pour tous $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$, ce que l'on peut encore préférer écrire sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} \ .$$

L'ordre n'a finalement que peu d'importance car le théorème de Schwarz s'étend aux dérivées partielles d'ordre $k \geq 3$. Plus précisément, si f est de classe C^p avec $p \geq k$ alors pour tout $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ et toute permutation σ de $\{1, \dots, k\}$, la dérivée partielle de f correspondant à l'ordre $x_{i_1} \dots x_{i_k}$ est égale à la dérivée partielle correspondant à l'ordre $x_{i_{\sigma(1)}} \dots x_{i_{\sigma(k)}}$.

DÉFINITION 2.10. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur Ω. Soit $k \in \mathbb{N}^\star \bigcup \{+\infty\}$. On dit que f est de classe C^k sur Ω lorsque toutes les dérivées partielles de f jusqu'à l'ordre k inclus (ou toutes les dérivées partielles quelque soit l'ordre si $k = +\infty$) existent et sont continues sur Ω. Si f est à valeurs $\mathbb{R}^p$, elle est dite de classe C^k sur Ω si ses fonctions composantes f_i, $i = 1, \dots, p$, sont toutes de classe C^k sur Ω.*

10. Formules de Taylor

On discute ici la formule de Taylor à l'ordre deux pour les fonctions de plusieurs variables réelles. L'ordre n est abordé à la Section 14 du Chapitre 4.

THÉORÈME 2.16 (Formule de Taylor à l'ordre 2). *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, a un point de Ω,et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction réelle différentiable sur Ω et deux fois différentiable au point a. Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, avec $\|h\|$ petit,*

$$f(a+h) = f(a) + Df(a).(h) + \frac{1}{2} D^2 f(a).(h,h) + \|h\|^2 \epsilon(h)$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est une fonction qui vaut* 0 *en* 0 *et qui tend vers* 0 *en* 0.

Démonstration. On suppose pour simplifier la preuve que f est C^2. La formule à démontrer équivaut à

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|^2}\left(f(a+h) - f(a) - Df(a).(h) - \frac{1}{2}D^2f(a).(h,h)\right) = 0 \ .$$

Considérons $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction $g(t) = f\,(a+th)$. On a $g'(t) = Df(a+th).(h)$ et $g''(t) = D^2f(a+th).(h,h)$. La formule de Taylor-Lagrange dans le cas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Chapitre 1) donne pour tout h petit l'existence d'un $t_h \in]0,1[$ tel que

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(t_h) \ .$$

Par suite,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\|h\|^2}\left| f(a+h) - f(a) - Df(a).(h) - \frac{1}{2}D^2f(a).(h,h)\right| \\ &= \frac{1}{2\|h\|^2}\left|\left(D^2f(a+t_hh) - D^2f(a)\right)(h,h)\right| \\ &\leq C\sum_{i,j}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+t_hh) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right| \ , \end{aligned}$$

où $C > 0$ est indépendante de h, et puisque les $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ sont supposées continues, et $a + t_hh \to a$ lorsque $h \to 0$ ($|t_h| \leq 1$ et donc $t_hh \to 0$ lorsque $h \to 0$), on voit que

$$\frac{1}{\|h\|^2}\left| f(a+h) - f(a) - Df(a).(h) - \frac{1}{2}D^2f(a).(h,h)\right| \to 0$$

lorsque $h \to 0$. Le théorème est démontré. □

11. Problèmes d'extremums

Comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle, on cherche ici des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction de plusieurs variables réelles ait un extrémum. La théorie est locale comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle.

Théorème 2.17 (Condition nécessaire 1). *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$ *un point de* Ω *et* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction. Si* f *admet un extremum local en* a *et si* f *est différentiable en* a *alors* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ *pour tout* $i = 1, \ldots, n$ *(ce qui revient encore à dire que* $Df(a) \equiv 0$ *en tant qu'application linéaire de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$*). En d'autres termes, les extremums locaux d'une fonction différentiable sont des points critiques de cette fonction.*

Démonstration. Sous les hypothèses du théorème, les fonctions partielles f_a^i sont dérivables en a_i et admettent un extremum local en a_i. Donc, d'après le Théorème 1.15, $(f_a^i)'(a_i) = 0$, ce qui revient à dire que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$. Le théorème est démontré. □

On passe maintenant aux dérivées secondes.

THÉORÈME 2.18 (Condition nécessaire 2). *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$ un point de Ω et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur Ω et deux fois différentiables en a. Si f admet un minimum local en a alors $D^2f(a) \geq 0$ au sens des formes bilinéaires et si f admet un maximum local en a alors $D^2f(a) \leq 0$ au sens des formes bilinéaires.*

Dire que $D^2f(a) \geq 0$ au sens des formes bilinéaires signifie que $D^2f(a).(h,h) \geq 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, et dire que $D^2f(a) \leq 0$ au sens des formes bilinéaires signifie que $D^2f(a).(h,h) \leq 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.

DÉMONSTRATION. Si f admet un extremum local au point a, on sait avec le Théorème 2.17 que a est un point critique de f. Il suit de cette remarque et de la formule de Taylor à l'ordre 2 de f au point a que pour tout h,

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}D^2f(a).(h,h) + \|h\|^2\epsilon(h) \ .$$

Soit alors h donné, et soit t un réel strictement positif. On écrit que

$$\begin{aligned} f(a+th) - f(a) &= \frac{1}{2}D^2f(a).(th,th) + \|th\|^2\epsilon(th) \\ &= \Big(\frac{1}{2}D^2f(a).(h,h) + \|h\|^2\epsilon(th)\Big)t^2 \ . \end{aligned}$$

Si maintenant f admet un minimum local au point a, on obtient que pour $t > 0$, t petit,

$$\frac{1}{2}D^2f(a).(h,h) + \|h\|^2\epsilon(th) \geq 0 \ .$$

En faisant tendre t vers 0 dans cette inégalité, et puisque par propriété de la fonction ϵ, $\lim_{t\to 0} \epsilon(th) = 0$, on obtient que $D^2f(a).(h,h) \geq 0$. Soit $D^2f(a) \geq 0$ au sens des formes bilinéaires puisque h est quelconque. Le raisonnement est bien sûr de même nature si f admet un maximum local au point a. On récupère dans ce cas que $D^2f(a).(h,h) \leq 0$. Le théorème est démontré. $\square$

Pour passer à la condition suivante nous avons besoin du lemme suivant.

LEMME 2.1. *Soit $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction qui pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ s'écrit sous la forme*

$$Q(h) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}h_ih_j$$

où les a_{ij} sont des réels. On suppose que pour tout $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $Q(h) > 0$. Il existe alors un réel $K > 0$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $Q(h) \geq K\|h\|^2$.

DÉMONSTRATION. Notons S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$S = \{h \in \mathbb{R}^n \ / \ \|h\| = 1\} \ .$$

Alors S est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$, donc un compact de $\mathbb{R}^n$. Par ailleurs, la fonction Q est continue sur $\mathbb{R}^n$, et donc en particulier sur S. Puisque toute fonction continue sur un compact est bornée est atteint ses bornes, il s'ensuit qu'il existe $h_0 \in S$ tel que pour tout $h \in S$, $Q(h) \geq Q(h_0)$. On pose $K = Q(h_0)$. Comme Q est supposée strictement positive en tout point différent de 0, K est strictement positif. On remarque par ailleurs que pour tout $t \in \mathbb{R}$, et tout $h \in \mathbb{R}^n$, $Q(th) = t^2 Q(h)$. Pour $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ on pourra ainsi écrire que

$$Q(h) = Q\left(\|h\|\left(\frac{1}{\|h\|}h\right)\right) = \|h\|^2 Q\left(\frac{1}{\|h\|}h\right) \geq K\|h\|^2$$

puisque $\frac{1}{\|h\|}h \in S$. Le lemme est démontré. □

On aurait aussi pu démontrer ce résultat en utilisant Sylvester et l'équivalence des normes dans $\mathbb{R}^n$. La condition suffisante d'extremum local est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.19 (Condition suffisante). *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, a un point de Ω, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur Ω et deux fois différentiable au point a. On suppose que a est un point critique de f. Si pour tout $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $D^2 f(a).(h,h) > 0$ (resp. pour tout $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $D^2 f(a).(h,h) < 0$) alors f admet un minimum local strict (resp. un maximum local strict) au point a.*

Démonstration. On traite du cas des minimums sachant que celui des maximums en découle en changeant f en $-f$. D'après le lemme précédent, il existe $K > 0$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$D^2 f(a).(h,h) \geq K\|h\|^2 \ .$$

On écrit avec la formule de Taylor à l'ordre deux pour f au point a que

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \frac{1}{2} D^2 f(a).(h,h) + \|h\|^2 \epsilon(h) \\ &\geq \|h\|^2 \left(\frac{K}{2} + \epsilon(h)\right) \ . \end{aligned}$$

Par propriété de la fonction ϵ, il existe alors un $\eta > 0$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, si $\|h\| < \eta$, $|\epsilon(h)| \leq K/4$. Il s'ensuit que pour h tel que $\|h\| < \eta$,

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{K}{4}\|h\|^2 \ .$$

En écrivant $x = a + h$, on en déduit qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour $x \in B_a(\eta) \backslash \{a\}$, $f(x) > f(a)$. D'où le résultat. □

CHAPITRE 3

Espaces vectoriels normés, de Banach et de Hilbert

On discute dans ce chapitre de la théorie des espaces vectoriels normés réels. Par définition, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est un ensemble muni de deux lois $+$ et $\times$. La loi $+$ est interne (on additionne deux éléments de E pour récupérer un élement de E). La loi $\times$ est externe (à $(t, x) \in \mathbb{R} \times E$ on associe tx dans E). On demande que ces opérations vérifient que:

(0) $(E, +)$ est un groupe commutatif;
(i) (Distributivité de $\times$ par rapport à $+$ dans $\mathbb{R}$) $\forall t, t' \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $(t + t')x = tx + t'x$;
(ii) (Distributivité de $\times$ par rapport à $+$ dans E) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x, x' \in E$, $t(x + x') = tx + tx'$;
(iii) (Associativité dans $\mathbb{R}$) $\forall t, t' \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $t(t'x) = (tt')x$;
(iv) (Neutralité) $\forall x \in E$, $1 \times x = x$.

Le vecteur nul de E est l'élément neutre de $+$. On vérifie facilement que
(P1) $\forall x \in E$, $0 \times x = 0$;
(P2) $\forall x \in E$, $(-1) \times x = -x$ (l'inverse de x pour $+$);
(P3) $\forall t \in \mathbb{R}$, $t \times 0 = 0$;
(P4) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $tx = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $x = 0$.

En bref, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est un ensemble E muni d'une addition qui permet d'additionner ces éléments entres eux (comme on le fait dans $\mathbb{R}^n$), et d'une loi externe qui permet de multiplier les éléments de E par des réels (comme on le fait dans $\mathbb{R}^n$).

1. Normes et distances associées

La norme est ce qui mesure la longueur des vecteurs.

Définition 3.1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une norme N sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie:*

(1) $\forall x \in E$, $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(2) (inégalité triangulaire) $\forall x, y \in E$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$,

(3) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

Une norme $N(x)$ se note le plus souvent $\|x\|$, et on dit que le couple $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

Une notion plus fine que la notion de norme est celle de produit scalaire.

Définition 3.2. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une application $B : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E si elle est bilinéaire, symétrique, définie, et positive. A savoir si:*

(1) (bilinéarité) Pour tout $x \in E$ l'application $y \to B(x,y)$ est linéaire sur E, et pour tout $y \in E$, l'application $x \to B(x,y)$ est linéaire sur E,
(2) (symétrique) $\forall x, y \in E$, $B(x,y) = B(y,x)$,
(3) (définie positive) $\forall x \in E$, $B(x,x) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.

On note souvent $\langle x, y\rangle$ au lieu de $B(x,y)$, et le couple $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ constitué d'un espace vectoriel et d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien.

Il y a une hiérarchie entre produit scalaire et norme donnée par le théorème suivant.

Théorème 3.1. *A tout produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est associé une norme $\|\cdot\|$ par*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

pour tout $x \in E$. Produit scalaire et norme associée vérifient l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$ pour tous $x, y \in E$. Il y a de plus égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration. On commence par montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Soient x, y fixés quelconques. On peut supposer que $x \neq 0$ et $y \neq 0$ car sinon l'inégalité à démontrer est triviale. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\langle x+ty, x+ty\rangle \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x + ty = 0$. On a

$$\langle x + ty, x + ty\rangle = t^2\|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle t + \|x\|^2 \ .$$

Ce polynôme du second degré ($y \neq 0$) ne change pas de signe. Il a donc au plus une racine réelle. Son discriminant Δ est donné par $\Delta = 4\left(\langle x, y\rangle^2 - \|x\|^2\|y\|^2\right)$. Donc, nécessairement $\Delta \leq 0$, soit

$$\langle x, y\rangle^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$$

et on a là l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Clairement, si x et y sont colinéaires il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Réciproquement, s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz (et $y \neq 0$) alors $\Delta = 0$. Donc notre polynôme du second degré a une racine t_0. Mais par suite $\langle x + t_0y, x + t_0y\rangle = 0$ et donc x et y sont colinéaires. Si $y = 0$ n'importe quel vecteur x est colinéaire à y et on a donc caractérisé le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz. Reste maintenant à montrer que $\|\cdot\|$ est bien une norme. Les propriétés (1) et (3) des normes sont automatiquement satsifaites. Seule l'inégalité triangualire est vraiment a démontrer. On écrit ici que

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \times \|y\| \quad \text{(par Cauchy-Schwarz)} \\
&\leq (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

et on a donc bien que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, à savoir la propriété (2) des normes, l'inégalité triangulaire. Le théorème est démontré. $\square$

Soit X un sous ensemble d'un espace préhilbertien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, par exemple $X = F$ avec F sous espace vectoriel de E. L'othogonal $X^\perp$ de X est alors défini comme étant l'espace des $x \in E$ qui sont tels que $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout $y \in X$. Donc, pour $X \subset E$, on pose $X^\perp = \{x \in E \ / \ \forall y \in X, \langle x, y\rangle = 0\}$.

THÉORÈME 3.2. *L'orthogonal $X^\perp$ d'un sous ensemble $X \subset E$ d'un espace préhilbertien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est toujours un sous espace vectoriel de E.*

DÉMONSTRATION. Clairement $0 \in X^\perp$ et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $x, x' \in X^\perp$ alors

$$\begin{aligned}\langle \lambda x + \mu x', y\rangle &= \lambda\langle x, y\rangle + \mu\langle x', y\rangle \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

pour tout $y \in X$. Donc $X^\perp$ est bien un sous espace vectoriel de E. □

2. Topologie dans les espaces vectoriels normés

Soit X un ensemble quelconque. Une distance sur X, nous reviendrons sur la notion dans le chapitre sur la topologie, ainsi que sur les autres notions de topologie traitées ici, est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ qui vérfie les propriétés suivantes:

(1) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(2) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$,
(3) (inégalité triangulaire) $\forall x, y, z,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Le couple (X, d) constitué d'un ensemble et d'une distance est appelé espace métrique. On a alors le résultat suivant.

THÉORÈME 3.3. *Tout espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ possède une structure naturelle d'espace métrique (E, d), la distance d associée à la norme étant définie par*

$$d(x, y) = \|y - x\|$$

pour tous $x, y \in E$.

DÉMONSTRATION. Les propriétés (1) et (2) des distances suivent des propriétés (1) et (3) des normes. Pour ce qui est de l'inégalité triangulaire on utilise l'inégalité triangulaire des normes pour écrire que

$$\begin{aligned}d(x, z) &= \|z - x\| \\ &= \|(z - y) + (y - x)\| \\ &\leq \|z - y\| + \|y - x\| \\ &\leq d(y, z) + d(x, y)\end{aligned}$$

pour tous $x, y, z \in E$, ce qui démontre l'inégalité triabgulaire des distances, soit la propriété manquante (3). Le théorème est démontré. □

Dès lors que (E, d) est un espace métrique, on récupère plusieurs notions sur E comme celles de boules ouvertes et fermées, d'ouverts, de fermés, de suites convergentes et de Cauchy, d'application continue, etc. Si a est un point de E, et si $r > 0$ est un réel strictement positif, on définit les boules ouvertes et fermées de centre a et de rayon r par

$$B_a(r) = \{x \in E \text{ t.q. } d(a, x) < r\}$$

et $\overline{B}_a(r) = \{x \in E \text{ t.q. } d(a, x) \leq r\}$. On a alors la définition suivante des ouverts et fermés.

Définition 3.3. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et d la distance associée à $\|\cdot\|$. On dit qu'un sous ensemble $\Omega \subset E$ de E est un ouvert de E si pour tout point $a \in \Omega$, il existe $r = r_a$ strictement positif, tel que $B_a(r) \subset \Omega$, où $B_a(r)$ est la boule ouverte de centre a et de rayon r définie ci-dessus. On dit qu'un sous ensemble $F \subset E$ est un fermé de E si $E \backslash F$ est un ouvert de E.*

Par convention $\emptyset$ et E sont à la fois ouverts et fermés. En langage intuitif, qui peut être rendu précis: (i) un ouvert est un ensemble qui ne contient aucun des points de sa frontière, et (ii) un fermé est un ensemble qui contient tous les points de sa frontière. Un ensemble peut donc n'être ni ouvert ni fermé.

Définition 3.4. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et d la distance associée à $\|\cdot\|$. Soit (x_n) une suite de points de E. On dit que $(x_n)_n$ converge vers un point x de E, sous entendu pour la distance d ou pour la norme $\|\cdot\|$, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N, d(x_n, x) < \varepsilon \ .$$

On dit que x est la limite de la suite (x_n) (elle est forcément unique). Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible avec le choix d'une norme, on note $x_n \to x$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$.

L'unicité s'obtient très facilement avec l'inégalité triangulaire. Si (x_n) avait deux limites différentes x et x', comme $d(x, x') \leq d(x_n, x) + d(x_n, x')$ par inégalité triangulaire, on devrait avoir que $d(x, x') = 0$, ce qui constitue une contradiction avec $x' \neq x$. Les fermés sont caractérisés par la propriété suivante:

Théorème 3.4. *Un sous ensemble F de E est un fermé de E si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de points de F, si $(x_n)_n$ converge dans E, alors sa limite x est forcément dans F.*

En remarquant (l'argument est intuitif mais il peut être rendu précis) que tout point de la frontière d'un patatoïde peut s'écrire comme limite d'une suite de points intérieurs, ce lemme signifie juste que l'ensemble possède bien tous les points de sa frontière.

Démonstration. Supposons tout d'abord que F est un fermé de E, et soit (x_n) une suite de points de F qui converge dans E vers un point x. On veut montrer que $x \in F$. Par l'absurde, si $x \notin F$, alors $x \in E \backslash F$, et comme F est un fermé, $E \backslash F$ est un ouvert. Par définition d'un ouvert, il existe alors $r > 0$ tel que $B_x(r) \subset E \backslash F$. Or par définition de la convergence de (x_n) vers x, il doit exister N tel que $x_n \in B_x(r)$ pour $n \geq N$. Mais comme $x_n \in F$ et $B_x(r) \subset E \backslash F$, on obtient une contradiction. A l'inverse, supposons que pour toute suite (x_n) de points de F, si (x_n) converge vers un point x dans E, alors $x \in F$. On veut montrer qu'alors F est un fermé de E. La encore, on raisonne par l'absurde. Si F n'est pas un fermé de E, donc si $E \backslash F$ n'est pas un ouvert de E, alors il existe $x \in E \backslash F$ avec la propriété que pour tout $r > 0$, $B_x(r) \cap F \neq \emptyset$. On pose $r = 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, et on fait varier n. On obtient alors une suite (x_n) de points de F telle que $d(x_n, x) \leq 1/n$ pour tout $n \geq 1$. Donc, par définition même, (x_n) converge vers x et, là encore, on récupère une contradiction. Le théorème est démontré. $\square$

On aborde maintenant la notion d'application continue entre espaces vectoriels normés. La notion de limite d'une fonction en un point s'entend comme dans le cas $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, d_E la distance associée à $\|\cdot\|_E$, et d_F la distance associée a $\|\cdot\|_F$. Soient aussi $X \subset E$ un sous ensemble de E, a un point de X, et $f : X \to F$ une application définie sur X et à valeurs dans F. On dira que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque $x \to a$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \;/\; \forall x \in X,\ 0 < d_E(a,x) < \delta \Rightarrow d_F\big(f(x), \ell\big) < \varepsilon\ .$$

Les limites sont toujours par valeurs différentes. Là encore, il suit de l'inégalité triangulaire que la limite, lorsqu'elle existe, est unique.

DÉFINITION 3.5. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, d_E la distance associée à $\|\cdot\|_E$, et d_F la distance associée a $\|\cdot\|_F$. Soient aussi $X \subset E$ un sous ensemble de E, a un point de X, et $f : X \to F$ une application définie sur X et à valeurs dans F. On dit que f est continue au point a, sous entendu pour les distances d_E et d_F, ou pour les normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$, si l'une des trois propriétés équivalentes suivantes est vérifiée:*

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \;/\; \forall x \in X,\ d_E(a,x) < \delta \Rightarrow d_F\big(f(a), f(x)\big) < \varepsilon$,

(iii) pour toute suite $(x_n)_n$ de points de X vérifiant que $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$, on a forcément que $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$.

Par extension, on dit que f est continue sur X si f est continue en tout point de X.

L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) suit du fait que (ii) n'est rien d'autre que la définition mathématique de (i), sachant que si $\ell = f(a)$ alors il est inutile d'exiger que $x \neq a$ dans la définition de la limite puisque $0 < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iii) se démontre comme dans le cas réel en remplaçant les valeurs absolues de $\mathbb{R}$ par les distances ou les normes des espaces E et F.

Une remarque simple mais importante est la suivante: si $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, alors l'application norme de E dans $\mathbb{R}$, qui à x associe $\|x\|$, est continue sur E. On le voit en remarquant que $\big|\|y\| - \|x\|\big| \leq \|y - x\|$, soit encore que $\big|\|y\| - \|x\|\big| \leq d(x,y)$ où d est la distance associée à $\|\cdot\|$. (l'application est même lipschitzienne). On a pour en finir avec ces généralités que le théorème suivant a lieu.

THÉORÈME 3.5. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ trois espaces vectoriels normés, X est un sous ensemble de E, Y est un sous ensemble de F tel que $f(X) \subset Y$ et $a \in X$ un point de X. Si $f : X \to F$ est continue en a, et si $g : Y \to G$ est continue en $f(a)$, alors $g \circ f : X \to G$ est continue en a.*

DÉMONSTRATION. On emboite les formules de continuité. Par définition,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \;/\; \forall x \in X,\ d_E(a,x) < \delta \Rightarrow d_F\big(f(a), f(x)\big) < \varepsilon \tag{3.1}$$

et

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists \delta' > 0 \;/\; \forall y \in Y,\ d_F\left(f(a), y\right) < \delta' \Rightarrow d_G\big(g\left(f(a)\right), g(y)\big) < \varepsilon'\ . \tag{3.2}$$

On fixe $\varepsilon' > 0$, puis on choisit $\varepsilon = \delta'$ avec les notations des formules (3.1)-(3.2). On obtient avec (3.1) un $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in X$,

$$d_E(a,x) < \delta \Rightarrow d_F\big(f(a), f(x)\big) < \delta'$$

et en appliquant ensuite (3.2), on obtient que

$$d_E(a,x) < \delta \Rightarrow d_G\big(g\,(f(a))\,, g\,(f(x))\big) < \varepsilon'\ .$$

Au final on a donc montré que

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists \delta > 0\ /\ \forall x \in X,\ d_E(a,x) < \delta \Rightarrow d_G\big(g\,(f(a))\,, g\,(f(x))\big) < \varepsilon'\ ,$$

et $g \circ f$ est donc bien continue au point a. D'où le théorème. □

3. Compacité et dimension

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit $K \subset E$ un sous ensemble de E. On appelle recouvrement ouvert de K toute famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E telle que $K \subset \bigcup_{i\in I}\Omega_i$. La définition formelle des compacts est la suivante.

DÉFINITION 3.6. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, et soit $K \subset E$ un sous ensemble de E. Par définition, K est un compact de E si de tout recouvrement ouvert de K on peut extraire un sous recouvrement qui soit fini.*

En d'autres termes, $K \subset E$ est un compact de E si pour tout recouvrement ouvert $(\Omega_i)_{i\in I}$ de K, il existe un sous ensemble fini $\{i_1, \dots, i_p\} \subset I$ tel que $K \subset \bigcup_{j=1}^p \Omega_{i_j}$. Un théorème important en topologie est le suivant, dit de Bolzano-Weierstrass (ici énoncé dans le cas des espaces vectoriels normés, mais il possède une version topologique).

THÉORÈME 3.6 (Théorème de Bolzano-Weierstrass). *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, et soit $K \subset E$ un sous ensemble de E. Alors K est un compact de E si et seulement si toute suite de points de K possède une sous suite qui converge dans K.*

En d'autres termes, $K \subset E$ est un compact de E si pour toute suite $(x_n)_n$ de points de K, il existe $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$, et il existe $x \in K$, tels que $x_{\varphi(n)} \to x$ lorsque $n \to +\infty$ (la notation $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ signifie "application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$").

DÉMONSTRATION. Supposons que K est un compact. Soit (x_n) une suite de points de K. S'il existe $x \in K$ tel que pour tout r on peut trouver une infinité de x_n dans $B_x(r)$, alors on construit facilement une sous suite de (x_n) convergent vers x. Et réciproquement, s'il existe une sous suite de (x_n) qui converge, alors sa limite vérifie cette propriété. On raisonne par l'absurde et on suppose que pour tout $x \in K$ il existe $r_x > 0$ qui est tel que $B_x(r_x)$ ne contient qu'un nombre fini de x_n. La famille des $B_x(r_x)$ pour $x \in K$ est un recouvrement ouvert de K. On peut donc en extraire un sous recouvrement fini par compacité. Mais alors la suite (x_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs. L'une de ces valeurs est prise une infinité de fois, et pour x cette valeur, $B_x(r)$ contient une infinité de x_n pour tout $r > 0$. Une contradiction. Au final on a montré que si K est compact alors toute suite (x_n) de points de K possède une sous suite convergente. Récirpoquement, on suppose que toute suite (x_n) de points de K possède une sous suite convergente. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de K. On prétend que la propriété suivante est vraie:

$$\exists r > 0\ /\ \forall x \in K, B_x(r) \subset U_i \text{ pour au moins un } i\ . \tag{3.3}$$

On montre (3.3) par contradiction. Soit (r_n) une suite de réels strictement positifs convergent vers 0. Par exemple $r_n = 2^{-n}$. Par contradiction de (3.3), pour tout n il existe $x_n \in K$ tel que $B_x(r) \not\subset U_i$ pour tout $i \in I$. La suite (x_n) est une suite de points de K. Il existe donc une sous suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) qui converge. Soit x sa limite. Il existe $i_0 \in I$ qui est tel que $x \in U_{i_0}$. Soit $r_0 > 0$ tel que $B_x(r_0) \subset U_{i_0}$. Pour $n \gg 1$, $B_{x_{\varphi(n)}}(r_{\varphi(n)}) \subset B_x(r_0)$ puisque $x_{\varphi(n)} \to x$ et $r_{\varphi(n)} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Or les $B_{x_{\varphi(n)}}(r_{\varphi(n)})$ sont censées n'être contenues dans aucun des U_i. Une contradiction et (3.3) est vraie. On montre maintenant la propriété suivante

$$\exists a_1, \dots, a_p \in K \ / \ K \subset \bigcup_{j=1}^{p} B_{a_j}(r) \ , \tag{3.4}$$

où $r > 0$ est donné par (3.3). Là encore on raisonne par l'absurde. On suppose que pour tout n, et toute famille $a_1, \dots, a_n$ de points de K, $K \not\subset \bigcup_{j=1}^n B_{a_j}(r)$ et donc que pour tout n, et toute famille $a_1, \dots, a_n$ de points de K, il existe un point $a_{n+1} \notin \bigcup_{j=1}^n B_{a_j}(r)$. Par récurrence on construit une suite (a_n) qui est telle que $a_{n+1} \notin \bigcup_{j=1}^n B_{a_j}(r)$ pour tout n. Cette suite devrait posséder une sous suite convergente $(a_{\phi(n)})$. On pourrait alors rendre $d(a_{\phi(n)}, a_{\phi(n+1)})$ aussi petit que l'on veut pour $n \gg 1$. Or $d(a_{\phi(n)}, a_{\phi(n+1)}) \geq r$ car $a_{\varphi(n+1)} \notin B_{a_{\varphi(n)}}(r)$, une contradiction. Ainsi (3.4) est démontrée. Soit $i_j \in I$ tel que $B_{a_j}(r) \subset U_{i_j}$ pour tout $j = 1, \dots, p$, où les A_j sont donnés par (3.4) et l'existence de i_j est donnée par (3.3). On a alors avec (3.4) que $K \subset \bigcup_{j=1}^p U_{i_j}$ et donc, de tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de K on peut extraire un sous recouvrement fini. Ainsi K est compact. Le théorème de Bolzano-Weierstrass est démontré. $\square$

Une conséquence immédiate du Bolzano-Weierstrass est que tout compact est forcément fermé et borné. En effet si K est un compact et si (x_n) est une suite de K qui converge vers un x dans E, alors comme (x_n) va posséder une sous suite convergente dans K par Bolzano-Weierstrass, et que les limites d'une sous suite d'une suite convergente et de la suite convergente elle-même sont les mêmes, on obtient que $x \in K$. On rejoint la caractérisation des fermés par les suites. Donc K est fermé. De même, si K n'était pas borné il existerait une suite (x_n) de points de K avec $\|x_n\| \to +\infty$. Or, par Bolzano-Weierstrass, il existe $(x_{\varphi(n)})$ une sous suite convergente de (x_n). Si x est sa limite, $\|x_{\varphi(n)}\| \to \|x\|$ lorsque $n \to +\infty$. Or la suite des $\|x_{\varphi(n)}\|$ est une sous suite de la suite des $\|x_n\|$. Elle devrait donc avoir $+\infty$ pour limite. Une contradiction. Ainsi K est forcément borné.

Plusieurs propriétés importantes se rattachent à la notion de compacité. Parmi les résultats célèbres on citera le théorème de Weierstrass (l'image d'un compact par une application continue est un compact), et le théorème de Tychonoff (tout produit d'espaces compacts est compact). On pourra encore montrer le théorème suivant, déjà rencontré dans les chapitres précédents.

Théorème 3.7. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, et soit $K \subset E$ un sous ensemble compact de E. Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur K. Alors f est bornée et elle atteint ses bornes.*

Démonstration. Que f soit bornée, à savoir qu'il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in K$, suit facilement du théorème de Weierstrass (un compact de $\mathbb{R}$ est forcément borné). Montrons maintenant que f atteint son minimum (la démonstration pour le maximum est identique, ou on peut changer f en $-f$). Soit

$$m = \inf_{x \in K} f(x)$$

la borne inférieure de l'ensemble $\{f(x), x \in K\}$. Par définition, m est le plus grand des minorants de cet ensemble et donc:

(i) $\forall x \in K$, $m \leq f(x)$, et
(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in K \ / \ m \leq f(x) \leq m + \varepsilon$.

On pose $\varepsilon = 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On obtient ainsi l'existence d'un $x_n \in K$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$,

$$m \leq f(x_n) \leq m + \frac{1}{n} \ .$$

Donc $f(x_n) \to m$ lorsque $n \to +\infty$. Comme K est un compact, il existe $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge. Notons x sa limite. Une sous suite d'une suite convergente étant convergente et de même limite, on a encore que $f(x_{\varphi(n)}) \to m$ lorsque $n \to +\infty$. Par continuité de f en x il s'ensuit que $f(x) = m$. Le théorème est démontré. $\square$

Même remarque qu'aux chapitres précédents, un autre résultat fréquemment associé à la compacité est que toute application continue sur un compact y est uniformément continue. Par contre, le fait que les compacts soient précisément les fermés bornés cesse d'être vrai dès qu'on rentre dans le monde de la dimension infinie. Les compacts seront bien toujours des fermés bornés (voir ci-dessus), mais la réciproque devient fausse si le compact est d'intérieur non vide. C'est l'objet du second théorème de Riesz qui suit.

Théorème 3.8 (Second théorème de Riesz). *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé, et soit* $B' = \overline{B}_0(1)$ *la boule fermée de* E *de centre* 0 *et rayon* 1. *Alors* E *est de dimension finie si et seulement si* B' *est un compact de* E.

Bien sûr le résultat restre valable si on remplace B' par n'importe quelle boule fermée $\overline{B}_a(r)$. En particulier tout compact dans un espace vectoriel normé de dimension infinie est d'intérieur vide (i.e ne contient aucune boule ouverte du type $B_a(r)$, $r > 0$). La preuve que l'on propose passe à l'identique dans le cas des espaces métriques. Nous reviendrons dessus dans le chapitre sur la topologie.

Démonstration. On montre que les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les fermés bornés de cet espace. En dimension finie n l'espace est homéomorphe (et même isomorphe) à $\mathbb{R}^n$ et, dans $\mathbb{R}^n$, les compacts sont précisemment les fermés bornés (ce qui se démontre par extractions successives de sous suites en utilisant le fait que les suites réelles bornées possèdent des sous suites convergentes). On utilise ici (cf. plus loin), que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. En particulier, si E est de dimension finie, alors B' est compacte. Réciproquement, supposons que B' est un compact de E. On veut montrer que E est de dimension finie. Pour cela, on commence par remarquer que $\left(B_a(\frac{1}{2})\right)_{a \in B'}$ est un recouvrement ouvert de B'. Par suite, et puisque B' est supposé compact, il existe des $a_1, \ldots, a_n \in B'$ tels que

$$B' \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{a_i}(\frac{1}{2}) \ .$$

Notons F le sous espace vectoriel de E engendré par les a_i, $F = \mathrm{Vect}(a_1, \ldots, a_n)$. Clairement, F est de dimension finie, puisque par construction, $(a_1, \ldots, a_n)$ est une famille génératrice de F. On va montrer que $E = F$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $F \neq E$. Il existe alors $x \in E \backslash F$. Notons

$$\alpha = \inf_{y \in F} \|x - y\| \ .$$

Puisque F est de dimension finie, il existe $\tilde{x} \in F$ tel que $\alpha = \|x - \tilde{x}\|$ (les fermés bornés dans F sont compacts). En particulier, $\alpha > 0$. Soit maintenant $y \in F$ tel que

$$\alpha \leq \|x - y\| \leq \frac{3\alpha}{2}$$

et soit $z = \frac{1}{\|x-y\|}\big(x - y\big)$. Alors $z \in B'$, et il existe ainsi $i \in \big\{1, \dots, n\big\}$ pour lequel $z \in B_{a_i}(\frac{1}{2})$. On remarque maintenant que

$$y' = y + \|x - y\| a_i$$

appartient à F, et que

$$x = y + \|x - y\| z \ .$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \alpha &\leq \|x - y'\| \\ &= \|x - y\|.\|z - a_i\| \\ &\leq \frac{3\alpha}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3\alpha}{4} < \alpha \end{aligned}$$

et on obtient donc une contradiction. Il s'ensuit que $E = F$. En particulier, E est de dimension finie. D'où le théorème. $\square$

4. Espaces de Banach et de Hilbert

La notion, de suite de Cauchy (une suite qui s'écrase sur elle-même) est au centre de la notion de complétude.

Définition 3.7. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et d la distance associée à $\|\cdot\|$. Soit aussi $(x_n)_n$ une suite de points de E. On dit que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy, sous entendu pour la distance d ou pour la norme $\|\cdot\|$, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ t.q. \ \forall p, q \geq N, d(x_p, x_q) < \varepsilon \ .$$

En d'autres termes une suite $(x_n)_n$ est de Cauchy si les x_n s'accumulent les uns sur les autres quand $n \to +\infty$.

Une remarque simple est qu'une suite convergente est toujours de Cauchy. Il suffit pour le voir d'écrire que

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x) + d(x_q, x) \ ,$$

où x est la limite de la suite. Si les x_n s'accumulent sur un point x, alors ils s'accumulent les uns sur les autres.

Définition 3.8. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé complet, ou encore un espace de Banach, si toute suite de Cauchy dans E pour $\|\cdot\|$ converge dans E pour $\|\cdot\|$. Si la norme provient d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on dit que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert.*

Des exemples d'espaces de Banach et de Hilbert sont:

Ex.1: L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien $\langle x, y\rangle = \sum_i x_i y_i$ est un espace de Hilbert.

Ex.2: L'espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ constitué des suites réelles $(x_n)_n$ pour lesquelles la série $\sum x_n^2$ converge, muni du produit scalaire $\langle (x_n)_n, (y_n)_n\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$, est un espace de Hilbert.

Ex.3: Si (X, d) est un espace métrique, l'espace $C_B^0(X)$ des fonctions réelles continues et bornées sur X, muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_{C^0} = \sup_{x\in X} |f(x)|$, est un espace de Banach.

Pour démontrer qu'un espace est un Banach on se ramène à un espace dont on sait qu'il est complet, ce qui implique la convergence, mais dans une norme plus faible, et on utilise le fait que la suite est de Cauchy dans la norme de départ pour montrer que la convergence a lieu en fait dans cette même norme de départ. Dans l'exemple 3 par exemple si (f_n) est de Cauchy pour $\|\cdot\|_{C^0}$, alors pour tout $x \in X$, $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Il y a donc convergence simple de la suite (f_n) sur X puisque $\mathbb{R}$ est complet. On obtient ainsi un candidat limite $f : X \to \mathbb{R}$. Reste à montrer que f est bien continue et bornée pour avoir que $f \in C_B^0(X)$, et à montrer que (f_n) converge vers f pour $\|\cdot\|_{C^0}$. Tout ceci se montre en utilisant le fait que $(F - n)$ est de Cauchy pour $\|\cdot\|_{C^0}$. A l'inverse, il est bien sûr des espaces qui ne sont pas de Banach. Ces espaces sont forcèment de dimension infinie (comme on le verra plus tard).

Définition 3.9. *Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un espace vectoriel E sont équivalentes s'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que*

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1$$

pour tout $x \in E$.

On vérifie facilement que l'équivalence des normes présèrvent les notions de

(1) suites convergentes et limites,

(2) suites de Cauchy.

En particulier, si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes, alors $(E, \|\cdot\|_1)$ est un Banach si et seulement si $(E, \|\cdot\|_2)$ est un Banach. Plus généralement, deux normes équivalentes induisent deux distances équivalentes (même type de définition, l'un contrôle l'autre et réciproquement) et présèrvent la topologie.

Théorème 3.9. *Sur un espace vectoriel réel de dimension finie, deux normes sont toujours équivalentes.*

Démonstration. Pour simplifier, on va supposer que $E = \mathbb{R}^n$, même si la démonstration procède en fait de façon analogue pour E un espace vectoriel quelconque de dimension finie. On note $\|.\|_0$ la norme standard de $\mathbb{R}^n$, définie par

$$\|x\|_0 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2}\ .$$

Comme on s'en convaincra facilement, démontrer le théorème revient à montrer que toute norme $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^n$ est équivalente à $\|.\|_0$. Etant donnée $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, et $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on écrit que

$$\|x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \; \|e_i\| \ .$$

Par suite, et si

$$M = \sum_{i=1}^n \|e_i\|$$

on obtient que pour tout $x \in E$,

$$\|x\| \leq M\big(\max_{i=1,\ldots,n} |x_i|\big) \leq M\|x\|_0 \ .$$

Il s'ensuit que l'application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\|x\|$ est continue pour $\|\cdot\|_0$. Notons S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour $\|.\|_0$:

$$S = \big\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \|x\|_0 = 1\big\} \ .$$

Clairement, S est un fermé et borné de $\mathbb{R}^n$, donc un compact de $\mathbb{R}^n$. Il s'ensuit que la restriction de f à S est bornée et qu'elle atteint ses bornes. Sachant que pour $x \in S$, $f(x) \neq 0$, puisque sinon on devrait avoir $0 \in S$, on obtient qu'il existe un réel $m > 0$ tel que pour tout $x \in S$, $f(x) \geq m$. En d'autres termes, il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in S$, $\|x\| \geq m$. Si maintenant x est un vecteur non nul quelconque de $\mathbb{R}^n$, en remarquant que $\frac{1}{\|x\|_0} x \in S$, on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \geq m\|x\|_0$. Posons pour finir $\lambda = \max\big(\frac{1}{m}, M\big)$. On voit alors que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{\lambda}\|x\|_0 \leq \|x\| \leq \lambda\|x\|_0 \ .$$

D'où le théorème. □

Une des conséquences de ce résultat est le théorème suivant.

Théorème 3.10. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.*

Démonstration. Soient $\|\cdot\|$ la norme de E et $\mathcal{B}$ une base de E. On note $\|\cdot\|_0$ la norme euclidienne de E définie par $\|x\|_0 = \sqrt{\sum_{i=0}^n x_i^2}$, où les x_i sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et $n = \dim(E)$. Alors $(E, \|\cdot\|_0)$ est un Banach (pour les mêmes raisons que $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne est un Banach). Pour le voir, et donc démontrer cette affirmation, on procède comme suit. Soit (x_p) une suite de E. On note $x_p^1, \ldots, x_p^n$ les coordonnées de x_p dans $\mathcal{B}$. Si (x_p) est de Cauchy pour $\|\cdot\|_0$ alors les (x_p^i) sont de Cauchy dans $\mathbb{R}$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ puisque $\|x\|_0 \geq |x_i|$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Comme $\mathbb{R}$ est complet, les suites (x_p^i) convergent. Soit x_i la limite de (x_p^i) lorsque $p \to +\infty$ et x de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathcal{B}$. Comme $|x_p^i - x_i| \to 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ lorsque $p \to +\infty$, la suite (x_p) converge vers x pour $\|\cdot\|_0$. Donc $(E, \|\cdot\|_0)$ est bien un Banach. Comme $\|\cdot\|$ est équivalente à $\|\cdot\|_0$ d'après le théorème précédent, $(E, \|\cdot\|)$ est aussi un Banach. Le théorème est démontré. □

En dimension infinie il est par contre facile de construire des exemples d'espaces vectoriels normés munis de deux normes non équivalentes. En fait, en admettant le lemme de Zorn, le résultat suivant a lieu.

THÉORÈME 3.11. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Alors E est de dimension finie si et seulement si toutes les normes sur E sont équivalentes.*

DÉMONSTRATION. Si E est de dimension finie toutes les normes sur E sont équivalentes d'après le Théorème 3.9. Supposons maintenant que E n'est pas de dimension finie. Il existe alors une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de vecteurs non nuls qui est telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre. On note H le sous espace vectoriel de E constitué des vecteurs de E qui s'écrivent comme combinaisons linéaires finies des u_k. Du lemme de Zorn (admis ici) on tire le théorème de la base incomplète en dimension infinie puis donc qu'il existe F un sous espace vectoriel de E supplémentaire de H dans E, et donc tel que $E = H \oplus F$. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E et soit Π la projection canonique $\Pi : E \to H$ qui à toute décomposition $u = x + y$ dans $H \oplus F$ associe $\Pi(u) = x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on pose $\Phi(u_n) = n\|u_n\|$. Par linéarité on a ainsi définie une forme linéaire $\Phi \circ \Pi : E \to \mathbb{R}$. Soit $\hat{\Phi} = \Phi \circ \Pi$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\frac{|\hat{\Phi}(u_n)|}{\|u_n\|} = n \ ,$$

et donc $\hat{\Phi}$ n'est clairement pas continue sur $(E, \|\cdot\|)$. On fixe $\|\cdot\|$ une norme sur E et soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ linéaire. Pour $x \in H$, on pose

$$N(x) = \|x\| + |\varphi(x)| \ .$$

Alors clairement N est une norme sur E. Si toutes les normes sur E sont équivalentes alors il existe $C > 1$ telle que $N(x) \leq C\|x\|$ pour tout $x \in E$. Mais alors $|\varphi(x)| \leq (C-1)\|x\|$ pour tout $x \in E$ et donc φ est continue sur $(E, \|\cdot\|)$. On a donc montré que si toutes les normes sur un espace vectoriel E sont équivalentes alors toute forme linéaire sur E est continue (quelque soit la norme placée sur E). Or on vient de montrer que si E est de dimension finie alors, pour toute norme fixée $\|\cdot\|$ sur E, il existe une forme linéaire sur $(E, \|\cdot\|)$ qui est non continue. Donc, en conclusion, si toutes les normes sur E sont équivalentes alors forcément E est de dimension finie. D'où le théorème. □

5. Plusieurs normes, plusieurs limites

En dimension finie toutes les normes sont équivalentes et une suite qui converge pour une norme converge donc pour toute autre norme avec preservation de la limite. En dimension infinie la situation change radicalement et une même suite peut avoir plusieurs limites quand on change la norme. On illustre ce phénomène sur le résultat suivant.

THÉORÈME 3.12. *Soit $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme donné quelconque. Il existe alors toujours une norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle la suite (X^n) converge vers P_0.*

DÉMONSTRATION. Soit p_0 le degré de P_0. On considère la famille infinie

$$\mathcal{B} \ = (1, X, X^2, \ldots, X^{p_0}, X^{p_0+1} - P_0, X^{p_0+2} - P_0, \ldots)$$

Cette famille étant échelonnée (le degré du premier élément est 0 et le degré du $(i+1)$ème élément est égal au degré du $i$ème élément plus un) elle constitue une base (infinie) de $\mathbb{R}[X]$ au sens où tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire (finie cette fois-ci) d'éléments de $\mathcal{B}$. Notons Q_0, Q_1,

$Q_2, \ldots$ les éléments de $\mathcal{B}$. En intégrant des 0 pour coordonnées on peut écrire que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ il existe des uniques α_0, α_1,α_2,... réels pour lesquels

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k Q_k \ ,$$

et, dans cette somme infinie, seuls un nombre fini de α_k sont à chaque fois non nuls. On définit alors

$$\|P\| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|\alpha_k|}{k+1} \ .$$

Il est facile de vérifier que $\|\cdot\|$ est bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$. Or pour cette norme

$$\|X^n - P_0\| = \frac{1}{n+1}$$

pour $n \gg 1$ suffisamment grand puisque $Q_n = X^n - P_0$ pour $n \gg 1$. Donc $X^n \to P_0$ lorsque $n \to +\infty$ pour cette norme. Le théorème est démontré. $\square$

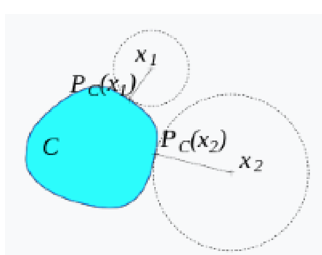
6. Projections et sous espaces supplémentaires

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Un sous ensemble $C \subset E$ est un convexe de E si pour tous $x, y \in C$ le segment $[x, y]$, constitué des $(1-t)x + ty$ pour $t \in [0, 1]$, est entièrement contenu dans C. On dit que C est complet si l'espace métrique (C, d), où d est la distance associée au produit scalaire, est un espace métrique complet. Si $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un Hilbert, alors C est complet si et seulement si C est fermé dans E (voir le Théorème 6.12). Un exemple classique de convexe complet dans E est donné par $C = F$ avec F sous espace vectoriel complet de E. On définit pour finir la distance $d(x, C)$ d'un $x \in E$ à un sous ensemble $C \subset E$ par

$$d(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y) \ ,$$

où d est la distance associée au produit scalaire. La distance aux convexes complets est caractérisée par le théorème de projection suivant.

THÉORÈME 3.13 (Théorème de projection sur les convexes complets). *Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et $C \subset E$ un convexe complet. Il existe une unique application $P_C : E \to C$, dite projection sur C, qui est telle que pour tout $x \in E$, $d(x, C) = d(x, P_C(x))$. Pour tout $x \in E$, $P_C(x)$ est l'unique point de C vérifiant que $\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle \le 0$ pour tout $y \in C$. Et si $C = F$ est un sous espace vectoriel complet de E, alors $P_C(x) \in F$ est entièrement caractérisé par la condition que $x - P_C(x) \in F^\perp$, où $F^\perp$ est l'orthogonal de F.*



Projections sur un convexe

Démonstration. Soit $\delta = d(x, C)$. Par définition de $d(x, C)$ il existe une suite (y_n) de points dans C telle que

$$\delta \leq d(x, y_n) \leq \delta + \frac{1}{n} \tag{3.5}$$

pour tout $n \geq 1$. Soit $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire. En écrivant que $y_m + y_n - 2x = (y_m - x) + (y_n - x)$ et que $y_m - y_n = (y_m - x) - (y_n - x)$, puis en développant $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle$, on remarque que pour tous $m, n \geq 1$,

$$2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 = \|y_m + y_n - 2x\|^2 + \|y_m - y_n\|^2 \ . \tag{3.6}$$

Or $z_{m,n} = \frac{y_m + y_n}{2} \in C$ puisque C est convexe et donc

$$\|y_m + y_n - 2x\|^2 = 4d\left(x, z_{m,n}\right)^2 \geq 4\delta^2 \ .$$

Avec (3.5) et (3.6) on obtient donc que

$$2(\delta + \frac{1}{m})^2 + 2(\delta + \frac{1}{n})^2 \geq 4\delta^2 + \|y_m - y_n\|^2$$

pour tous $m, n \geq 1$, et donc (y_n) est de Cauchy dans C. Comme C est complet, $y_n \to y$ pour un $y \in C$ et, clairement, $d(x, y) = d(x, C)$ par (3.5). Supposons maintenant que $y, z \in C$ sont tels que $d(x, y) = d(x, z) = d(x, C)$. Comme pour l'établissement de (3.6),

$$2\|y - x\|^2 + 2\|z - x\|^2 = \|y + z - 2x\|^2 + \|z - y\|^2 \ . \tag{3.7}$$

Et comme $\frac{y+z}{2} \in C$, on récupère que $4\delta^2 \geq 4\delta^2 + \|z - y\|^2$, donc que $z = y$. Ainsi il existe un et un seul $y \in C$ qui est tel que $d(x, y) = d(x, C)$. On pose alors $P_C(x) = y$. On a donc,

$$\|x - P_C(x)\| \leq \|x - z\| \tag{3.8}$$

pour tout $z \in C$. Soit $y \in C$ quelconque. Pour $t \in]0, 1[$, $z = (1-t)P_C(x) + ty$ est dans C puisque C est convexe. Donc, avec (3.8) élevée au carré,

$$\begin{aligned}
\|x - P_C(x)\|^2 &\leq \|x - P_C(x) + t(P_C(x) - y)\|^2 \\
&\leq \|x - P_C(x)\|^2 + t^2\|P_C(x) - y\|^2 - 2t\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle \ .
\end{aligned}$$

On en déduit puisque $t > 0$ que $t\|P_C(x) - y\|^2 \geq 2\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle$, et en faisant tendre $t \to 0^+$ on récupère la condition du théorème. Réciproquement si $z \in C$ est tel que $\langle x - z, y - z\rangle \leq 0$ pour tout $y \in C$ alors

$$\begin{aligned}
\|x - y\|^2 &= \|(x - z) + (z - y)\|^2 \\
&= \|x - z\|^2 + \|y - z\|^2 - 2\langle x - z, y - z\rangle \\
&\geq \|x - z\|^2
\end{aligned}$$

pour tout $y \in C$, et donc z est tel que $d(x, z) = d(x, C)$, soit $z = P_C(x)$. Donc $P_c(x)$ est bien caratcérisé par $P_C(x) \in C$ et $\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle \leq 0$ pour tout $y \in C$. Pour finir si $C = F$ est un sous espace vectoriel complet, en remarquant que $\{y - P_C(x), y \in F\} = F$, on obtient que $\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle \leq 0$ pour tout $y \in F$ si et seulement si $\langle x - P_C(x), y\rangle \leq 0$ pour tout $y \in F$. Puis en changeant y en $-y$ on voit que $\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle \leq 0$ pour tout $y \in F$ si et seulement si $\langle x - P_C(x), y\rangle = 0$ pour tout $y \in F$, et donc si et seulement si $x - P_C(x) \in F^\perp$. D'où le théorème. □

Du théorème de projection dans le cas des sous espaces vectoriels on déduit facilement le théorème du supplémentaire orthogonal dans les Hilbert.

THÉORÈME 3.14. *Soit* $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espace de Hilbert. Soit* $F \subset E$ *un sous espace vectoriel fermé de* E*. Alors* $E = F \oplus F^\perp$*, où* $F^\perp$ *est l'orthogonal de* F*.*

DÉMONSTRATION. On a toujours $F \cap F^\perp = \{0\}$. Reste donc à montrer que $E = F + F^\perp$. Comme H est un Hilbert et F est fermé dans H, F est complet (Théorème 6.12). Alors

$$x = P_F(x) + (x - P_F(x)) \ ,$$

où P_F est la projection sur F donnée par le Théorème 3.13. On a $P_F(x) \in F$ et, toujours en vertue du Théorème 3.13, $x - P_F(x) \in F^\perp$. D'où le théorème. $\square$

7. Applications linéaires continues

On aborde la notion importante d'application linéaire continue. Pour mémoire, une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est une application $f : E \to F$ qui vérifie que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tous $x, y \in E$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

THÉORÈME 3.15. *Soient* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés, et soit* $f : E \to F$ *une application linéaire de* E *dans* F*. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) f *est continue sur* E*,*
(2) f *est continue en* 0*,*
(3) $\exists M > 0 \ / \ \forall x \in E, \ \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$

où f *est dite continue si elle l'est en tant qu'application de l'espace vectoriel normé* $(E, \|.\|_E)$ *dans l'espace vectoriel normé* $(F, \|.\|_F)$*.*

DÉMONSTRATION. L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) est immédiate. Supposons maintenant que (2) a lieu. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in E, \ \|x\|_E < \eta \ \Rightarrow \ \|f(x)\|_F < \varepsilon \ .$$

En prenant $\varepsilon = 1$ dans cette relation, on obtient ainsi qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|x\|_E < \eta$ entraine $\|f(x)\|_F \leq 1$. Etant donné x un point quelconque de E, avec $x \neq 0$, on pose

$$y = \frac{\eta}{2\|x\|_E} \ x \ .$$

En remarquant que $\|y\|_E < \eta$, on obtient que $\|f(y)\|_F \leq 1$. Par linéarité de f, cela entraine que

$$\|f(x)\|_F \leq \frac{2}{\eta}\|x\|_E \ .$$

On a ainsi montré que (2) $\Rightarrow$ (3). Supposons pour finir que (3) a lieu. Etant donné $x \in E$, soit $y \in E$ quelconque. Alors

$$\|f(y) - f(x)\|_F = \|f(y - x)\|_F \ .$$

de sorte qu'avec 3) on obtient que pour tout $y \in E$,

$$\|f(y) - f(x)\|_F \leq M\|y - x\|_E \ .$$

Donc f est lipschitzienne, et il s'ensuit que f est continue au point x. Ainsi, (3) $\Rightarrow$ (1), et le théorème est démontré. $\square$

Une remarque importante (mais néanmoins simple à démontrer) est que la composée d'applications linéaires continues est encore une application linéaire continue. Le résultat se démontre en écrivant que si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont linéaires, alors pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}\|g \circ f(x)\|_G &\leq \|g\|_{L_c(F,G)}\|f(x)\|_F \\ &\leq \|g\|_{L_c(F,G)}\|f\|_{L_c(E,F)}\|x\|_E \ .\end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est bien continue et on a même obtenu que

$$\|g \circ f\|_{L_c(E,G)} \leq \|g\|_{L_c(F,G)}\|f\|_{L_c(E,F)}$$

si on définit la norme d'une application linéaire (voir ci-dessous) comme la plus petite constante M dans (3). On peut se demander pourquoi la notion d'application linéaire continue n'apparaît pas en dimension finie. La raison en est donnée par le résultat suivant.

Théorème 3.16. *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.*

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On note $\|.\|'_E$ la norme de E définie pour tout $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ de E par

$$\|x\|'_E = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \ .$$

Sachant que E est de dimension finie, et d'après ce qui a été dit plus haut sur l'équivalence des normes, il existe une constante réelle $C > 0$ telle que pour tout $x \in E$, $\|x\|'_E \leq C\|x\|_E$. Etant donnés f une application linéaire de E dans F, on écrit que pour tout $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ de E

$$\begin{aligned}\|f(x)\|_F &= \|\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\|_F \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.\|f(e_i)\|_F \\ &\leq \big(\max_{i=1,\dots,n} \|f(e_i)\|_F\big)\|x\|'_E \\ &\leq C\big(\max_{i=1,\dots,n} \|f(e_i)\|_F\big)\|x\|_E \ .\end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'il existe un réel $M > 0$,

$$M = C\big(\max_{i=1,\dots,n} \|f(e_i)\|_F\big) \ ,$$

tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$. D'après le théorème précédent, cela entraine que f est continue sur E. Le théorème est démontré. □

En dimension infinie les applications linéaires ne sont plus nécessairement continues. Un exemple d'une telle application linéaire non continue est donné par le lemme suivant.

Lemme 3.1. *Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ qui sont continues sur $[-1, 1]$ et dérivables en 0. On munit E de la norme L^∞ définie par $\|f\|_{L^\infty} = \max_{x\in[-1,1]} |f(x)|$ (qui est bien définie puisque toute fonction continue sur $[-1, 1]$ est bornée et atteint ses bornes). La forme linéaire $\Phi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(f) = f'(0)$ pour tout $f \in E$ n'est pas continue sur $(E, \| \cdot \|_{L^\infty})$.*

DÉMONSTRATION. Si Φ était continue il existerait une constant $C > 0$ telle que $|f'(0)| \leq C\|f\|_{L^\infty}$ pour toute fonction $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}$ les fonctions $u_n(x) = \sin(nx)$, $x \in [-1,1]$, sont dans E et elles sont de normes L^∞ égale à 1 pour tout $n \geq 2$ puisque $\pi/2 \in [-n,n]$ pour $n \geq 2$. Or $\Phi(u_n) = n$. On devrait donc avoir l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $C \geq n$ pour tout $n \geq 2$, ce qui est bien sûr impossible. Donc Φ n'est pas continue. $\square$

De nombreux autres exemples d'applications linéaires non continues en dimension infinie sont bien sûr possibles. Voir aussi la preuve du Théorème 3.11 où, avec le lemme de Zorn, on montre que pour tout espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension infinie il existe $u : E \to \mathbb{R}$ linéaire qui n'est pas continue sur $(E, \|\cdot\|)$.

8. Le théorème de Banach

Le théorème suivant est difficile à démontrer. On le donne ici sans preuve.

THÉORÈME 3.17 (Théorème de Banach). *Si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux espaces de Banach, et si $f \in L_c(E,F)$ est bijective de E sur F, alors $f^{-1} \in L_c(F,E)$.*

Clairement si f est linéaire bijective de E sur F, f^{-1} est linéaire de F sur E. Ce n'est pas la linéarité de f^{-1} qui est l'affirmation difficile. Ce que dit le théorème de Banach, et qui est difficile à démontrer, est que la continuité de f entraîne la continuité de f^{-1}. Ainsi, toute application linéaire continue bijective entres Banach est en fait un isomorphisme bi-continu entre ces espaces.

9. Espaces des applications linéaires continues

Le résultat suivant est important.

THÉORÈME 3.18. *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et soit $L_c(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. Soit $\|\cdot\|_{L_c(E,F)}$ la norme sur $L_c(E,F)$ définie par*

$$\|f\|_{L_c(E,F)} = \sup_{x \in E\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} .$$

Alors non seulement $\|\cdot\|_{L_c(E,F)}$ est bien une norme sur $L_c(E,F)$, mais en plus, l'espace $(L_c(E,F), \|\cdot\|_{L_c(E,F)})$ est un espace de Banach dès que $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach.

DÉMONSTRATION. On vérifie facilement que $\|\cdot\|_{L_c(E,F)}$ est bien une norme. On montre que $(L_c(E,F), \|\cdot\|_{L_c(E,F)})$ est un espace de Banach dès que $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach. On considère $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L_c(E,F)$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall p, q \geq N \ , \ \|f_p - f_q\|_{L_c(E,F)} < \varepsilon \ . \tag{3.9}$$

En particulier, par définition même de $\|\cdot\|_{L_c(E,F)}$, on obtient avec (3.9) que

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall p, q \geq N \ , \ \forall x \in E \ , \\ &\|f_p(x) - f_q(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E \end{aligned} \tag{3.10}$$

La suite $(f_n(x))_n$ est donc de Cauchy dans $(F, \|.\|_F)$. Comme $(F, \|.\|_F)$ est un espace de Banach, elle converge dans $(F, \|.\|_F)$. On note $f(x)$ sa limite, et comme

x est quelconque dans E, on récupère une application $f : E \to F$. Pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\|f(x+\lambda y) - f(x) - \lambda f(y)\|_F \\
&= \|f(x+\lambda y) - f_n(x+\lambda y) + f_n(x) + \lambda f_n(y) - f(x) - \lambda f(y)\|_F \\
&\le \|f(x+\lambda y) - f_n(x+\lambda y)\|_F + \|f_n(x) - f(x)\|_F + |\lambda|\|f_n(y) - f(y)\|_F
\end{aligned}$$

pour tout n, puisque f_n est linéaire. En faisant tendre $n \to +\infty$, on voit que f est bien linéaire, à savoir que

$$f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

pour tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$. En faisant tendre $p \to +\infty$ dans (3.10), avec q et ε fixés, par exemple $\varepsilon = 1$ et $q = N$, on voit aussi que pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}
\|f(x)\|_F &= \|f(x) - f_q(x) + f_q(x)\|_F \\
&\le \varepsilon\|x\|_E + \|f_q(x)\|_F \\
&\le \left(\|f_q\|_{L_c(E,F)} + \varepsilon\right)\|x\|_E \ .
\end{aligned}$$

En particulier, f est continue sur E. Reste à montrer que $(f_n)_n$ converge vers f dans $(L_c(E,F), \|\cdot\|_{L_c(E,F)})$. Pour cela on revient à (3.10), on fait tendre q vers l'infini, et on prend ensuite le supremum sur les $x \in E\backslash\{0\}$ dans la conclusion de (3.10). Alors

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall p \ge N \ , \ \sup_{x \in E\backslash\{0\}} \frac{\|f_p(x) - f(x)\|_F}{\|x\|_E} \le \varepsilon \tag{3.11}$$

et puisque $\varepsilon > 0$ est quelconque, (3.11) n'exprime rien d'autre que la convergence de la suite $(f_n)_n$ vers f dans $(L_c(E,F), \|\cdot\|_{L_c(E,F)})$, à savoir une relation du type

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall p \ge N \ , \ \forall x \in E \ , \ \|f_p - f\|_{L_c(E,F)} < \varepsilon \ .$$

L'espace $(L_c(E,F), \|\cdot\|_{L_c(E,F)})$ est donc bien un espace de Banach. Le théorème est démontré. □

A titre de remarque, on a aussi

$$\|f\|_{L_c(E,F)} = \sup_{\{x \in E \ / \ \|x\|_E \le 1\}} \|f(x)\|_F$$

ou encore

$$\|f\|_{L_c(E,F)} = \sup_{\{x \in E \ / \ \|x\|_E = 1\}} \|f(x)\|_F \ .$$

En fait $\|f\|_{L_c(E,F)}$ est le plus petit des réels M pour lesquels $\|f(x)\|_F \le M\|x\|_E$ pour tout x.

10. Premier théorème de Riesz

Dans le cas hilbertien, les formes linéaires continues sont caractérisées par le premier théorème de Riesz.

THÉORÈME 3.19 (Premier théorème de Riesz). *Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et soit $f : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue sur H. Il existe alors $a \in H$ tel que $f(x) = \langle a, x\rangle$ pour tout $x \in H$. De plus a est unique.*

Démonstration. Sans perdre en généralité on peut supposer que f n'est pas identiquement nulle. Soit $F = \mathrm{Ker}(f)$. Comme f est continue, F est un sous espace vectoriel fermé de H. Donc, en vertue du Théorème 3.14, $H = F \oplus F^\perp$. Soit $b \in F^\perp$ tel que $\|b\| = 1$, où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire. Un tel b existe car $F \neq H$ dès que f n'est pas identiquement nulle. Comme $b \neq 0$ on a que $f(b) \neq 0$. Pour tout $x \in H$ il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda f(b)$ qui est une égalité dans $\mathbb{R}$. En particulier, pour tout $z \in F^\perp$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = \lambda f(b)$. Mais alors $z - \lambda b \in F \cap F^\perp$ et ainsi $z = \lambda b$. Donc $F^\perp$ est de dimension un. Soit $\lambda_0 = f(b)$ et $a = \lambda_0 b$. Alors a est un vecteur directeur (une base) de $F^\perp$ et $f(a) = \|a\|^2$. Tout $x \in H$ s'écrit $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$. Donc tout $x \in H$ s'écrit $x = y + \lambda a$ avec $y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors $f(x) = \lambda f(a)$ puisque $f(y) = 0$ tandis que

$$\langle x, a\rangle = \langle y, a\rangle + \lambda\|a\|^2 = \lambda f(a)$$

puisque $y \in F$, $a \in F^\perp$ et $f(a) = \|a\|^2$. D'où $f(x) = \langle a, x\rangle$ pour tout $x \in H$. Pour montrer l'unicité supposons que $a, a' \in H$ sont tels que $f(x) = \langle a, x\rangle$ et $f(x) = \langle a', x\rangle$ pour tout $x \in H$. Alors $\langle a' - a, x\rangle = 0$ pour tout $x \in H$ et donc, en particulier, $\|a' - a\| = 0$. D'où $a' = a$ et on a bien existence et unicité d'un $a \in H$ pour lequel $f(x) = \langle a, x\rangle$ pour tout $x \in H$. Le théorème est démontré. $\square$

11. Applications multilinéaires continues

On considère $E_1, \dots, E_n, F$ des espaces vectoriels. On considère aussi

$$f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$$

une application de $E_1 \times \dots E_n$ dans F. L'application f est dite multilinéaire si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables. En d'autres termes, f est multilinéaire si pour tout point $(a_1, \dots, a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, et tout $i = 1, \dots, n$, les applications partielles $f_i = E_i \to F$ définies par

$$f_i(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

sont linéaires en tant qu'applications de E_i dans F. Si $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), \dots, (E_n, \|\cdot\|_{E_n})$ sont des espaces vectoriels normés, on place sur $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ l'une des deux normes équivalentes

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{E_i}^2} \quad \text{ou} \quad \|X\|' = \sum_{i=1}^n \|x_i\|_{E_i} \tag{3.12}$$

où $X = (x_1, \dots, x_n)$. Elles sont équivalentes, comme on le voit par exemple en montrant la double inégalité

$$\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{E_i} = \langle(\|x_i\|_{E_i})_i, (1)_i\rangle_{\mathbb{R}^n} \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{E_i}^2}\ , \text{ et}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{E_i}^2} \leq \sqrt{n}\max_i \|x_i\|_{E_i} \leq \sqrt{n}\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{E_i}$$

de sorte que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|X\| \leq \|X\|' \leq \sqrt{n}\|X\|$$

pour tout $X = (x_1, \dots, x_n)$ dans $E_1 \times \cdots \times E_n$.

Théorème 3.20. *Soient* $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_n, \|\cdot\|_n)$, *et* $(F, \|\cdot\|_F)$ *des espaces vectoriels normés. Soit aussi* $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ *une application multilinéaire. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

(i) f *est continue en tout point de* $E_1 \times \cdots \times E_n$,
(ii) f *est continue à l'origine* $(0, \dots, 0)$ *de* $E_1 \times \cdots \times E_n$,
(iii) $\exists M > 0$ *tel que* $\|f(x_1, \dots, x_n)\|_F \leq M\|x_1\|_1 \times \cdots \times \|x_n\|_n$

pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, *où la norme placée sur* $E_1 \times \cdots \times E_n$ *qui sert à définir la continuité est l'une des normes équivalentes* (3.12).

Démonstration. Comme dans le cas linéaire on montre que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i). Déjà, il est clair que (i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons maintenant (ii). Alors

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \eta > 0 \ / \ \forall (x_1, \dots, x_n), \|(x_1, \dots, x_n)\| < \eta \\ &\Rightarrow \|f(x_1, \dots, x_n)\|_F < \varepsilon\end{aligned}$$

où, par exemple, $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sum_{i=1}^n \|x_i\|_i$. On fixe $\varepsilon = 1$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ un point quelconque de $E_1 \times \cdots \times E_n$. Si l'un des x_i est nul, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ (car $f(0) = 0$ pour une application linéaire), et (iii) est trivialement vérifié par $(x_1, \dots, x_n)$. On suppose maintenant que $x_i \neq 0$ pour tout i. Le point $(y_1, \dots, y_n)$ défini par $y_i = \frac{\eta}{2n\|x_i\|_i} x_i$ est alors tel que $\|(y_1, \dots, y_n)\| < \eta$. En particulier, $\|f(y_1, \dots, y_n)\|_F \leq 1$, et puisque f est multilinéaire,

$$f(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{\eta}{2n}\right)^n \frac{1}{\prod_{i=1}^n \|x_i\|_i} f(x_1, \dots, x_n) \ .$$

On a ainsi obtenu que

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\|_F \leq \left(\frac{2n}{\eta}\right)^n \prod_{i=1}^n \|x_i\|_i$$

pour tout point $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. Donc (ii) $\Rightarrow$ (iii). Pour finir on suppose (iii). Soient aussi $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ deux points de $E_1 \times \cdots \times E_n$. On écrit que

$$\begin{aligned}&f(y_1, \dots, y_n) - f(x_1, \dots, x_n) \\ &= f(y_1 - x_1, y_2, \dots, y_n) + f(x_1, y_2 - x_2, y_3, \dots, y_n) \\ &+ \cdots + f(x_1, \dots, x_{n-1}, y_n - x_n) \ .\end{aligned}$$

Par exemple, lorsque $n = 2$,

$$f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2) = f(y_1 - x_1, y_2) + f(x_1, y_2 - x_2) \ .$$

On fixe $X = (x_1, \dots, x_n)$. Si $\|Y - X\| \leq 1$, alors $\|y_i\|_i \leq 1 + \|x_i\|_i$ pour tout i, et il existe ainsi $K > 0$, $K = 1 + \max_i \|x_i\|_i$, tel que $\|x_i\|_i \leq K$ et $\|y_i\|_i \leq K$ pour tout i. Par suite, par inégalité triangulaire, et d'après (iii),

$$\begin{aligned}\|f(y_1, \dots, y_n) - f(x_1, \dots, x_n)\|_F &\leq MK^{n-1} \sum_{i=1}^n \|y_i - x_i\|_i \\ &= MK^{n-1}\|Y - X\|\end{aligned}$$

Il s'ensuit facilement que

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \eta > 0 \ / \ \forall Y, \|Y - X\| < \eta \Rightarrow \|f(Y) - f(X)\|_F < \varepsilon \ .$$

Il suffit de choisir η tel que $\eta \leq 1$ et $\eta < \varepsilon/MK^{n-1}$. Donc (iii) $\Rightarrow$ (i). Le théorème est démontré. $\square$

En dimension finie, les multilinéaires, comme les linéaires, sont toujours continues.

THÉORÈME 3.21. *Soient* $(E_1, \|\cdot\|_1),\ldots,(E_n, \|\cdot\|_n)$ *et* $(F, \|\cdot\|_F)$ *des espaces vectoriels normés. On suppose que les* E_i *sont de dimensions finies. Toute application multilinéaire* $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ *est alors continue.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\|f(x_1, \ldots, x_n)\|_F \leq M\|x_1\|_1 \times \cdots \times \|x_n\|_n$$

pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. Notons m_k les dimensions des E_k et $(e_1^k, \ldots, e_{m_k}^k)$ des bases de E_k, $k = 1, \ldots, n$. Pour tout $x_k \in E_k$ on note $x_1^k, \ldots, x_{m_k}^k$ les coordonnées de x_k dans la base $(e_1^k, \ldots, e_{m_k}^k)$, $k = 1, \ldots, n$. Par équivalence des normes en dimension finie, pour tout $k = 1, \ldots, n$, il existe $C_k > 0$ tel que

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m_k} (x_i^k)^2} \leq C_k \|x_k\|_k$$

pour tout $x_k \in E_k$. Pour $i_1 \in \{1, \ldots, m_1\}, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, m_n\}$, on note maintenant

$$a_{i_1 \ldots i_n} = f(e_{i_1}^1, \ldots, e_{i_n}^n) \ .$$

Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, on a alors, par multilinéarité de f,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} x_{i_1}^1 \ldots x_{i_n}^n a_{i_1 \ldots i_n} \ ,$$

et donc, puisqu'on a toujours $|x_i| \leq \sqrt{\sum_j x_j^2}$, on obtient avec ce qui a été dit ci-dessus que

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \ldots, x_n)\|_F &= \|\sum_{i_1, \ldots, i_n} x_{i_1}^1 \ldots x_{i_n}^n a_{i_1 \ldots i_n}\|_F \\ &\leq C_1 \ldots C_n \sum_{i_1, \ldots, i_n} \|a_{i_1 \ldots i_n}\|_F \|x_1\|_1 \ldots \|x_n\|_n \end{aligned}$$

En posant $M = C_1 \ldots C_n \sum \|a_{i_1 \ldots i_n}\|_F$, on obtient l'inégalité voulue. Le théorème est démontré. $\square$

Etant donnés $(E_1, \|\cdot\|_1),\ldots, (E_n, \|\cdot\|_n)$, et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés, on note $L_c(E_1, \ldots, E_n; F)$ l'espace des applications multilinéaires continues de $E_1, \ldots, E_n$ dans F. L'espace hérite d'une norme définie par

$$\|f\|_{L_c(E_1, \ldots, E_n; F)} = \sup_{x_i \in E_i, \|x_i\|_i \leq 1} \|f(x_1, \ldots, x_n)\|_F \ .$$

On a alors que

$$\|f(x_1, \ldots, x_n)\|_F \leq \|f\|_{L_c(E_1, \ldots, E_n; F)} \|x_1\|_1 \times \cdots \times \|x_n\|_n$$

pour tous $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. Une définition équivalente de $\|f\|_{L_c(E_1, \ldots, E_n; F)}$ est qu'il s'agit du plus petit des réels positifs M pour lesquels

$$\|f(x_1, \ldots, x_n)\|_F \leq M\|x_1\|_1 \times \cdots \times \|x_n\|_n$$

pour tous $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. On pourra vérifier que le résultat suivant a lieu. Il se démontre comme dans le cas des applications linéaires.

THÉORÈME 3.22. *Soient* $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_n, \|\cdot\|_n)$, *et* $(F, \|\cdot\|_F)$ *des espaces vectoriels normés. L'espace* $\big(L_c(E_1, \dots, E_n; F), \|\cdot\|_{L_c(E_1,\dots,E_n;F)}\big)$ *est un espace de Banach dès que* $(F, \|\cdot\|_F)$ *est un espace de Banach.*

12. L'isométrie naturelle de $L_c(E, L_c(F, G))$ avec $L_c(E, F; G)$

On commence par définir ce qu'est une isométrie vectorielle entre espaces vectoriels normés. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et f une application linéaire de E dans F. On dit que f est une isométrie vectorielle de $(E, \|\cdot\|_E)$ sur $(F, \|\cdot\|_F)$ si:

(i) f est un isomorphisme de E sur F, et
(ii) $\|f(x)\|_F = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$.

En d'autres termes, une isométrie vectorielle est un isomorphisme qui présèrve les normes. Bien sûr f est continue (car, en particulier, $\|f(x)\|_F \le \|x\|_E$ pour tout x), et f^{-1} présèrve aussi les normes (i.e $\|f^{-1}(y)\|_E = \|y\|_F$ pour tout y). En particulier, f^{-1} est continue, et f est un isomorphisme bi-continu (qui présèrve les normes).

THÉORÈME 3.23. *Soient* $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, *et* $(G, \|\cdot\|_G)$ *trois espaces vectoriels normés. L'application*

$$\Phi : L_c(E, F; G) \to L_c(E, L_c(F, G))$$

qui à $f \in L_c(E, F; G)$ *associe* $\Phi(f) \in L_c(E, L_c(F, G))$, *définie par*

$$\big(\Phi(f)(x)\big)(y) = f(x, y)$$

pour tout $x \in E$ *et tout* $y \in F$, *est une isométrie vectorielle de l'espace des bilinéaires* $(L_c(E, F; G), \|\cdot\|_{L_c(E,F;G)})$ *sur* $(L_c(E, L_c(F, G)), \|\cdot\|_{L_c(E,L_c(F,G))})$. *En particulier, via* Φ, *l'espace des bilinéaires* $L_c(E, F; G)$ *s'assimile naturellement à l'espace* $L_c(E, L_c(F, G))$.

On vérifie facilement que Φ est bien bijective et que l'application réciproque de Φ est l'application

$$\Phi^{-1} : L_c(E, L_c(F, G)) \to L_c(E, F; G)$$

qui à $f \in L_c(E, L_c(F, G))$ associe $\Phi^{-1}(f) \in L_c(E, F; G)$ définie par

$$\Phi^{-1}(f)(x, y) = \big(f(x)\big)(y)$$

pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$. On démontre maintenant le théorème.

DÉMONSTRATION. On commence par montrer que Φ et Φ^{-1} sont bien définies. Soit f fixée, $f \in L_c(E, F; G)$. Clairement, puisque f est bilinéaire, $\Phi(f)(x) \in L(F, G)$ (i.e $\Phi(f)(x)$ est linéaire de F dans G) où $\big(\Phi(f)(x)\big)(y) = f(x, y)$. De même, on vérifie facilement que $\Phi(f) \in L(E, L(F, G))$. Comme f est continue,

$$\|f(x, y)\|_G \le \|f\|_{L_c(E,F;G)} \|x\|_E \|y\|_F \ .$$

On en déduit que

$$\| \left(\Phi(f)(x)\right)(y)\|_G \le \big(\|f\|_{L_c(E,F;G)} \|x\|_E\big) \|y\|_F$$

et donc que $\Phi(f)(x) \in L_c(F,G)$, avec

$$\|\Phi(f)(x)\|_{L_c(F,G)} \leq \|f\|_{L_c(E,F;G)} \|x\|_E \ .$$

Ensuite, on tire de cette inégalité que $\Phi(f) \in L_c((E, L_c(F,G))$ et que

$$\|\Phi(f)\|_{L_c((E,L_c(F,G))} \leq \|f\|_{L_c(E,F;G)} \ . \tag{3.13}$$

Donc Φ est bien une application de $L_c(E,F;G)$ dans $L_c(E, L_c(F,G))$. Clairement, Φ est linéaire en f. Avec (3.13) on récupère alors que Φ est continue et que $\|\Phi\| \leq 1$. De la même façon on montre que Φ^{-1} est bien définie, qu'elle est linéaire continue, et que $\|\Phi^{-1}\| \leq 1$. Comme par ailleurs $\Phi \circ \Phi^{-1} = Id$, en passant aux normes, on trouve que

$$1 \leq \|\Phi^{-1}\| \times \|\Phi\| \ .$$

Du coup, $\|\Phi\| = 1$ et $\|\Phi^{-1}\| = 1$. En écrivant que

$$\|f\|_{L_c(E,F;G)} = \|\Phi^{-1}\big(\Phi(f)\big)\|_{L_c(E,F;G)} \leq \|\Phi^{-1}\| \times \|\Phi(f)\|_{L_c(E,L_c(F,G))} \ ,$$

on en déduit que $\|\Phi(f)\|_{L_c(E,L_c(F,G))} = \|f\|_{L_c(E,F;G)}$ et donc que Φ est bien une isométrie vectorielle. Le théorème est démontré. $\square$

CHAPITRE 4

Calcul différentiel dans les Banach

Il s'agit ici de développer la théorie du calcul différentiel pour les applications entre espaces de Banach.

1. Applications différentiables

On inverse les priorités. On ne cherche plus à calculer la différentielle mais bien à définir la différentiabilité. C'est elle qui vient en premier, et c'est la "bonne" façon de voir les choses.

DÉFINITION 4.1. *Soient* $(E, \|\cdot\|_E)$ *et* $(F, \|\cdot\|_F)$ *deux espaces de Banach,* Ω *un ouvert de* E*,* $a \in \Omega$ *un point de* Ω*, et* $f : \Omega \to F$ *une application de* Ω *dans* F*. On dit que* f *est différentiable au point* a *s'il existe une application linéaire continue* $g \in L_c(E, F)$ *telle que*

$$f(x) - f(a) - g(x - a) = \|x - a\|_E \varepsilon(x) \tag{4.1}$$

pour tout $x \in \Omega$*, où* $\varepsilon : \Omega \to F$ *est telle que* $\varepsilon(a) = 0$ *et* $\varepsilon(x) \to 0$ *(pour* $\|\cdot\|_F$*) lorsque* $x \to a$ *(pour* $\|\cdot\|_E$*). On dit que* g *est la différentielle de* f *au point* a *et on la note* $Df(a)$*.*

Formellement, (4.1) signifie que

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \ \in \Omega \backslash \{a\}, \ \|x - a\|_E < \eta \\ &\quad \Rightarrow \ \|f(x) - f(a) - g(x - a)\|_F < \varepsilon \|x - a\|_E \end{aligned}$$

On montre que g est unique lorsqu'elle existe.

LEMME 4.1. *L'application linéaire* g*, si elle existe, est unique.*

DÉMONSTRATION. Si deux $g_1, g_2 \in L_c(E, F)$ vérifient $(\star)$, alors

$$g_1(x - a) - g_2(x - a) = \|x - a\|_E \varepsilon(x)$$

pour tout $x \in \Omega$, où $\varepsilon : \Omega \to F$ est telle que $\varepsilon(a) = 0$ et $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to a$. Soit $h \in E$ un élément quelconque de E. Comme Ω est un ouvert, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $t \in]-r_0, +r_0[$, le point $x = a + th$ est dans Ω. Bien sûr, $a + th \to a$ lorsque $t \to 0$. En posant $x = a + th$ dans l'égalité ci-dessus, avec $t > 0$, et par linéarité de g_1 et g_2, on obtient que

$$g_1(h) - g_2(h) = \|h\|_E \varepsilon_h(t)$$

pour tout $t > 0$ suffisamment petit, où $\varepsilon_h(t) = \varepsilon(a + th)$ est telle que $\varepsilon_h(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. En faisant effectivement tendre $t \to 0$, il suit que $g_2(h) = g_1(h)$ pour tout $h \in E$, et donc que $g_2 \equiv g_1$. On a donc bien unicité de g et on peut donc bien s'en servir pour définir $Df(a) = g$. $\square$

Dans le cas de la dimension finie on retombe bien avec la Défintion 4.1 sur ce qui a été dit dans le Chapitre 2.

PROPOSITION 4.1. *Si* $E = \mathbb{R}^p$ *et* $F = \mathbb{R}^q$ *alors on retrouve bien que*

$$Df(a).(H) = \big(Df(a)^1.(H), \dots, Df(a)^q.(H)\big) \quad \textit{avec}$$
$$Df(a)^j.(H) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) h_i$$

pour tout $H = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$*, où les* $f_1, \dots, f_q$ *sont les fonctions composantes de* f*.*

DÉMONSTRATION. Pour faire simple supposons $q = 1$. On a

$$f(x) - f(a) - g(x - a) = \|x - a\|_E \varepsilon(x) \tag{4.2}$$

avec $\varepsilon(a) = 0$ et $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to a$. Prenons successivement x sous la forme $x = x_t$ avec

$$x_t = (a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p) \ .$$

Si $f_a^i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p)$ est la $i$ème fonction partielle du Chapitre 2, alors (4.2) s'écrit aussi

$$f_a^i(t) - f_a^i(a_i) - \Phi_i(t - a_i) = |t - a_i| \varepsilon(t) \ , \tag{4.3}$$

où $\varepsilon(a_i) = 0$ et $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to a_i$, et la fonction

$$\Phi_i(t) = g(0, \dots, 0, t, 0 \dots, 0)$$

(le t à la $i$ème place) est une fonction linéaire de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Les fonctions linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrivent toutes sous la forme $t \to \lambda t$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel donné. Donc, en remplaçant, si on note $\Phi_i(t) = \lambda_i t$, on obtient avec (4.3) que

$$f_a^i(t) - f_a^i(a_i) - \lambda_i(t - a_i) = |t - a_i| \varepsilon(t) \ . \tag{4.4}$$

A partir de (4.4) on obtient que

$$\lim_{t \to a_i, t \neq a_i} \frac{f_a^i(t) - f_a^i(a_i)}{t - a_i} = \lambda_i$$

et donc

$$\lambda_i = (f_a^i)'(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \ .$$

En remarquant que $g(H) = \sum_{i=1}^p \Phi_i(h_i)$ pour tout $H = (h_1, \dots, h_p)$, on voit que

$$g(H) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$$

pour tout $H = (h_1, \dots, h_p)$. D'où la proposition. □

Pourquoi demander dans (4.1) que $g \in L_c(E, F)$, et non pas tout simplement que $g \in L(E, F)$ sans continuité sur g ? En raison du résultat suivant…, et donc de caractère incontournable de l'implication "dérivable ⇒ continue".

THÉORÈME 4.1. *Soient* $(E, \|\cdot\|_E)$ *et* $(F, \|\cdot\|_F)$ *deux espaces de Banach. Soient* Ω *un ouvert de* E*,* $a \in \Omega$ *un point de* Ω*, et* $f : \Omega \to F$ *une application de* Ω *dans* F*. Si* f *est différentiable au point* a*, alors* f *est aussi continue au point* a*.*

Démonstration. On a

$$f(x) - f(a) - g(x-a) = \|x-a\|_E \varepsilon(x) \tag{4.5}$$

avec $\varepsilon(a) = 0$ et $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to a$. Comme g est continue, $\lim_{x\to a} g(x-a) = 0$. Donc (comme aussi $\|x-a\|_E \varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to a$), on voit avec (4.5) que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) ,$$

et f est bien continue en a. D'où le théorème. □

La différentiabilité sur Ω se définit classiquement comme la différentiabilité en tout point de Ω.

Définition 4.2. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach, et soit Ω un ouvert de E. Soit $f : \Omega \to F$ une application de Ω dans F. On dit que f est différentiable sur Ω si f est différentiable en tout point a de Ω.*

Si $f : \Omega \to F$ est différentiable sur Ω, alors on récupère une application

$$Df : \Omega \to L_c(E, F)$$

qui à $x \in \Omega$ associe $Df(x) \in L_c(E, F)$. Les applications Df et f sont de même type (ou même nature): ce sont deux applications d'un espace de Banach dans un autre espace de Banach. On place ici sur $L_c(E, F)$ sa norme naturelle

$$\|\Phi\|_{L_c(E,F)} = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|\Phi(x)\|_F}{\|x\|_E} ,$$

et on rappelle (cf. Chapitre 3) que $\big(L_c(E, F), \|\cdot\|_{L_c(E,F)}\big)$ est un Banach dès que $(F, \|\cdot\|_F)$ est un Banach.

La remarque que l'on vient de faire est d'importance. Elle permet de définir de façon naturelle les applications de classe C^1, les applications deux fois différentiables, les applications de classe C^2, les applications trois fois différentiables, etc. à partir des seules notions d'application différentiable et d'application continue entre Banach, comme c'était le cas pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Evidemment, si la théorie est claire et simple, dans la pratique les espaces se compliquent considérablement au fur et à mesure que l'on différencie:

$$Df : \Omega \to L_c(E, F) \ , \ D^2 f : \Omega \to L_c(E, L_c(E, F)) \ ,$$
$$D^3 f : \Omega \to L_c(E, L_c(E, L_c(E, F))) \ , \ \ldots$$

Les espaces d'arrivées seront à simplifier (par assimilation). Par exemple (cf. Chapitre 3), $L_c(E, L_c(E, F)) \approx L_c(E, E; F)$.

Définition 4.3. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach, et soit Ω un ouvert de E. Soit $f : \Omega \to F$ une application différentiable de Ω dans F. On dit que f est de classe C^1 sur Ω si $Df : \Omega \to L_c(E, F)$ est continue sur Ω.*

La continuité de DF en un point $a \in, \Omega$ s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in \Omega, \|x-a\|_E < \eta$$
$$\Rightarrow \|Df(x) - Df(a)\|_{L_c(E,F)} < \varepsilon$$

et donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in \Omega, \|x-a\|_E < \eta$$
$$\Rightarrow \|Df(x).h - Df(a).h\|_F \le \varepsilon \|h\|_E \text{ pour tout } h \in E \ .$$

Les deux formulations sont équivalentes en vertue de la définition même de la norme d'une application linéaire continue (et puisque $\varepsilon > 0$ est quelconque).

2. Gateaux-différentiabilité

La notion de différentiabilité que l'on vient de voir dans la section précédente (et aux Chapitres 1 et 2) est aussi appelée différentiabilité au sens de Fréchet. Il existe d'autres notions de différentiabilité. L'une, moins forte, est la notion de différentiabilité au sens de Gateaux. On la discute très brièvement ici, essentiellement pour la culture.

DÉFINITION 4.4. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach, Ω un ouvert de E, et $a \in \Omega$ un point de Ω. Soit $f : \Omega \to F$ une application de Ω dans F. On dit que f est Gateaux-différentiable au point a si pour tout $h \in E$ la dérivée directionnelle de f en a suivant h, donnée par la limite*

$$f'(a; h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t} ,$$

existe et si l'application $h \to f'(a; h)$ est linéaire continue.

Toute fonction différentiable au sens classique de Fréchet est différentiable au sens de Gateaux et alors $f'_a(h) = Df(a).(h)$. Par contre la réciproque est fausse. Une fonction peut être Gateaux-différentiable mais pas Fréchet-différentiable (ni même d'ailleurs continue). Par exemple, soit $p > 1$ et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \text{ si } y = |x|^p \text{ et } (x, y) \neq (0, 0), \\ f(x, y) = 1 \text{ sinon .} \end{cases}$$

Alors f est Gateaux-différentiable en $(0, 0)$ de différentielle de Gateaux en $(0, 0)$ nulle. Plus précisément, $f'\left((0, 0); (h, k)\right) = 0$ pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ puisque étant donné $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, $f(th, tk) = f(0, 0) = 1$ pour t petit (à savoir $t \to 0$). Par contre f n'est pas Fréchet-différentiable en $(0, 0)$ puisqu'elle n'y est même pas continue (puisque par exemple $f(x^p, x) = 0$ pour tout $x > 0$ et donc $f(x^p, x) \not\to f(0, 0)$ lorsque $x \to 0^+$).

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction Gateaux-différentiable en a. Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}(f)$ de f en a existent et sont données par $f'(a; e_i)$ où e_i est le $i$ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme la fonction $h \to f'(a; h)$ est linéaire, il existe $p \in \mathbb{R}^n$ tel que $f'(a; h) = \langle p, h \rangle$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien. Par suite, forcément, $f'(a; h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, où $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^n$ est le gradient de f en a, à savoir le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de composantes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ de f en a.

3. Différentiabilité et normes équivalentes

On montre que les notions de différentiabilité et de différentielle sont invariantes par changement de normes équivalentes.

PROPOSITION 4.2. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach, Ω un ouvert de E, et $a \in \Omega$ un point de Ω. Soit $f : \Omega \to F$ une application de Ω dans F différentiable au point a de différentielle en ce point $Df(a) \in L_c(E, F)$. Si $\|\cdot\|'_E$ et $\|\cdot\|'_F$ sont deux autres normes sur E et F, respectivement équivalentes à $\|\cdot\|_E$*

et $\|\cdot\|_F$*, alors* f *est encore différentiable par rapport aux nouvelles normes et sa différentielle par rapport aux nouvelles normes est toujours* $Df(a)$*.*

Démonstration. On commence déjà par remarquer que $L_c(E,F)$ ne change pas par changement de normes équivalentes. Maintenant, comme $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|'_E$ sont équivalentes sur E, dire que $x \to a$ pour $\|\cdot\|_E$ équivaut à dire que $x \to a$ pour $\|\cdot\|'_E$. De même, comme $\|\cdot\|_F$ et $\|\cdot\|'_F$ sont équivalentes sur F, dire que $\varepsilon(x) \to 0$ pour $\|\cdot\|_F$ équivaut à dire que $\varepsilon(x) \to 0$ pour $\|\cdot\|'_F$. Donc dire que l'on a

$$f(x) - f(a) - g(x-a) = \|x-a\|_E \varepsilon(x)$$

pour tout $x \in \Omega$, où $\varepsilon : \Omega \to F$ est telle que $\varepsilon(a) = 0$ et $\varepsilon(x) \to 0$ (pour $\|\cdot\|_F$) lorsque $x \to a$ (pour $\|\cdot\|_E$), équivaut à dire que l'on a

$$f(x) - f(a) - g(x-a) = \|x-a\|'_E \varepsilon(x)$$

pour tout $x \in \Omega$, où $\varepsilon : \Omega \to F$ est telle que $\varepsilon(a) = 0$ et $\varepsilon(x) \to 0$ (pour $\|\cdot\|'_F$) lorsque $x \to a$ (pour $\|\cdot\|'_E$). D'où la proposition. $\square$

4. Différentielles de fonctions composées

On traite de la différentiabilité d'une composée.

Théorème 4.2. *Soient* $(E, \|\cdot\|_E)$*,* $(F, \|\cdot\|_F)$*, et* $(G, \|\cdot\|_G)$ *trois espaces de Banach,* Ω *un ouvert de* E*,* Ω' *un ouvert de* F*, et* $a \in \Omega$ *un point de* Ω*. Soient* $f : \Omega \to F$ *une application de* Ω *dans* F*, et* $g : \Omega' \to G$ *une application de* Ω' *dans* G*. On suppose que* f *est différentiable au point* a*, que* $f(\Omega) \subset \Omega'$*, et que* g *est différentiable au point* $f(a)$*. Alors* $g \circ f : \Omega \to G$ *est différentiable au point* a *de différentielle en ce point* $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$*.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} &g(y) - g\left(f(a)\right) - Dg\left(f(a)\right).\left(y - f(a)\right) = \|y - f(a)\|_F \tilde{\varepsilon}(y) \ , \\ &f(x) - f(a) - Df(a).(x-a) = \|x-a\|_E \varepsilon(x) \ , \end{aligned}$$

où $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to a$ et $\tilde{\varepsilon}(y) \to 0$ lorsque $y \to f(a)$. Posons $y = f(x)$ avec $x \to a$. Alors $y \to f(a)$ par continuité de f en a. Et donc

$$\begin{aligned} &g\left(f(x)\right) - g\left(f(a)\right) - Dg\left(f(a)\right).\left(f(x) - f(a)\right) \\ &\qquad = \|f(x) - f(a)\|_F \hat{\varepsilon}(x) \ , \end{aligned}$$

où $\hat{\varepsilon}(x) \to 0$ lorsque $x \to a$. On a

$$f(x) - f(a) = Df(a).(x-a) + \|x-a\|_E \varepsilon(x) \ .$$

Par continuité de $Df(a)$ (en tant qu'application linéaire donc), on en déduit que

$$\|f(x) - f(a)\|_F = O\left(\|x-a\|_E\right)$$

où par $O\left(\|x-a\|_E\right)$ on entend un terme dominé par $C\|x-a\|_E$ pour $C > 0$ une constante (c'est au moins vrai pour x au voisinage de a, et il n'y a que cela qui nous intéresse). Par continuité et linéarité de $Dg\left(f(a)\right)$,

$$Dg\left(f(a)\right).\left(\|x-a\|_E \varepsilon(x)\right) = \|x-a\|_E \hat{\varepsilon}'(x)$$

où $\hat{\varepsilon}'(x) \to 0$ lorsque $x \to a$. De toutes ces relations on tire que

$$\begin{aligned} &g\left(f(x)\right) - g\left(f(a)\right) - \left(Dg\left(f(a)\right) \circ Df(a)\right).(x-a) \\ &\qquad = \|f(x) - f(a)\|_F \bar{\varepsilon}(x) \ , \end{aligned}$$

où $\bar{\varepsilon}(x) \to 0$ lorsque $x \to a$. Or $Dg\left(f(a)\right) \circ Df(a) \in L_c(E, G)$, et donc $g \circ f$ est différentiable en a avec

$$D\left(g \circ f\right)(a) = Dg\left(f(a)\right) \circ Df(a) .$$

La proposition est démontrée. □

5. Différentielles d'applications particulières

On se propose ici de calculer des différentielles d'applications particulières. Déjà, de façon évidente, une application constante est différentiable en tout point et la différentielle d'une application constante est nulle en tout point. En d'autres termes, si $f : \Omega \to F$ est constante, Ω ouvert de E, alors f est différentieable en tout point a de Ω et $Df(a) \equiv 0$ est l'application linéaire nulle de E dans F. On calcule dans ce qui suit les différentielles des applications linéaires, et multilinéaires.

Théorème 4.3. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach, et $f \in L_c(E, F)$ une application linéaire continue de E dans F. Alors f est différentiable en tout point a de E de différentielle constante sur E donnée par $Df(a) = f$.*

Démonstration. De façon évidente, pour tout $x \in E$,

$$f(x) - f(a) - f(x - a) = 0$$

et on peut donc écrire a fortiori que

$$\|f(x) - f(a) - f(x - a)\|_F = \|x - a\|_E \varepsilon(x)$$

pour tout $x \in E$, où $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to a$ (il suffit de prendre $\varepsilon \equiv 0$), ce qui prouve que f est différentiable au point a de différentielle en ce point $Df(a) = f$. □

L'application $Df : E \to L_c(E, F)$ est continue (puisque constante), et donc f est même de classe C^1 sur E (et ses dérivées successives sont nulles). On aborde maintenant la différentiabilité des applications bilinéaires.

Théorème 4.4. *Soient $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$, $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$, et $(F, \|\cdot\|_F)$ trois espaces de Banach, et $f \in L_c(E_1, E_2; F)$ une application bilinéaire continue de $E_1 \times E_2$ dans F. Alors f est différentiable en tout point $a = (a_1, a_2)$ de $E_1 \times E_2$ de différentielle en ce point donnée par*

$$Df(a).(h) = f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2)$$

pour tout $h = (h_1, h_2)$ dans $E_1 \times E_2$.

Démonstration. On place sur $E_1 \times E_2$ l'une des deux normes équivalentes $\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\|_{E_1} + \|x_2\|_{E_2}$, ou $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{\|x_1\|_{E_1}^2 + \|x_2\|_{E_2}^2}$. Par exemple, on place la norme

$$\|(x_1, x_2)\|_{E_1 \times E_2} = \|x_1\|_{E_1} + \|x_2\|_{E_2} .$$

Soit $a = (a_1, a_2)$ un point fixé de $E_1 \times E_2$, et soit $g : E_1 \times E_2 \to F$ l'application définie par

$$g(h_1, h_2) = f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2)$$

pour tout (h_1, h_2) dans $E_1 \times E_2$. Comme f est bilinéaire, g est une application linéaire de $E_1 \times E_2$ dans F. L'application g est de plus continue car f l'est. En effet,

$$\begin{aligned}
&\|g(h_1,h_2)\|_F \\
&\le \|f(a_1,h_2)\|_F + \|f(h_1,a_2)\|_F \\
&\le \|f\|_{L_c(E_1,E_2;F)}\|a_1\|_{E_1}\|h_2\|_{E_2} + \|f\|_{L_c(E_1,E_2;F)}\|h_1\|_{E_1}\|a_2\|_{E_2} \\
&\le \|f\|_{L_c(E_1,E_2;F)}\left(\|a_1\|_{E_1} + \|a_2\|_{E_2}\right)\|(h_1,h_2)\|_{E_1\times E_2}
\end{aligned}$$

et on obtient ainsi la continuité de l'application linéaire g. Par bilinéarité de f,

$$\begin{aligned}
&f(x_1,x_2) - f(a_1,a_2) - f(a_1,x_2-a_2) - f(x_1-a_1,a_2) \\
&= f(a_1+h_1,a_2+h_2) - f(a_1,a_2) - f(a_1,h_2) - f(h_1,a_2) \\
&= f(h_1,h_2) = f(x_1-a_1,x_2-a_2)\ ,
\end{aligned}$$

où $h_1 = x_1 - a_1$ et $h_2 = x_2 - a_2$. Par suite, pour tout $(x_1,x_2) \in E_1 \times E_2$,

$$\begin{aligned}
&\|f(x_1,x_2) - f(a_1,a_2) - f(a_1,x_2-a_2) - f(x_1-a_1,a_2)\|_F \\
&\le \|f\|_{L_c(E_1,E_2;F)}\|x_1-a_1\|_{E_1}\|x_2-a_2\|_{E_2} \\
&\le \frac{1}{2}\|f\|_{L_c(E_1,E_2;F)}\|(x_1-a_1,x_2-a_2)\|^2_{E_1\times E_2}\ ,
\end{aligned}$$

et on a montré que pour tout $(x_1,x_2) \in E_1 \times E_2$,

$$\begin{aligned}
&f(x_1,x_2) - f(a_1,a_2) - f(a_1,x_2-a_2) - f(x_1-a_1,a_2) \\
&= \|(x_1-a_1,x_2-a_2)\|_{E_1\times E_2}\varepsilon(x_1,x_2)\ ,
\end{aligned}$$

où $\varepsilon(x_1,x_2) \to 0$ lorsque $(x_1,x_2) \to (a_1,a_2)$. En particulier, f est différentiable au point $a = (a_1,a_2)$ de différentielle en ce point

$$Df(a).(h) = f(a_1,h_2) + f(h_1,a_2)$$

pour tout $h = (h_1,h_2)$ dans $E_1 \times E_2$. Le théorème est démontré. □

La proposition que l'on vient de démontrer se généralise aux applications multilinéaires d'ordre quelconque.

THÉORÈME 4.5. *Soient $(E_1,\|\cdot\|_{E_1})$,...,$(E_n,\|\cdot\|_{E_n})$, $(F,\|\cdot\|_F)$ des espaces de Banach. Soit $f \in L_c(E_1,\dots,E_n;F)$ une application n-linéaire continue de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans F. Alors f est différentiable en tout point $a = (a_1,\dots,a_n)$ de $E_1 \times \cdots \times E_n$, de différentielle donnée par*

$$\begin{aligned}
Df(a).(h) &= f(h_1,a_2,\dots,a_n) + f(a_1,h_2,a_3,\dots,a_n) \\
&\quad + \cdots + f(a_1,\dots,a_{n-1},h_n)
\end{aligned}$$

pour tout $h = (h_1,\dots,h_n)$ dans $E_1 \times \cdots \times E_n$.

DÉMONSTRATION. Il est facile de vérifier que $\Phi = Df(a)$ donné par le théorème est linéaire et continue pour la norme produit au départ et la norme de F à l'arrivée. Pour ne pas alourdir la rédaction, on démontre le théorème dans le cas spécial où $n = 3$. On place sur $E_1 \times E_2 \times E_3$ une des normes produits naturelles, par exemple

$$\|(x_1,x_2,x_3)\|_{E_1\times E_2\times E_3} = \|x_1\|_{E_1} + \|x_2\|_{E_2} + \|x_3\|_{E_3}\ .$$

On écrit que

$$\begin{aligned}
&f(x_1,x_2,x_3) - f(a_1,a_2,a_3) \\
&= f(x_1-a_1,a_2,a_3) + f(x_1,x_2-a_2,a_3) + f(x_1,x_2,x_3-a_3)
\end{aligned}$$

de sorte que si Φ est l'application linéaire donnée par $Df(a)$ dans le théorème,

$$\begin{aligned}
&f(x_1,x_2,x_3)-f(a_1,a_2,a_3)-\Phi(x_1-a_1,x_2-a_2,x_3-a_3)\\
&=f(x_1-a_1,x_2-a_2,a_3)+f(x_1,x_2,x_3-a_3)-f(a_1,a_2,x_3-a_3)\\
&=f(x_1-a_1,x_2-a_2,a_3)+f(x_1,x_2-a_2,x_3-a_3)+f(x_1-a_1,a_2,x_3-a_3)\ .
\end{aligned}$$

Par continuité de f en tant qu'application 3-linéaire, on obtient que

$$\begin{aligned}
&\|f(x_1,x_2,x_3)-f(a_1,a_2,a_3)-\Phi(x_1-a_1,x_2-a_2,x_3-a_3)\|_F\\
&\le \|f(x_1-a_1,x_2-a_2,a_3)\|_F+\|f(x_1,x_2-a_2,x_3-a_3)\|_F\\
&\quad+\|f(x_1-a_1,a_2,x_3-a_3)\|_F\\
&\le C_1\|x_1-a_1\|_{E_1}\|x_2-a_2\|_{E_2}+C_2\|x_2-a_2\|_{E_2}\|x_3-a_3\|_{E_3}\\
&\quad C_3\|x_1-a_1\|_{E_1}\|x_3-a_3\|_{E_3}
\end{aligned}$$

où $C_1,C_2,C_3>0$ sont des constantes strictement positives qui ne dépendent pas de x, mais uniquement de f et de a. On en déduit que

$$\begin{aligned}
&\|f(x_1,x_2,x_3)-f(a_1,a_2,a_3)-\Phi(x_1-a_1,x_2-a_2,x_3-a_3)\|_F\\
&\le C\|(x_1-a_1,x_2-a_2,x_3-a_3)\|^2_{E_1\times E_2\times E_3}
\end{aligned}$$

pour tout $x=(x_1,x_2,x_3)$. Et, clairement, $\|(x_1-a_1,x_2-a_2,x_3-a_3)\|^2_{E_1\times E_2\times E_3}$ est un $\|x-a\|_{E_1\times E_2\times E_3}\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x)\to 0$ pour $\|\cdot\|_F$ lorsque $x\to a$ pour $\|\cdot\|_{E_1\times E_2\times E_3}$. On en déduit que f est différentiable au point a de différentielle Φ, ce qui constitue le résultat voulu. □

6. Applications à valeurs dans un produit d'espaces de Banach

On considère $(E,\|\cdot\|_E)$, $(F_1,\|\cdot\|_{F_1})$,..., $(F_k,\|\cdot\|_{F_k})$ des espaces de Banach. On place sur le produit $F=F_1\times\cdots\times F_k$ l'une des deux normes produits définies comme auparavant par

$$\|(y_1,\dots,y_k)\|_{F_1\times\cdots\times F_k}=\sum_{i=1}^k\|y_i\|_{F_i}\ ,\ \text{ou}$$
$$\|(y_1,\dots,y_k)\|_{F_1\times\cdots\times F_k}=\sqrt{\sum_{i=1}^k\|y_i\|^2_{F_i}}\ .$$

Etant donnés Ω un ouvert de E, et $f:\Omega\to F$, avec $F=F_1\times\cdots\times F_k$, une application de Ω dans le produit $F_1\times\cdots\times F_k$, on note $f_i:\Omega\to F_i$ les applications définies par $f=(f_1,\dots,f_k)$. Donc $f(x)=(f_1(x),\dots,f_k(x))$ pour tout $x\in\Omega$.

Proposition 4.3. *L'application $f:\Omega\to F$ est différentiable en un point a de Ω si et seulement si les applications f_i le sont. De plus, pour tout $x\in E$,*

$$Df(a).(x)=(Df_1(a).(x),\dots,Df_k(a).(x))$$

où les $Df(a)\in L_c(E,F)$ et $Df_i(a)\in L_c(E,F_i)$ sont les différentielles de f et f_i en a.

Démonstration. Plaçons sur F la norme

$$\|(y_1,\dots,y_k)\|_{F_1\times\cdots\times F_k}=\sum_{i=1}^k\|y_i\|_{F_i}\ .$$

Un raisonnement avec l'autre norme donnerait le même résultat puisque différentiabilité et différentielle sont des notions invariantes par changement de normes équivalentes. Supposons que f est différentiable en a. Il existe alors $g \in L_c(E,F)$ telle que

$$\|f(x) - f(a) - g(x-a)\|_F = \|x-a\|_E \varepsilon(x) \tag{4.6}$$

pour tout $x \in \Omega$, où $\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}^+$ est telle que $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to a$. Clairement g s'écrit sous la forme $g = (g_1, \dots, g_k)$, où les $g_i : E \to F_i$ sont linéaires continues de E dans F_i. Comme

$$\|f(x) - f(a) - g(x-a)\|_F = \sum_{i=1}^{k} \|f_i(x) - f_i(a) - g_i(x-a)\|_{F_i} \ ,$$

on déduit de (4.6) que pour tout i,

$$\|f_i(x) - f_i(a) - g_i(x-a)\|_{F_i} = \|x-a\|_E \varepsilon(x) \ .$$

Ainsi f_i est différentiable au point a, et $g_i = Df_i(a)$. A l'inverse, on obtient tout aussi facilement que si les f_i sont différentiables au point a, alors f l'est aussi avec

$$Df(a).(x) = (Df_1(a).(x), \dots, Df_k(a).(x)) \ .$$

D'où la proposition. □

Une application bien utile de cette proposition et de la proposition portant sur la différentiabilité des applications bilinéaires est donnée par le corollaire suivant.

COROLLAIRE 4.1. *Soient* $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ *deux espaces de Banach. Soit* $\Phi : E \times E \to F$ *une application bilinéaire continue de* $E \times E$ *dans* F, *donc* $\Phi \in L_c(E,E;F)$. *L'application* $f : E \to F$ *définie par* $f(x) = \Phi(x,x)$ *est différentiable sur* E *de différentielle en tout point* a *de* E *donnée par* $Df(a).(x) = \Phi(a,x) + \Phi(x,a)$ *pour tout* $x \in E$. *En particulier,* $Df(a).(x) = 2\Phi(a,x)$ *pour tout* $x \in E$ *si* Φ *est symétrique.*

DÉMONSTRATION. On écrit que f est la composée de Φ et de l'application $F : E \to E \times E$ définie par $F(x) = (x,x)$. On vérifie facilement que F est différentiable sur E de différentielle en a donnée par

$$DF(a).(x) = (x,x) \ .$$

Par différentiabilité des fonctions composées, et différentiabilité des applications bilinéaires, on en déduit que

$$Df(a).(x) = D\Phi(F(a)).\,(DF(a).(x)) = D\Phi(a,a).(x,x) = \Phi(a,x) + \Phi(x,a)$$

pour tout $x \in E$, et donc le corollaire. □

Une autre façon de voir les choses consiste à écrire que

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \Phi(a+h, a+h) \\ &= f(a) + \Phi(a,h) + \Phi(h,a) + \Phi(h,h) \\ &= f(a) + F_a(h) + \|h\|_E \varepsilon(h) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon(h) \to 0$ dans F lorsque $h \to 0$ dans E, puisque $\|\Phi(h,h)\|_F \le C\|h\|_E^2$, et $F_a : E \to F$ qui est linéaire et continue (pusique Φ l'est). Par suite f est différentiable en a et $Df(a).(h) = F_a(h)$, ce qui est le résultat voulu.

A titre d'application immédiate du résultat, notons $L^2(\mathbb{R})$ l'espace de Lebesgue des fonctions mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont de carré intégrables, à savoir qui sont telles que $\int_R u^2 dx < +\infty$. La norme

$$\|u\|_{L^2} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} u^2 dx}$$

fait de $L^2(\mathbb{R})$ un espace de Banach. L'application $f : L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $u \to \int_{\mathbb{R}} u^2 dx$ est alors différentiable sur $L^2(\mathbb{R})$ de différentielle

$$Df(u).(v) = 2\int_{\mathbb{R}} uvdx$$

En effet, $(u,v) \to \int_{\mathbb{R}} uvdx$ est une forme bilinéaire symétrique continue (par Cauchy-Schwarz) sur $L^2(\mathbb{R})$ et on peut appliquer le corollaire que l'on vient de démontrer.

7. Pseudo produits d'applications différentiables

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$, $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$, et $(F, \|\cdot\|_F)$ quatre espaces de Banach. Soient de plus Ω un ouvert de E, $u_1 : \Omega \to E_1$ et $u_2 : \Omega \to E_2$ deux applications de Ω dans E_1 et E_2, et $f : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire continue de $E_1 \times E_2$ dans F. On définit le pseudo-produit u de u_1 et u_2 comme étant l'application $u : \Omega \to F$ donnée par

$$u(x) = f\left(u_1(x), u_2(x)\right) \ .$$

On parle de pseudo-produit par analogie avec le cas réel où $u_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $u(x) = u_1(x)u_2(x)$ (à savoir $f(x,y) = xy$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). On démontre la proposition suivante.

Proposition 4.4. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$, $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$, et $(F, \|\cdot\|_F)$ quatre espaces de Banach. Soient de plus Ω un ouvert de E, $u_1 : \Omega \to E_1$ et $u_2 : \Omega \to E_2$ deux applications de Ω dans E_1 et E_2, et $f : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire continue de $E_1 \times E_2$ dans F. Si u_1, u_2 sont différentiables en un point a, alors $u : \Omega \to F$ est aussi différentiable en a et*

$$Du(a).(x) = f\left(Du_1(a).(x), u_2(a)\right) + f\left(u_1(a), Du_2(a).(x)\right)$$

pour tout $x \in E$.

Démonstration. On écrit que u est la composée de f et de l'application $F : \Omega \to E_1 \times E_2$ définie par $F(x) = (u_1(x), u_2(x))$. Clairement F est différentiable en a si u_1 et u_2 sont différentiables en a, et sa différentielle en a est donnée par

$$DF(a).(x) = \left(Du_1(a).(x), Du_2(a).(x)\right)$$

pour tout $x \in E$. Par différentiabilité des fonctions composées, et différentiabilité des applications bilinéaires, on en déduit que

$$\begin{aligned} Du(a).(x) &= Df(F(a)).\left(DF(a).(x)\right) \\ &= Df\left(u_1(a), u_2(a)\right).\left(Du_1(a).(x), Du_2(a).(x)\right) \\ &= f\left(Du_1(a).(x), u_2(a)\right) + f\left(u_1(a), Du_2(a).(x)\right) \end{aligned}$$

pour tout $x \in E$. La proposition est démontrée. □

On retrouve avec cette proposition, par exemple dans le cas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la formule de Leibniz $(uv)' = u'v + uv'$.

8. Dérivées partielles

On considère ici le cas où l'espace de départ est un produit d'espaces de Banach. Soient donc $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$,...,$(E_k, \|\cdot\|_{E_k})$, et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces de Banach. On place sur $E = E_1 \times \cdots \times E_k$ l'une des deux normes produits équivalentes

$$\|(x_1, \ldots, x_k)\|_{E_1\times\cdots\times E_k} = \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|_{E_i} \text{ , ou}$$

$$\|(x_1, \ldots, x_k)\|_{E_1\times\cdots\times E_k} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \|x_i\|_{E_i}^2} \ .$$

On place par exemple la première de ces deux normes. Soit Ω un ouvert de E, $a \in \Omega$ un point de Ω, et $f : \Omega \to F$ une application. On note $a = (a_1, \ldots, a_k)$ où les $a_i \in E_i$. Comme Ω est un ouvert, il existe $r_i = r_i(a)$, $r_i > 0$, tel que pour tout $x_i \in B_{a_i}(r_i)$, on ait $(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_k) \in \Omega$, où $B_{a_i}(r_i)$ est la boule de centre a_i et rayon r_i dans E_i. En effet, comme $a \in \Omega$ et Ω est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_a(r) \subset \Omega$, et il reste à remarquer que $(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_k) \in B_a(r)$ pour tout $x_i \in B_{a_i}(r)$ de sorte que l'on peut prendre $r_i = r$.

Cette remarque faite, on peut maintenant construire k applications partielles f_i de f en a, définies au voisinage de a_i par

$$f_a^i(x) = f\left(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_k\right) \ .$$

Donc $f_a^i : \Omega_i \to F$ où $\Omega_i \subset E_i$ est un voisinage de a_i dans E_i, à savoir Ω_i est tel que $B_{a_i}(r_i) \subset \Omega_i$ pour un certain $r_i > 0$.

PROPOSITION 4.5. *Si $f : \Omega \to F$ est différentiable au point $a \in \Omega$, les applications partielles $f_a^i : \Omega_i \to F$ sont différentiables au point a_i pour tout $i = 1, \ldots, k$, et*

$$Df(a).(x) = \sum_{i=1}^{k} Df_a^i(a_i).(x_i)$$

pour tout $x = (x_1, \ldots, x_k)$ dans E.

Les $Df_a^i(a_i)$ sont souvent notés $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Attention, ce ne sont pas des réels (comme au Chapitre 2) mais des applications linéaires continues:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in L_c(E_i, F)$$

pour tout $i = 1, \ldots, k$. La relation du théorème s'écrit alors

$$Df(a).(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).(x_i)$$

pour tout $x = (x_1, \ldots, x_k)$ dans E. Les dérivées partielles d'une application sont ainsi liées à la structure d'espace produit au départ. On démontre la proposition dans ce qui suit.

DÉMONSTRATION. L'application $\theta_i : E_i \to E$ qui à x associe

$$\theta_i(x) = (a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_k)$$

est clairement différentiable au point a_i de différentielle en ce point l'application $D\theta_i(a_i) \in L_c(E_i, E)$ donnée par

$$D\theta_i(a_i).(x) = (0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0)$$

pour tout $x \in E_i$. On pourra par exemple appliquer ce qui a été dit dans la section précédente. Comme $f_a^i = f \circ \theta_i$, on obtient que f_a^i est bien différentiable en a_i. Sa différentielle vaut $Df_a^i(a_i) = Df(a) \circ D\theta_i(a_i)$, et donc

$$Df(a).(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0) = Df_a^i(a_i).(x_i)$$

pour tout $x_i \in E_i$. En écrivant que

$$Df(a).(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^k Df(a).(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0) = \sum_{i=1}^k Df_a^i(a_i).(x_i) \ ,$$

on obtient la proposition. □

9. Applications de $\mathbb{R}$ dans un Banach

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en un point x, alors on récupère deux notions de dérivées en x, la dérivée $f'(x)$ et la différentielle $Df(x)$, toutes deux reliées par

$$Df(x).(h) = f'(x)h$$

pour tout $h \in \mathbb{R}$. La remarque s'étend au cas où l'espace d'arrivé est un Banach (mais l'espace de départ est $\mathbb{R}$). Supposons que f soit une fonction de $\mathbb{R}$, ou d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace de Banach $(F, \|\cdot\|_F)$. A savoir $f : \mathbb{R} \to F$. Alors là encore on peut définir une dérivée $f'(x)$, avec $f'(x) \in F$, et une différentielle $Df(x) \in L_c(\mathbb{R}, F)$. Et là encore, les deux sont reliées par la formule

$$Df(x).(h) = hf'(x)$$

pour tout $h \in \mathbb{R}$ (le membre de droite fait sens comme un réel que multiplie un vecteur). On a $\|Df(x)\|_{L_c(\mathbb{R},F)} = \|f'(x)\|_F$. Plus précisemment, on définit $f'(x)$ par

$$f'(x) = \lim_{y \to x, y \neq x} \frac{1}{y - x} \left(f(y) - f(x)\right)$$

et on vérifie que

(1) si $f'(x)$ existe, alors f est différentiable en x et $Df(x).(h) = hf'(x)$ pour tout $h \in \mathbb{R}$,

(2) si f est différentiable en x, alors $f'(x)$ existe et $Df(x).(h) = hf'(x)$ pour tout $h \in \mathbb{R}$.

Pour le voir on commence par remarquer qu'une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel F est forcément du type $h \to hX$ pour X un vecteur de F (tout simplement: $X = f(1)$). Si f est différentiable en a alors il existe $X \in F$ tel que

$$f(x) - f(a) - (x - a)X = |x - a|\varepsilon(x) \ ,$$

où $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to a$. En divisant par $x - a$ et en faisant tendre $x \to a$, on obtient que

$$\lim_{x \to a, x \neq a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = X \ .$$

Donc $X = f'(a)$ et (2) est démontré. A l'inverse, si

$$\lim_{x\to a, x\neq a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \ ,$$

alors

$$\lim_{x\to a, x\neq a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} = 0 \ ,$$

et donc

$$f(x)-f(a)-(x-a)f'(a) = |x-a|\varepsilon(x) \ ,$$

où $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to a$. D'où (1).

10. Le théorème des accroissements finis

On l'a déjà vu au Chapitre 2, le théorème des accroissements finis en égalité, tel qu'énoncé pour les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, doit être modifié lorsqu'on passe aux dimensions supérieures. Un des éléments importants de la modification est constitué du lemme suivant.

Lemme 4.2. *Soient $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach, $f : [a,b] \to F$, et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ respectivement dans F et $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont toutes deux différentiables sur $]a,b[$ et que*

$$\|Df(x)\|_{L_c(\mathbb{R},F)} \leq g'(x)$$

pour tout $x \in]a,b[$, où $g'(x)$ est la dérivée de g, et $\|\cdot\|_{L_c(\mathbb{R},F)}$ est la norme de $L_c(\mathbb{R},F)$. Alors $\|f(b)-f(a)\|_F \leq g(b)-g(a)$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On va montrer que pour tout $x \in [a,b]$,

$$\|f(x)-f(a)\|_F \leq g(x)-g(a)+\varepsilon(x-a)+\varepsilon \ . \qquad (\star)$$

Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, il s'ensuivra en posant $x = b$ et en faisant $\varepsilon \to 0$ que l'on a bien que $\|f(b)-f(a)\|_F \leq g(b)-g(a)$. Notons $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction

$$\Phi(x) = \|f(x)-f(a)\|_F - g(x) + g(a) - \varepsilon(x-a) \ .$$

On veut montrer que $\Phi(x) \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [a,b]$. Il est déjà clair, puisque f et g le sont, que la fonction Φ est continue sur $[a,b]$. Comme $\Phi(a) = 0$, et donc $\Phi(a) < \varepsilon$, il suit de la continuité de Φ que $\Phi(x) \leq \varepsilon$ pour $x \geq a$ voisin de a. Maintenant, soit $\Phi(x) \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [a,b]$, auquel cas on a l'inégalité que l'on voulait, soit, en raisonnant par l'absurde, on peut supposer qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que $\Phi(d) > \varepsilon$. Notons

$$I = \Big\{ x \in [a,b] \ / \ \Phi(t) \leq \varepsilon \text{ pour tout } t \in [a,x] \Big\} \ .$$

En raison de ce que l'on vient de dire, I est un intervalle du type $I = [a,c]$ (fermé à droite par continuité de Φ) avec $a < c$ et $c < b$ (car $c \leq d$). Toujours par continuité,

$$\Phi(c) = \varepsilon \ .$$

Comme $c \in]a,b[$, on a par hypothèse que $\|Df(c)\|_{L_c(\mathbb{R},F)} \leq g'(c)$. Par définition de $Df(c)$,

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon' > 0 \ , \ \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in]a,b[\ , \ |x-c| < \eta \\ &\Rightarrow \ \|f(x)-f(c)-Df(c).(x-c)\|_F \leq \varepsilon'|x-c| \ . \end{aligned}$$

En posant $\varepsilon' = \varepsilon/2$, et par inégalité triangulaire, on récupère que

$$\frac{\|f(x)-f(c)\|_F}{|x-c|} - \frac{\varepsilon}{2} \leq \|Df(c)\|_{L_c(\mathbb{R},F)}$$

pour $x \in]c, c+\eta[$. De même, quitte à diminuer $\eta > 0$, on va aussi pouvoir montrer que

$$g'(c) \leq \frac{g(x)-g(c)}{x-c} + \frac{\varepsilon}{2}$$

pour $x \in]c, c+\eta[$. L'inégalité $\|Df(c)\|_{L_c(\mathbb{R},F)} \leq g'(c)$ du théorème donne alors que

$$\|f(x)-f(c)\|_F \leq g(x) - g(c) + \varepsilon(x-c)$$

pour tout $c \leq x < c+\eta$. Comme $\Phi(c) = \varepsilon$, on a que

$$\|f(c)-f(a)\|_F - g(c) + g(a) - \varepsilon(c-a) = \varepsilon \ .$$

Il suit de ces deux dernières relations que

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(a)\|_F &\leq \|f(x)-f(c)\|_F + \|f(c)-f(a)\|_F \\ &\leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon\end{aligned}$$

pour $c \leq x < c+\eta$, et donc qu'il y a des $x > c$ qui sont tels que $x \in I$, ce qui est impossible puisque $I = [a, c]$. Par l'absurde on a donc montré $\Phi(x) \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [a, b]$. Le lemme suit facilement. $\square$

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach, et soit Ω un ouvert de E. Etant donnés $x, y \in \Omega$ deux points dans Ω, on dit que le segment $[x, y]$ est entièrement contenu dans Ω si pour tout $t \in [0, 1]$,

$$tx + (1-t)y \in \Omega \ .$$

On démontre la version vectorielle du théorème des accroissements finis.

THÉORÈME 4.6 (Théorème des accroissements finis.). *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach, Ω un ouvert de E, et $f : \Omega \to F$ une application différentiable dans Ω. Soient aussi $x, y \in \Omega$ deux points de Ω avec la propriété que le segment $[x, y]$ est entièrement contenu dans Ω. Alors*

$$\|f(y) - f(x)\|_F \leq \Lambda \|y - x\|_E \ ,$$

où $\Lambda = \sup_{t \in [0,1]} \|Df(tx + (1-t)y)\|_{L_c(E,F)}$ peut être infini.

Une situation où l'on sait que Λ est fini est la situation où f est de classe C^1, car alors Λ est la borne supérieure d'une fonction continue, la fonction $t \to \|Df(tx + (1-t)y)\|_{L_c(E,F)}$, sur le compact $[0, 1]$, et une fonction continue sur un compact est bornée (et atteint ses bornes).

DÉMONSTRATION. On note h la fonction de t définie par

$$h(t) = f\left(tx + (1-t)y\right) \ .$$

Alors h est définie et différentiable sur un intervalle du type $]-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ (car $[x, y]$ est contenu dans Ω, et Ω est un ouvert). Sa différentielle en un point t est donnée par le théorème de composition en remarquant que h est la composée de f avec $L(t) = tx + (1-t)y$. Sa différentielle en t vaut alors $Dh(t) = Df(L(t)) \circ DL(t)$, et sa dérivée en t (on rappelle que $h'(t) = Dh(t).(1)$) vaut donc

$$h'(t) = Df(L(t)).(x-y) \ .$$

En particulier,

$$\|Dh(t)\|_{L_c(\mathbb{R},F)} = \|h'(t)\|_F \\ \leq \Lambda\|y-x\|_E = g'(t)$$

pour tout $t \in [0,1]$, où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$g(t) = \Lambda\|y-x\|_E t \ .$$

Avec le lemme il suit que

$$\|h(1)-h(0)\|_F \leq g(1)-g(0) \ ,$$

ce qui est l'inégalité du théorème des accroissements finis. □

Par définition, un ouvert Ω est dit convexe si pour tous $x, y \in \Omega$, le segment $[x, y]$ est contenu dans Ω (par exemple une boule dans un espace vectoriel normé est convexe). Par ailleurs, on rappelle qu'une application $f : X \to Y$ entres espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) est dite lipschitzienne sur X s'il existe un réel $K \geq 0$ tel que

$$d_Y\left(f(x), f(y)\right) \leq K d_X(x,y)$$

pour tous $x, y \in X$. Une fonction lipschitzienne est toujours uniformément continue.

Corollaire 4.2. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach, Ω un ouvert convexe de E, et $f : \Omega \to F$ une application différentiable dans Ω. On suppose qu'il existe $K \geq 0$ tel que pour tout $x \in \Omega$, $\|Df(x)\|_{L_c(E,F)} \leq K$. Alors*

$$\|f(y)-f(x)\|_F \leq K\|y-x\|_E$$

pour tous $x, y \in \Omega$. En particulier, f est lipschitzienne sur Ω.

Démonstration. Le résultat suit directement du théorème des accroissements finis. □

Toujours par définition, un ouvert Ω est dit connexe s'il n'est pas réunion de deux ouverts disjoints non vides. Donc Ω ouvert est connexe s'il n'existe pas Ω_1 et Ω_2 deux ouverts non vides tels que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Une propriété remarquable des espaces vectoriels normés est la suivante: “Un ouvert Ω d'un espace vectoriel normé est connexe si et seulement si pour tous $x, y \in \Omega$ il existe $\gamma : [0,1] \to \Omega$ un chemin continu qui ait x et y pour extrémités, à savoir qui soit tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.” On dit encore qu'un ouvert d'un espace vectoriel normé est connexe si et seulement si il est connexe par arc.

Corollaire 4.3. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach, Ω un ouvert connexe de E, et $f : \Omega \to F$ une application différentiable dans Ω. Si $Df(x) \equiv 0$ pour tout $x \in \Omega$, alors f est constante sur Ω.*

Démonstration. Il y a un peu plus à dire que pour le corollaire précédent. Les boules étant convexes, si f est telle que $Df(x) \equiv 0$ pour tout $x \in \Omega$, alors f est localement constante sur Ω en vertue du corollaire précédent. A savoir: pour tout $x \in \Omega$, $\exists r > 0$ tel que $f = Cste$ sur $B_x(r)$. Soient maintenant x et y deux points dans Ω. Comme Ω est connexe, il existe $\gamma : [0,1] \to \Omega$ un chemin continu tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. L'application $f \circ \gamma : [0,1] \to F$ est continue sur $[0,1]$, comme composée d'applications continues, et localement constante sur $[0,1]$ puisque f est localement constante sur Ω. Notons $g = f \circ \gamma$, et soit

$$I = \left\{t \in [0,1] \ / \ \forall \tau \in [0,t] \ , \ g(\tau) = g(0)\right\} \ .$$

Comme g est localement constante au voisinage de 0 (f est localement constante au voisinage de x) on peut écrire que I n'est pas vide. Alors I est un intervalle du type $I = [0, t_0]$. Or $t_0 < 1$ est impossible car alors f devrait être constante sur un intervalle du type $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ pour un certain $\varepsilon > 0$, et donc on devrait avoir $t_0 \geq t_0 + \varepsilon$, ce qui est impossible. Donc $t_0 = 1$ et $f(x) = f(y)$. Or x et y sont quelconques dans Ω. D'où le corollaire. $\square$

11. Accroissements finis et dérivées partielles

On revient à la notion de dérivée partielle et on considère donc le cas où l'espace de départ est un produit d'espaces de Banach. Soient $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}),\dots,(E_k, \|\cdot\|_{E_k})$, et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces de Banach. On place sur $E = E_1 \times \cdots \times E_k$ l'une des normes produits équivalentes habituelles. On démontre alors le théorème suivant.

THÉORÈME 4.7. *Soient $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}),\dots,(E_k, \|\cdot\|_{E_k})$, et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces de Banach, Ω un ouvert de $E_1 \times \cdots \times E_k$, et $f : \Omega \to F$ une application. Alors f est de classe C^1 sur Ω si et seulement si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ de f existent pour tout i et sont continues sur Ω.*

DÉMONSTRATION. Pour simplifier on démontre le théorème dans le cas où $k = 2$. On change alors les notations pour considérer trois espaces de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, et $(G, \|\cdot\|_G)$, Ω un ouvert de $E \times F$, et $f : \Omega \to G$. On note (x, y) la variable de $E \times F$. Supposons pour commencer que f soit de classe C^1 sur Ω. Alors ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent en tout point de Ω et on a que

$$Df(x,y).(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).(h) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).(k)$$

pour tous $(x, y) \in \Omega$ et tous $(h, k) \in E \times F$. On a déjà démontré ce résultat. Reste maintenant à montrer que les dérivées partielles sont bien C^1 si f l'est. On a

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}(x,y).(h) = Df(x,y).(h,0) \ , \text{ et} \\ &\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).(k) = Df(x,y).(0,k) \end{aligned}$$

pour tous $(x, y) \in \Omega$, tous $h \in E$, et tous $k \in F$. On en déduit que

$$\begin{aligned} &\|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\|_{L_c(E,G)} \\ &= \sup_{h\in E, h\neq 0} \frac{\|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y).(h) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).(h)\|_G}{\|h\|_E} \\ &= \sup_{h\in E, h\neq 0} \frac{\|\left(Df(x,y) - Df(a,b)\right).(h,0)\|_G}{\|h\|_E} \\ &\leq \|Df(x,y) - Df(a,b)\|_{L_c(E\times F,G)} \end{aligned}$$

pour tous (a, b) et (x, y) dans Ω. En particulier, la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en (a, b) suit de celle de Df en (a, b). Un raisonnement analogue peut être fait pour $\frac{\partial f}{\partial y}$ et on voit donc que si f est de classe C^1 sur Ω alors $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont aussi de classe C^1 sur Ω. Réciproquement, on suppose maintenant que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur Ω. Etant donné $(a,b) \in \Omega$, on écrit que

$$\begin{aligned}
&f(x,y) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).(x-a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).(y-b) \\
&= f(x,y) - f(a,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).(x-a) \\
&\ + f(a,y) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).(y-b) \ .
\end{aligned}$$

Pour (x,y) suffisamment proche de (a,b) les points (a,b), (a,y), et (x,y) vont être dans une boule $B_{(a,b)}(r)$, avec $r > 0$ petit de sorte que la boule soit contenue dans Ω. Soit $\varepsilon > 0$. Comme les dérivées partielles de f sont continues, quitte à choisir $r > 0$ suffisamment petit on va pouvoir écrire que

$$\begin{aligned}
&\|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\|_{L_c(E,G)} < \frac{\varepsilon}{2} \ , \text{ et} \\
&\|\frac{\partial f}{\partial y}(a,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\|_{L_c(F,G)} < \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

pour tous $(x,y) \in B_{(a,b)}(r)$. On applique maintenant le théorème des accroissements finis aux applications

$$\begin{aligned}
&g_1 : x \to f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).(x-a) \ , \text{ et} \\
&g_2 : y \to f(a,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).(y-b) \ .
\end{aligned}$$

Ces applications sont différentiables de différentielles respectives

$$\begin{aligned}
Dg_1(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \ , \text{ et} \\
Dg_2(y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(a,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \ .
\end{aligned}$$

Le théorème des accroissements finis appliqué à g_1 et g_2 donne alors que

$$\|g_1(x) - g_1(a)\|_G \le \frac{\varepsilon}{2}\|x-a\|_E \text{ et } \|g_2(y) - g_2(b)\|_G \le \frac{\varepsilon}{2}\|y-b\|_F$$

soit encore que

$$\begin{aligned}
&\|f(x,y) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).(x-a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).(y-b)\|_G \\
&\le \frac{\varepsilon}{2}\|x-a\|_E + \frac{\varepsilon}{2}\|y-b\|_F \\
&\le \varepsilon\|(x,y)-(a,b)\|_{E\times F}
\end{aligned}$$

pour tous $(x,y) \in B_{(a,b)}(r)$. En d'autres termes on a montré que f est différentiable en tout point (a,b) de Ω de différentielle en ce point l'application donnée par

$$Df(a,b).(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).(h) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).(k)$$

pour tous $(h,k) \in E\times F$. Reste à montrer que $Df : \Omega \to L_c(E\times F, G)$ est continue. En écrivant que

$$\begin{aligned}
&\|Df(x,y) - Df(a,b)\|_{L_c(E\times F,G)} \\
&= \sup_{(h,k)\neq(0,0)} \frac{\|Df(x,y).(h,k) - Df(a,b).(h,k)\|_G}{\|h\|_E + \|k\|_F} \\
&\leq \sup_{(h,k)\neq(0,0)} \frac{\|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y).h - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).h\|_G}{\|h\|_E + \|k\|_F} \\
&\quad + sup_{(h,k)\neq(0,0)} \frac{\|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).k - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).k\|_G}{\|h\|_E + \|k\|_F} \\
&\leq \|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\|_{L_c(E,G)} + \|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\|_{L_c(F,G)}
\end{aligned}$$

on voit que la continuité de Df en (a,b) suit de la continuité des dérivées partielles de f en (a,b). D'où le théorème. $\square$

12. Le théorème d'inversion locale

Par définition on appellera voisinage ouvert d'un point a (dans un espace de Banach E) tout ouvert contenant a. On dira qu'une application $f : U \to V$ entre deux ouverts d'espaces de Banach est un C^1-difféomorphisme de U sur V si:

(i) f est de classe C^1 sur U,
(ii) f est bijective de U sur V,
(iii) f^{-1} est de classe C^1 sur V.

On note $\mathrm{Isom}(E,F)$ le sous espace de $L_c(E,F)$ constitué des isomorphismes continus de E sur F. Le théorème de Banach (Théorème 3.17) donne que si $\varphi \in L_c(E,F)$ est bijective de E sur F (E et F des Banach) alors automatiquement φ^{-1} est continue et donc $\varphi \in \mathrm{Isom}(E,F)$.

Théorème 4.8 (Théorème d'inversion locale). *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach, Ω un ouvert de E, et $f : \Omega \to F$ une application de classe C^1. Soit $a \in \Omega$. On suppose que $Df(a) \in Isom(E,F)$ est un isomorphisme de E sur F. Alors il existe un voisinage ouvert U de a, $U \subset \Omega$, et un voisinage ouvert V de $f(a)$ pour lesquels f est un C^1-difféomorphisme de U sur V.*

Le théorème d'inversion locale est long à démontrer. Pour ne pas trop alourdir la rédaction on va se limiter à commenter le théorème, sans le démontrer. Pour une preuve complète on renvoie au remarquable ouvrage d'Henri Cartan [*Cours de Calcul Différentiel*, Hermann, 1982]. Dans le cas de la dimension finie, on renvoie aussi à la preuve faite pour le théorème d'inversion locale au Chapitre 2.

Une première remarque est que si l'application $f : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme de U sur V, alors pour tout $x \in U$ on a $Df(x) \in \mathrm{Isom}(E,F)$ et, de plus,

$$Df(x)^{-1} = Df^{-1}\left(f(x)\right) \ . \tag{4.7}$$

En effet, $f \circ f^{-1}(y) = y$ pour tout $y \in V$ tandis que $f^{-1} \circ f(x) = x$ pour tout $x \in U$. On différencie ces relations et on obtient alors avec la formule de composition que

$$Df^{-1}\left(f(x)\right) \circ Df(x) = Id_E \text{ et } Df\left(f^{-1}(y)\right) \circ Df^{-1}(y) = Id_F \ .$$

En posant $y = f(x)$, on trouve la relation annoncée. On peut alors voir le théorème d'inversion locale comme une réciproque locale de cette propriété: si $Df(x)$ est un isomorphisme pour un x, alors f est un C^1-difféomorphisme au voisinage de x.

Une seconde remarque concerne le cas de la dimension finie. Dans ce cas on rappelle qu'il convient déjà de demander que les deux espaces aient même dimensions (car il n'y a pas d'isomorphisme entres espaces de dimensions différentes). Et on rappelle que lorsque $E = F = \mathbb{R}^n$ (tout espace vectoriel de dimension n est un $\mathbb{R}^n$ par choix d'une base) la condition $Df(x) \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ équivaut à la non nullité du jacobien de f en x (voir le Chapitre 2).

On énonce et démontre maintenant une version dite "globale" du théorème d'inversion locale.

COROLLAIRE 4.4. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach, Ω un ouvert de E, et $f : \Omega \to F$ une application de classe C^1. Alors f est un C^1-difféomorphisme de Ω sur $f(\Omega)$ si et seulement si f est injective sur Ω et $Df(x) \in Isom(E, F)$ pour tout $x \in \Omega$.*

DÉMONSTRATION. Si f est un C^1-difféomorphisme de Ω sur un ouvert $\Omega' = f(\Omega)$ de F alors clairement f est injective sur Ω (car bijectif implique injectif), et on a (cf. ci-dessus) automatiquement que $Df(x) \in \text{Isom}(E, F)$ pour tout $x \in \Omega$. Réciproquement, supposons que f soit injective sur Ω et que $Df(x) \in \text{Isom}(E, F)$ pour tout $x \in \Omega$. Comme "bijectif équivaut à injectif et surjectif", il est clair que f réalise une bijection de Ω sur $f(\Omega)$. Par le théorème d'inversion locale, pour tout $x \in \Omega$ il existe U un voisinage ouvert de x dans Ω, et V un voisinage ouvert de $f(x)$ dans $f(\Omega)$ tels que f réalise un C^1-difféomorphisme de U sur V. Une première conséquence est que tout $y = f(x)$ dans $f(\Omega)$ possède un voisinage ouvert $V \subset f(\Omega)$. Il s'ensuit que $f(\Omega)$ est donc bien un ouvert. Une seconde conséquence est que tout $y = f(x)$ dans $f(\Omega)$ possède un voisinage ouvert $V \subset f(\Omega)$ sur lequel la bijection réciproque $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ est de classe C^1 (il n'y a qu'une application réciproque f^{-1}). Et être de classe C^1 au voisinage de tout point d'un ouvert ou être de classe C^1 sur l'ouvert sont deux notions identiques. Il s'ensuit que f^{-1} est de classe C^1 sur $f(\Omega)$ et donc que f est bien un C^1-difféomorphisme de Ω sur un ouvert $\Omega' = f(\Omega)$ de F. D'où le corollaire. $\square$

En anticipant sur la notion d'application de classe C^p, on notera que la classe de différentiabilité s'adapte au théorème d'inversion locale: on peut remplacer C^1 par n'importe quel C^p du moment que $p \geq 1$.

LEMME 4.3. *La classe de différentiabilité s'adapte au théorème d'inversion locale. Si f est de classe C^p avec $p \geq 1$ alors on récupère dans le théorème d'inversion locale, ainsi que dans sa version globale, un C^p-difféomorphisme (et non pas uniquement un C^1-difféomorphisme).*

DÉMONSTRATION. Un des ingrédients essentiel de la preuve est que $\text{Isom}(E, F)$ est un ouvert de $L_c(E, F)$ et que l'application $\Phi : u \to u^{-1}$ de $\text{Isom}(E, F)$ dans $L_c(F, E)$ est de classe C^∞. En dimension finie, en passant par les déterminants et les formules d'inversion des matrices, cette affirmation est assez simple à démontrer. En dimension infinie elle est plus subtile et on renvoie là encore au remarquable ouvrage d'Henri Cartan [Cours de Calcul Différentiel, Hermann, 1982] pour sa preuve. La formule (4.7) donne maintenant que

$$Df^{-1} = \Phi \circ Df \circ f^{-1}$$

et il est alors facile de montrer par induction finie que si f est un C^1-difféomorphisme et de classe C^p alors f^{-1} est aussi de classe C^p. $\square$

13. Le théorème des fonctions implicites

Le théorème des fonctions implicites est plus délicat à comprendre que le théorème d'inversion locale (les deux théorèmes sont pourtant équivalents l'un à l'autre). En gros, avec le théorème des fonctions implicites, on veut dire que si $f : E \times F \to G$ est une application avec des hypothèses "convenables", alors une équation du type $f(x, y) = 0$ va définir (implicitement, d'où le nom du théorème) une fonction $g : E \to F$ telle que

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x) \ .$$

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach. On place sur $E \times F$ une des normes produit usuelles.

Théorème 4.9 (Théorème des fonctions implicites). *On considère $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ trois espaces de Banach. Soit Ω un ouvert de $E \times F$, et $f : \Omega \to G$ une application de classe C^1. Soit $(a, b) \in \Omega$ tel que $f(a, b) = 0$. On suppose que*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \in Isom(F, G) \ .$$

Alors il existe U un voisinage ouvert de (a, b) contenu dans Ω, il existe un voisinage V de a dans E, et il existe $g : V \to F$ de classe C^1 tels que si $(x, y) \in U$ vérifie $f(x, y) = 0$, alors $x \in V$ et $y = g(x)$. Réciproquement si $x \in V$ et $y = g(x)$, alors $(x, y) \in U$ et $f(x, y) = 0$.

On a supposé ici que $f(a, b) = 0$. Si ce n'est pas le cas il suffit de considérer l'application $\tilde{f} = f - f(a, b)$. Par ailleurs on a bien sûr que $b = g(a)$ puisque $(a, b) \in U$.

Démonstration. On ramène la preuve du théorème des fonctions implicites au théorème d'inversion locale. On considère $\tilde{f} : \Omega \to E \times G$ l'application définie par

$$\tilde{f}(x, y) = (x, f(x, y)) \ .$$

Cette application est clairement de classe C^1 sur Ω, et sa différentielle en un point (x, y) de Ω est donnée par

$$D\tilde{f}(x, y).(h, k) = \left(h, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).(h) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).(k) \right) \ .$$

Clairement, $D\tilde{f}(a, b) \in \mathrm{Isom}(E \times F, E \times G)$ dès lors que $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \in \mathrm{Isom}(F, G)$. Par exemple,

$$\begin{aligned} & D\tilde{f}(a, b).(h, k) = (h', k') \\ & \Leftrightarrow \ h = h' \text{ et} \\ & \qquad k = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)^{-1} \left(k' - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b).h' \right) \ , \end{aligned}$$

de sorte que $D\tilde{f}(a, b)$ est bien inversible de $E \times F$ sur $E \times G$. Pour le caractère continue de l'inverse on peut soit appliquer le théorème de Banach (Théorème 3.17), soit le vérifier diréctement sur la formule ci-dessus. Sachant que $\tilde{f}$ est de classe C^1

et que $D\tilde{f}(a,b) \in \mathrm{Isom}(E \times F, E \times G)$, on peut appliquer le théorème d'inversion locale à $\tilde{f}$. On obtient l'existence d'un voisinage ouvert U de (a,b) dans $E \times F$, et d'un voisinage ouvert $W = \tilde{f}(U)$ de $\tilde{f}(a,b) = (a, f(a,b)) = (a,0)$ dans $E \times G$ pour lesquels $\tilde{f}$ réalise un C^1-difféomorphisme de U sur W. En raison de la forme de $\tilde{f}$, le difféomorphisme réciproque est forcément du type

$$\tilde{f}^{-1}(x,z) = (x, \tilde{g}(x,z)) \ ,$$

où donc $\tilde{g} : W \to F$ est de classe C^1. Clairement on a équivalence entre les deux propositions:

(1) $(x,y) \in U$ et $f(x,y) = z$,
(2) $(x,z) \in W$ et $y = \tilde{g}(x,z)$.

Pour le voir il suffit de remarquer que $f(x,y) = z$ équivaut à $\tilde{f}(x,y) = (x,z)$, puis d'appliquer $\tilde{f}^{-1}$ à cette équation pour dire que cela équivaut à son tour à $\tilde{f}^{-1}(x,z) = (x,y)$, et donc à $y = \tilde{g}(x,z)$. On pose maintenant $z = 0$ dans (1) et (2). Alors les deux propositions suivantes deviennent équivalentes:

(3) $(x,y) \in U$ et $f(x,y) = 0$,
(4) $(x,0) \in W$ et $y = \tilde{g}(x,0)$.

Reste à remarquer si $V = \{x \in E \ / \ (x,0) \in W\}$, alors V est un voisinage ouvert de a dans E, et que si $g(x) = \tilde{g}(x,0)$, alors g est de classe C^1 dans V. Les propositions (3) et (4) donnent alors $(x,y) \in U$ et $f(x,y) = 0$ si et seulement si $x \in V$ et $y = g(x)$, ce qui est exactement ce qu'affirme le théorème des fonctions implicites. $\square$

On vient de voir que le théorème des fonctions implicites est une conséquence du théorème d'inversion locale. La réciproque est vraie. En quelques mots, soit $f : E \to F$ telle que

$$Df(a) \in \mathrm{Isom}(E,F) \ .$$

On considère l'application $\Phi : F \times E \to F$ définie par

$$\Phi(y,x) = f(x) - y \ .$$

Si $b = f(a)$, alors $\Phi(b,a) = 0$ et

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(b,a) = Df(a)$$

est un isomorphisme de E sur F. On déduit alors du théorème des fonctions implicites qu'il existe $g : F \to E$ (en ne faisant pas attention au domaine) telle que $\Phi\big(y, g(y)\big) = 0$, et donc telle que $f\big(g(y)\big) = y$. En gros, g est l'inverse de f et on a récupéré le théorème d'inversion locale. Une remarque sur le théorème des fonctions implicites est que $g(a) = b$. Une remarque supplémentaire est qu'en différentiant l'équation $f\big(x, g(x)\big) = 0$ on obtient la valeur de $Dg(a)$. Plus précisemment,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \circ Dg(a) = 0$$

et donc

$$Dg(a) = -\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \ .$$

Une autre remarque est que g est unique (au moins au voisinage de a). Si on a deux applications g_1 et g_2 qui vérifient le théorème des fonctions implicites, alors $g_1 = g_2$ au voisinage de a. Une dernière remarque est que là encore le théorème s'adapte à n'importe quelle classe de différentiation: on peut remplacer C^1 par C^p dès lors que $p \geq 1$.

Lemme 4.4. *La classe de différentiabilité s'adapte au théorème des fonctions implicites. Si f est de classe C^p avec $p \geq 1$ alors g l'est aussi.*

14. Différentielles secondes et d'ordres supérieures

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach, et soit Ω un ouvert de E. Soit aussi $f : \Omega \to F$ une application différentiable sur Ω. On dit que f est deux fois différentiable en un point $a \in \Omega$ si l'application $Df : \Omega \to L_c(E, F)$ est différentiable au point a. On note $D^2 f(a)$ la différentielle de cette application en a. Alors $D^2 f(a) \in L_c\big(E, L_c(E, F)\big)$. Cela étant dit, on a vu au chapitre 3, qu'il y a une isométrie naturelle entre cet espace $L_c\big(E, L_c(E, F)\big)$ et l'espace $L_c(E, E; F)$ des applications bilinéaires continues de $E \times E$ dans F. On regardera alors $D^2 f(a)$ comme étant un élément de cet espace $L_c(E, E; F)$. Donc

$$D^2 f(a) \in L_c(E, E; F) ,$$

ce qui revient à poser que $D^2 f(a).(h, k) = \big(D^2 f(a).(h)\big).(k)$ pour tout $(h, k) \in E \times E$. Il y a un problème de convention: on aurait aussi pu poser $D^2 f(a).(h, k) = \big(D^2 f(a).(k)\big).(h)$. Ce problème est réglé par le lemme de Schwarz.

Théorème 4.10 (Lemme de Schwarz). *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach, Ω un ouvert de E, et $f : \Omega \to F$ une application différentiable sur Ω et deux fois différentiable en un point $a \in \Omega$. Alors $D^2 f(a)$, regardée comme application de $L_c(E, E; F)$, est symétrique. A savoir $D^2 f(a).(h, k) = D^2 f(a).(k, h)$ pour tout $(h, k) \in E \times E$.*

Démonstration. On démontre très brièvement ce théorème. On note $\Phi : E \times E \to F$ l'application

$$\Phi(h, k) = f(a + h + k) - f(a + h) - f(a + k) + f(a) .$$

Clairement Φ est symétrique en h et k. Pour ne pas alourdir la preuve on admet (ce n'est pas trivial) que

$$\|D^2 f(a).(h, k) - \Phi(h, k)\|_F = o\left(\|h\|_E^2 + \|k\|_E^2\right) ,$$

au sens où $o\left(\|h\|_E^2 + \|k\|_E^2\right) = \left(\|h\|_E^2 + \|k\|_E^2\right) \varepsilon(h, k)$ avec $\varepsilon(h, k) \to 0$ lorsque $(h, k) \to (0, 0)$. Par suite, avec cette relation,

$$\|D^2 f(a).(h, k) - D^2 f(a).(k, h)\|_F = o\left(\|h\|_E^2 + \|k\|_E^2\right) ,$$

et on va maintenant exploiter la non homogénéité de cette relation. On fixe $h, k \in E$ et on considère les vecteurs λh et λk, où $\lambda > 0$ est quelconque. Alors

$$\begin{aligned}
&\|D^2 f(a).(\lambda h, \lambda k) - D^2 f(a).(\lambda k, \lambda h)\|_F \\
&= \lambda^2 \|D^2 f(a).(h, k) - D^2 f(a).(k, h)\|_F \\
&= \lambda^2 \left(\|h\|_E^2 + \|k\|_E^2\right) \varepsilon(\lambda) ,
\end{aligned}$$

où $\varepsilon(\lambda) \to 0$ lorsque $\lambda \to 0$. En particulier,

$$\|D^2 f(a).(h, k) - D^2 f(a).(k, h)\|_F = \left(\|h\|_E^2 + \|k\|_E^2\right) \varepsilon(\lambda)$$

pour tout $\lambda > 0$. On fait alors tendre $\lambda \to 0$, et on récupère que

$$D^2 f(a).(h, k) = D^2 f(a).(k, h) .$$

Comme h et k sont quelconques, le théorème est démontré. □

On définit la différentiabilité d'ordre n par induction avec la formule d'hérédité $D^n = DD^{n-1}$. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach, et soit Ω un ouvert de E. Soit aussi $f : \Omega \to F$ une application différentiable sur Ω. On veut définir la différentielle $D^n f(a)$ d'ordre n de f en a comme application multilinéaire de $L_c(E^n; F)$. A savoir on veut

$$D^n f(a) \in L_c(E^n; F) ,$$

où $L_c(E^n; F)$ est l'espace des applications n-linéaires continues de $E \times \cdots \times E$ (n fois) dans F. Pour $n = 2$ on a déjà vu comment procéder. Pour $n = 3$, lorsque f est deux fois différentiables sur Ω, on regarde $D^2 f$ comme application

$$D^2 f : \Omega \to L_c(E, E; F) .$$

Par suite, $D^3 f(a) = DD^2 f(a)$ est une application

$$D^3 f(a) \in L_c\big(E, L_c(E, E; F)\big) .$$

Or on va facilement pouvoir assimiler $L_c\big(E, L_c(E, E; F)\big)$ à $L_c(E, E, E; F)$ en posant

$$\Phi(x, y, z) = \Phi(x).(y, z) .$$

Et on procède ainsi de suite par récurrence pour passer à $n = 4$, $n = 5$, etc. On peut alors sereinement définir la notion d'application n-fois différentiable en un point ou encore d'application de classe C^k.

DÉFINITION 4.5. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach, et soit Ω un ouvert de E. Soit $k \in \mathbb{N}$. Une application $f : \Omega \to F$ est k fois différentiable en un point $a \in \Omega$ si elle est $(k-1)$-fois différentiable dans un voisinage de a et si $D^{k-1} f$ est différentiable en a. On alors $D^k(a) = D(D^{k-1} f)(a)$ et $D^k(a) \in L_c(E^k; F)$. L'application est dite de classe C^k sur Ω si elle est $(k-1)$-fois différentiable en tout point de Ω et si sa différentielle $D^k f : \Omega \to L_c(E^k; F)$ d'ordre k est continue sur Ω. L'application est dite de classe C^∞ si elle est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.*

L'extension du lemme de Schwarz, dont on trouvera une preuve dans l'ouvrage ouvrage d'Henri Cartan [Cours de Calcul Différentiel, Hermann, 1982], donne: si f est n fois différentiable en un point $a \in \Omega$, alors $D^n f(a)$ est symétrique. A savoir

$$D^n f(a).\big(h_1, \ldots, h_n\big) = D^n f(a).\big(h_{\sigma(1)}, \ldots, h_{\sigma(n)}\big)$$

pour tous $h_1, \ldots, h_n \in E$, et toute permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$. Les Définitions 2.10 et 4.5 coïncident dans le cas des applications $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. On énonce la formule de Taylor asymptotique qui suit sans en donner de preuve.

THÉORÈME 4.11 (Formule de Taylor asymptotique). *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach, Ω un ouvert de E, $f : \Omega \to F$ une application $(n-1)$-fois différentiable sur Ω et n-fois différentiable en un point $a \in \Omega$. Alors*

$$f(a+h) = f(a) + Df(a).(h) + \cdots + \frac{1}{n!} D^n f(a).(h^n) + \|h\|_E^n \varepsilon(h)$$

pour tout h suffisamment petit, où $\varepsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$, et où la notation $D^n f(a).(h^n)$ tient pour $D^n f(a).(h^n) = D^n f(a).(h, \ldots, h)$ (n-fois).

Si $n = 1$, on a juste écrit ici la définition de la différentiabilité au point a. On renvoie là encore au remarquable ouvrage d'Henri Cartan [Cours de Calcul Différentiel, Hermann, 1982] pour la preuve de cette formule de Taylor asymptotique et pour ses variantes avec reste intégral et avec reste de Lagrange.

15. Extremums et minimisation sous contraintes

On va brièvement s'intéresser ici aux problèmes d'extrémums, comme à la Section 11 du Chapitre 2, puis ensuite aux problèmes de minimisation sous contraintes, c'est à dire de minimisations d'une fonction f sous des contraintes $\Phi_i(x) = a_i$, $i = 1, \dots, n$.

Les recherches d'extremums se passent dans le cadre banachique comme dans le cadre $\mathbb{R}^n$, à ceci près qu'on perd le Lemme 2.1 en dimension infinie. On le réintroduit donc dans les hypothèses des conditions suffisantes. A part cela, tout se passe de la même façon. Le théorème suivant a lieu. Il regroupe les théorèmes 2.17, 2.18 et 2.19 du cas $\mathbb{R}^n$. La preuve du Théorème 4.12 suit exactement la preuve des trois théorèmes 2.17, 2.18 et 2.19. On renvoie donc au Chapitre 2 pour les arguments impliqués dans la démonstration du Théorème 4.12.

THÉORÈME 4.12. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $\Omega \subset E$ un ouvert de E, $a \in \Omega$ un point de Ω et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction.*

(1) [condition nécessaire 1] Si f admet un extremum local en a et si f est différentiable en a, alors $Df(a) \equiv 0$ et les extremums locaux de f sont donc des points critiques de cette fonction.

(2) [condition nécessaire 2] Si f admet un minimum local en a et si et si f est différentiable sur Ω et deux différentiable en a, alors $D^2f(a) \geq 0$ au sens des formes bilinéaires et si f admet un maximum local en a alors $D^2f(a) \leq 0$ au sens des formes bilinéaires.

(3) [condition suffisante] On suppose que f est différentiable sur Ω et deux différentiable en a et que a est un point critique de f. S'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $D^2f(a).(h,h) \geq \alpha\|h\|^2$ (resp. s'il existe $\alpha < 0$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $D^2f(a).(h,h) \leq \alpha\|h\|^2$), alors f admet un minimum local strict (resp. un maximum local strict) au point a.

On passe maintenant aux problèmes de minimisations sous contraintes. Il s'agit ici d'écrire les équations relatives aux minimums d'une fonctions f lorsque le minimum en x_0 est réalisé sous des constraintes $\Phi_i(x) = a_i$, $i = 1, \dots, n$. En l'absence de contrainte l'équation vérifiée par f et x_0 est $Df(x_0) = 0$. Avec contraintes c'est le théorème des multiplicateurs de Lagrange qui répond à la question.

THÉORÈME 4.13 (Théorème des multiplicateurs de Lagrange). *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $\Omega \subset E$ un ouvert de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur Ω. Soit aussi $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 sur Ω de composantes $\Phi_1, \dots, \Phi_n$. Etant donné $a \in \mathbb{R}^n$ on pose $\mathcal{H} = \Phi^{-1}(a)$ que l'on suppose non vide. Si en un point $x_0 \in \mathcal{H}$,*

$$f(x_0) = \min_{x \in \mathcal{H}} f(x) \ ,$$

et si de plus $D\Phi(x_0) \in L_c(E, \mathbb{R}^n)$ est surjective, alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ pour lesquels

$$Df(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D\Phi_i(x_0) \ . \tag{4.8}$$

Cette équation est l'équation d'Euler associée au problème de minimisation considéré. Les λ_i sont les coefficients de Lagrange de l'équation.

Démonstration. L'application $D\Phi(x_0)$ étant surjective il existe F sous espace vectoriel de dimension n de E qui est tel que $E = \mathrm{Ker}\,(D\Phi(x_0)) \oplus F$. Un argument possible rapide est le suivant: si $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ on note $\hat{e}_i$ des antécédants des e_i par $D\Phi(x_0)$. On pose ensuite $F = \mathrm{Vect}(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ l'espace engendré par les $\hat{e}_i$. Alors $D\Phi(x_0)$ est surjective de F sur $\mathbb{R}^n$. Donc $\dim(F) = n$ et, accessoirement, la famille $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ est une base de F et $D\Phi(x_0)$ réalise un isomorphisme de F sur $\mathbb{R}^n$. Clairement il s'ensuit que $\mathrm{Ker}\,(D\Phi(x_0)) \bigcap F = \{0\}$. Par ailleurs, pour tout $x \in E$ si $z \in F$ est tel que $f(x) = f(z)$, alors $x = (x - z) + z$ et $x - z \in \mathrm{Ker}(f)$. On en déduit, comme annoncé, qu'il existe F sous espace vectoriel de dimension n de E qui est tel que $E = \mathrm{Ker}\,(D\Phi(x_0)) \oplus F$.

Soit maintenant φ la restriction de $D\Phi(x_0)$ à F. Cette restriction réalise un isomorphisme de F sur $\mathbb{R}^n$. Pour x proche de 0 on pose

$$\Psi(x) = \Phi(x_0 + x) - a \ .$$

Alors $\Psi : U \to \mathbb{R}^n$, où U est un voisinage de 0 dans E, et, clairement, $\Psi(0) = 0$ et $D\Psi(0) = D\Phi(x_0)$. Si maintenant $\Pi : E \to \mathrm{Ker}\,(D\Phi(x_0))$ désigne la projection de E sur $\mathrm{Ker}\,(D\Phi(x_0))$ qui suit de la décomposition $E = \mathrm{Ker}\,(D\Phi(x_0)) \oplus F$, on note g l'application de U dans E définie au voisinage de 0 par

$$g = \varphi^{-1} \circ \Psi + \Pi \ .$$

Alors g est C^1 puisque Φ est C^1 et il est facile de vérifier que $Dg(0) = \mathrm{Id}_E$, où Id_E est l'endomorphisme identité de E. On peut alors appliquer le théorème d'inversion locale à g et on obtient ainsi que g réalise un C^1-difféomorphisme d'un voisinage ouvert U_1 de 0 dans E sur un voisinage ouvert U_2 de 0 dans E.

On note $P : E \to F$ la projection de E sur F qui suit de la décomposition $E = \mathrm{Ker}\,(D\Phi(x_0)) \oplus F$. On a $P \circ g = \varphi^{-1} \circ \Psi$ et donc, $\varphi \circ P \circ g = \Psi$. Comme $D\Psi(0) = \varphi \circ P$, on peut finalement écrire que $D\Psi(0) \circ g = \Psi$.

On montre maintenant que $\mathrm{Ker}\,(D\Phi(x_0)) \subset \mathrm{Ker}\,(Df(x_0))$. Soit donc u tel que $u \in \mathrm{Ker}\,(D\Phi(x_0))$. Soit γ_1 le chemin défini sur $]-\varepsilon, +\varepsilon[$ donné par $\gamma_1(t) = tu$. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, γ_1 est à valeur dans U_2. Soit alors γ_2 le chemin défini par

$$\gamma_2 = g^{-1} \circ \gamma_1 \ ,$$

qui est donc maintenant à valeurs dans U_1. De la relation $D\Psi(0) \circ g = \Psi$ montrée plus haut on tire que $\Psi\left(\gamma_2(t)\right) = 0$ pour tout $t \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$ puisque $D\Psi(0) = D\Phi(x_0)$ et $u \in \mathrm{Ker}\,(D\Phi(x_0))$. On en déduit que $x_0 + \gamma_2(t) \in \mathcal{H}$ pour tout $t \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$. Soit $\gamma_3 = x_0 + \gamma_2$. Alors γ_3 est à valeurs dans $\mathcal{H}$, $\gamma_3(0) = x_0$ et, puisque $Dg(0) = \mathrm{Id}_E$ (voir plus haut), on a que

$$\left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)_0 = u \ .$$

Par hypothèse sur f, $f \circ \gamma_3$ a un minimum en 0. Donc $\left(f \circ \gamma_3\right)'(0) = 0$, et ainsi $Df(x_0).(u) = 0$. Puisque u est quelconque dans $\mathrm{Ker}\,(D\Phi(x_0))$, on a donc bien ce que nous voulions démontrer, à savoir que $\mathrm{Ker}\,(D\Phi(x_0)) \subset \mathrm{Ker}\,(Df(x_0))$.

On peut maintenant conclure. Les $D\Phi_i(x_0)$, restreints à F, sont les composantes φ_i de φ. Ils forment une base du dual $F^\star$ de F puisque φ réalisant un isomorphisme de F sur $\mathbb{R}^n$ on obtient facilement que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre dans

$F^\star$ (qui est de dimension n puisque F l'est). Il existe ainsi des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ pour lesquels (4.8) a lieu lorsque l'on se restreint à F. Or F est supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,(D\Phi(x_0))$, et $\mathrm{Ker}\,(D\Phi(x_0)) \subset \mathrm{Ker}\,(Df(x_0))$. Il s'ensuit que (4.8) a lieu sur E. D'où le théorème. $\square$

CHAPITRE 5

Fonctions Convexes

On traite des fonctions convexes dans ce chapitre en déclinant les cas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et enfin $E \to \mathbb{R}$.

1. Fonctions convexes d'une variables réelle

L'étude des fonctions convexes $f : I \to \mathbb{R}$, avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, est un grand classique de l'étude des fonctions d'une variable réelle.

DÉFINITION 5.1. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur I si pour tous $a < b$ dans I,*

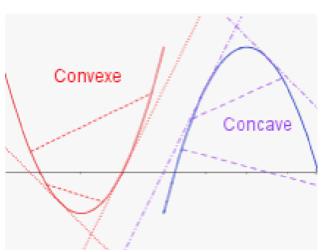
$$f\left((1-t)a + tb\right) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

pour tous $t \in [0,1]$. On dit que f est concave si $-f$ est convexe (ce qui revient à inverser l'inégalité ci-dessus).

Le choix de $a < b$ dans I donne deux points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ de la courbe représentative de f. Le sous-arc de la courbe de f correspondant aux choix de a et b est la partie de la courbe représentative formée par les $(x, f(x))$ pour $a \leq x \leq b$. La corde correspondant aux choix de a et b est le segment de $\mathbb{R}^2$ qui joint les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Il est donné par

$$\mathrm{Corde}(a,b) = \left\{\left((1-t)a + tb, (1-t)f(a) + tf(b)\right), t \in [0,1]\right\} .$$

Une fonction est donc convexe si tout sous-arc de sa courbe est situé en dessous de la corde correspondante et concave si tout sous-arc de sa courbe est situé au dessus de la corde correspondante.



Une fonction est convexe si tout sous-arc de sa courbe est situé en dessous de la corde correspondante et concave si tout sous-arc de sa courbe est situé au dessus de la corde correspondante.

LEMME 5.1 (Inégalité des trois cordes). *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe définie sur $\mathbb{R}$. Alors*

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

pour tous $x < y < z$ dans I.

Démonstration. Soient $x < y < z$ dans I. Il existe alors $t \in]0,1[$ tel que $y = tx + (1-t)z$. On a

$$f(y) \leq tf(x) + (1-t)f(z) \tag{5.1}$$

par convexité. Donc

$$f(y) - f(x) \leq (1-t)\left(f(z) - f(x)\right) \ .$$

Or $1-t = \frac{y-x}{z-x}$. On obtient donc la première inégalité de l'inégalité des trois cordes. On a aussi avec (5.1) que

$$t\left(f(z) - f(x)\right) \leq f(z) - f(y) \ .$$

Or $t = \frac{z-y}{z-x}$. D'où la seconde inégalité de l'inégalité des trois cordes. Le lemme est démontré. □

La continuité "automatique" sur les intervalles ouverts des fonctions convexes suit de l'inégalité des trois cordes.

Théorème 5.1. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Toute fonction convexe $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I.*

Démonstration. Soit $a \in I$. Soient $x_0 < y_0$ deux points de I situés de part et d'autre de a. Donc $x_0 < a < y_0$ et $x_0, y_0 \in I$. Pour $x \in I$ tel que $a < x < y_0$ l'inégalité des trois cordes appliquée aux inégalités $a < x < y_0$ et $x_0 < a < x$ implique que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y_0) - f(a)}{y_0 - a} \text{ et } \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} \ .$$

On en déduit que la limite à droite en a de $f(x) - f(a)$ vaut automatiquement zéro. Donc

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \ .$$

De même, pour $x \in I$ tel que $x_0 < x < a$ l'inégalité des trois cordes appliquée aux inégalités $x_0 < x < a$ et $x < a < y_0$ implique que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} \text{ et } \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y_0) - f(a)}{y_0 - a} \ .$$

On en déduit que la limite à gauche en a de $f(x) - f(a)$ vaut automatiquement zéro. Donc

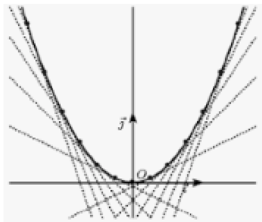
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) \ .$$

Par suite, $f(x) \to f(a)$ lorsque $x \to a$ et f est continue en a. Comme a est quelconque dans I, f est continue sur I. Le théorème est démontré. □

Il est important d'ouvrir I dans le Théorème 5.1. Par exemple, la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 0$ si $0 < x < 1$ et $f(0) = f(1) = 1$ n'est pas continue sur $[0,1]$, mais elle est pourtant convexe sur $[0,1]$. Dans le cas des fonctions dérivables, on a une caractérisation de la convexité avec la croissance de f' ou la position relative de la courbe de f avec sa tangente en chaque point.

Théorème 5.2. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:*
(i) f est convexe sur I
(ii) f' est croissante sur I

(iii) Pour tout $a \in I$ et tout $x \in I$, $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$.
Le point (iii) revient encore à dire que la courbe représentative C de f (le graphe de f) est au dessus de ses tangentes en tout point.



Une fonction est convexe si et seulement si son graphe est au dessus de toutes ses tangentes.

Démonstration. On montre que (i) $\Rightarrow$ (ii). Soient $x < y$ dans I. pour tout $t \in [0,1]$,

$$f\left((1-t)x + ty\right) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \ . \tag{5.2}$$

En particulier, pour $0 < t \leq 1$,

$$\frac{f\left(x + t(y-x)\right) - f(x)}{t(y-x)} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

et en faisant tendre $t \to 0^+$ on obtient, puisque f est dérivable en x, que

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \ .$$

De la même façon, comme $ty = y + (t-1)y$, on peut écrire avec (5.2) que pour $0 \leq t < 1$,

$$\frac{f\left(y + (1-t)(x-y)\right) - f(y)}{(1-t)(x-y)} \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \ .$$

En faisant tendre $t \to 1^-$ on obtient, puisque f est dérivable en y, que

$$f'(y) \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \ .$$

Par suite, $f'(x) \leq f'(y)$ lorsque $x < y$, et donc f' est bien croissante. On montre maintenant que (ii) $\Rightarrow$ (iii). Soit $x \in I$ et $g : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(y) = f(y) - f'(x)(y-x) - f(x) \ .$$

Alors g est dérivable et

$$g'(y) = f'(y) - f'(x) \ .$$

Comme f' est supposée croissante, on a $g'(y) \leq 0$ si $y \leq x$ et $g'(y) \geq 0$ si $y \geq x$. Cela entyraîne que g a un minimum au point x. Comme $g(x) = 0$ on obtient (iii). On montre maintenant les réciproques. On commence par montrer que (iii) $\Rightarrow$ (ii). Soient $x < y$ dans I. Avec (iii), appliqué deux fois, pour la tangente en x et la tangente en y,

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f'(x)(y-x) + f(x) \\ &\geq f'(x)(y-x) + f'(y)(x-y) + f(y) \end{aligned}$$

et donc $f'(x)(y-x) \leq f'(y)(y-x)$, soit encore $f'(x) \leq f'(y)$ puisque $x < y$. D'où (ii). Reste pour finir à montrer que (ii) $\Rightarrow$ (i). Soient $y \in I$ et $t \in]0,1[$ fixés. On définit $g : I \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = f\left((1-t)x + ty\right) - (1-t)f(x) - tf(y) \ .$$

Alors g est dérivable sur I et en tout $x \in I$,

$$g'(x) = (1-t)f'\left((1-t)x + ty\right) - (1-t)f'(x)$$

de sorte que $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ si $x < y$ puisqu'alors $(1-t)x + ty \geq x$ et f' est supposée croissante. Donc g est croissante sur $I \cap]-\infty, y]$. Or $g(y) = 0$. Donc $g(x) \leq 0$ sur $I \cap]-\infty, y]$. Clairement cela signifie que f est convexe sur I. Le théorème est démontré. $\square$

Lorsque les fonctions sont deux fois dérivables on obtient le résultat suivant.

Théorème 5.3. *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.*

Démonstration. On a déjà vu que pour une fonction g dérivable sur un intervalle I, g est croissante si et seulement si $g' \geq 0$ sur I. En particulier, f' est croissante sur I si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. Le résultat suit alors du Théorème 5.2. $\square$

Plusieurs inégalités sont démontrées par convexité (ou concavité). Par exemple, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x \ . \tag{5.3}$$

La fonction sin est en effet deux fois dérivable de dérivée seconde $-\sin$. Donc cette fonction est concave sur $]0, +\frac{\pi}{2}[$ puisque le sinus y est positif et donc la dérivée seconde de sinus y est négative. Par suite, par concavité, f est en dessous de n'importe laquelle de ses tangentes. En particulier, pour tout $a, x \in]0, +\frac{\pi}{2}[$,

$$\sin(x) \leq \cos(a)(x-a) + \sin(a) \ .$$

En faisant tendre $a \to 0^+$ on obtient que $\sin(x) \leq x$ pour tout $x \in]0, +\frac{\pi}{2}[$ et l'inégalité est trivialement vraie pour $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$. Puisque sin est concave on a aussi que tout sous-arc de sa courbe est situé au dessus de la corde correspondante. En regardant le sous-arc et la corde correspondant aux choix de 0 et $\frac{\pi}{2}$ on obtient que $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. D'où (5.3).

Théorème 5.4 (Inégalité de Jensen). *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit aussi $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur I. Alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in I$ et*

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \tag{5.4}$$

pour tout $n \geq 2$, tous $x_1, \dots, x_n \in I$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$ vérifiant que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Démonstration. On effectue une double récurrence. Une pour montrer que pour tout $n \geq 2$, tous $x_1, \dots, x_n \in I$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$ vérifiant que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in I$. L'autre pour montrer l'inégalité de Jensen proprement dite. On se restreint à la preuve de la seconde (la première procède avec la même manipulation). On effectue donc une récureence sur n, la propriété $\mathcal{H}_n$ à démontrer étant que pour tous $x_1, \dots, x_n \in I$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$, si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ alors (5.4) est vraie. Si $n = 2$ il s'agit tout simplement de la définition de la convexité. On a donc l'amorce à notre récurrence, à savoir que $\mathcal{H}_2$ est vraie. Pour démontrer l'hérédité, on suppose maintenant que $\mathcal{H}_n$ est vraie et on considère $x_1, \dots, x_{n+1} \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in [0,1]$ vérifiant que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. On écrit alors que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} \\ &= (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\end{aligned}$$

et par convexité on a donc que

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq (1 - \lambda_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \ .$$

Or $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = 1$ puisque $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1$, et donc, avec $\mathcal{H}_n$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_i) \ .$$

On en déduit que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. D'où le théorème. □

Le théorème suivant traite de la dérivabilité quasi-automatique des fonctions convexes. Il se situe dans le même esprit que le Théorème 5.1.

THÉORÈME 5.5. *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur I. Alors l'ensemble des points où f n'est pas dérivable est au plus dénombrable.*

DÉMONSTRATION. Soit $a \in I$. Il suit de l'inégalité des trois cordes du Lemme 5.1 que la fonction

$$x \to \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

est croissante sur $I \backslash \{a\}$. Par suite,

$$\begin{cases} f'_g(a) = \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ f'_d(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{cases}$$

existent, sont finies et $f'_g(a) \leq f'_d(a)$. Toujours avec l'inégalité des trois cordes du Lemme 5.1 on obtient que $f'_d(x) \leq f'_g(a)$ pour $x \leq a$. Par suite

$$\lim_{x \to a^-} f'_d(x) \leq f'_g(a) \leq f'_d(a) \ .$$

Or f est dérivable en a si et seulement si $f'_g(a) = f'_d(a)$. Ainsi les points a où f n'est pas dérivable sont des points où la fonction f'_d a un saut. En utilisant encore l'inégalité des trois cordes du Lemme 5.1, on obtient que si $a < b$ alors $f'_d(a) \leq f'_g(b)$. Comme $f'_g(b) \leq f'_d(b)$, la fonction f'_d est croissante sur I. On conclue avec le Lemme 5.2 ci-dessous. Le théorème est démontré. □

Le lemme suivant a été utilisé pour conclure dans la preuve du Théorème 5.5.

Lemme 5.2. *Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante. L'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.*

Démonstration. Pour $x \in]a,b[$ on note $\delta(x)$ la différence entre la limite à droite de f en x et la limite à gauche de f en x (qui existent et sont finies par croissance de f). Les points de discontinuité de f sont les sauts positifs de f, à savoir les x tels que $\delta(x) > 0$. Soient $c < d$ deux points de $]a,b[$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on pose

$$S_n = \left\{ x \in]a,b[\ / \ \delta(x) \geq \frac{1}{n} \right\} \ .$$

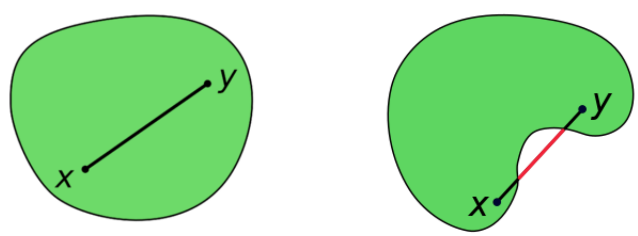
Il est facile de voir que $[c,d] \bigcap S_n$ est un ensemble fini. On en déduit que S_n est au plus dénombrable en approchant $]a,b[$ par une suite de $[c_k, d_k]$, $k \to +\infty$. Ensuite, si D est l'ensemble des points de discontinuité de f, en remarquant que D n'est rien d'autre que la réunion des S_n pour $n \geq 1$, on obtient que D est au plus dénombrable. Le lemme est démontré. □

2. Fonctions convexes de plusieurs variables réelles

Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ on note $[x,y]$ le segment de $\mathbb{R}^n$ défini par

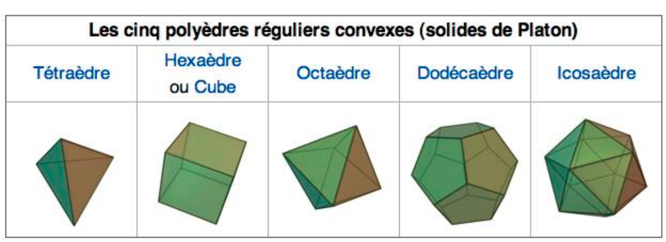
$$[x,y] = \{(1-t)x + ty, t \in [0,1]\} \ .$$

Un sous ensemble X de $\mathbb{R}^n$ est alors dit convexe si pour tous $x, y \in X$, $[x,y] \subset X$.



Un ensemble convexe — Un ensemble non convexe

Les polyèdres convexes ont été étudiés dès Platon. Les polyèdres convexes de Platon sont le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre. Ils vérifient tous l'identité du théorème de Descartes-Euler: dans un polyèdre convexe on a toujours $F + S - A = 2$ où F est le nombre de faces du polyèdre, S son nombre de sommets et A son nombre d'arêtes.



Les cinq polyèdres réguliers convexes (solides de Platon)				
Tétraèdre	Hexaèdre ou Cube	Octaèdre	Dodécaèdre	Icosaèdre

La notion de fonction convexe $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se définit sur les convexes. La définition suit celle donnée pour les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Elle est donnée dans la définition ci-dessous.

DÉFINITION 5.2. *Soit* $X \subset \mathbb{R}^n$ *un sous ensemble convexe de* $\mathbb{R}^n$. *Une fonction* $f : X \to \mathbb{R}$ *est dite convexe si*

$$f\left((1-t)x + ty\right) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

pour tous $x, y \in X$ *et tout* $t \in [0,1]$. *La fonction est dite concave si* $-f$ *est convexe.*

Comme pour les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dire que f est convexe c'est dire que le graphe de f dans $\mathbb{R}^{n+1}$ est en dessous de ses cordes. Par ailleurs l'inégalité de Jensen est encore valable ici et sa preuve est identique à celle du cas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On définit maintenant l'épigraphe $\mathrm{Epi}(f)$ d'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$. C'est le sous ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par

$$\mathrm{Epi}(f) = \left\{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \;/\; t \geq f(x)\right\} \;.$$

Il représente ce qui, dans $\mathbb{R}^{n+1}$, se situe au dessus du graphe de f. Le résultat suivant a lieu.

THÉORÈME 5.6. *Soit* $X \subset \mathbb{R}^n$ *un convexe. Une fonction* $f : X \to \mathbb{R}$ *est convexe si et seulement si Epi*(f) *est un convexe de* $\mathbb{R}^{n+1}$.

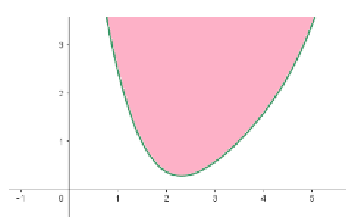
DÉMONSTRATION. Si f est convexe et si $A = (x_1, t_1)$ et $B = (x_2, t_2)$ sont dans $\mathrm{Epi}(f)$, alors pour tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}(1-t)t_1 + tt_2 &\geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)\\ &\geq f\left((1-t)x_1 + tx_2\right)\end{aligned}$$

par convexité de f. Donc $(1-t)A + tB \in \mathrm{Epi}(f)$ pour tous $A, B \in \mathrm{Epi}(f)$ et tout $t \in [0,1]$. Ainsi $\mathrm{Epi}(f)$ est convexe. Réciproquement, supposons que $\mathrm{Epi}(f)$ est convexe. Soient $x_1, x_2 \in X$. Alors $A = (x_1, f(x_1))$ et $B = (x_2, f(x_2))$ sont tous deux dans $\mathrm{Epi}(f)$. Donc, pour tout $t \in [0,1]$, $(1-t)A + tB \in \mathrm{Epi}(f)$. Par suite

$$f\left((1-t)x_1 + tx_2\right) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

et f est bien convexe. Le théorème est démontré. $\square$



Epigraphe d'une fonction convexe de IR dans IR.

En dimension finie, ce qui est le cas de $\mathbb{R}^n$, on peut montrer que si $f : X \to \mathbb{R}$ est convexe et X est un ouvert, alors f est continue sur X. L'argument utilise néanmoins de façon forte la dimension finie (et Jensen). En dimension infinie il faudra aussi supposer que f est bornée au voisinage de tout point de X. On passe ici sur ces questions de continuité pour aborder les caractérisations différentielles de la convexité. On renvoie à la Section 3 pour ces questions. Tout comme dans le cas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il existe différentes caractérisations différentielles de la convexité d'une fonction. On commence par le théorème suivant.

THÉORÈME 5.7. *Soit X un ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur X. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:*
(i) f est convexe sur X,
(ii) $\forall x, y \in X,\ f(y) \geq f(x) + Df(x).(y-x)$
(iii) $\forall x, y \in X,\ Df(y).(y-x) \geq Df(x).(y-x)$.

La propriété (ii) signifie que le graphe de f est au dessus de tous ses hyperplans tangents. Pour (iii) on parle de monotonie de la différentielle.

Le point (iii) peut sembler surprenant. Si $n = 1$ et $X = I$ intervalle ouvert il correspond pourtant bien à la croissance de f' puisque $Df(y).(y-x) \geq Df(x).(y-x)$ pour tous $x, y \in I$ équivaut à $(f'(y) - f'(x))\,(y-x) \geq 0$ pour tous $x, y \in I$ et donc à $f'(y) \geq f'(x)$ pour tous $x \leq y$ dans I.

DÉMONSTRATION. Supposons (i). Soient $x, y \in X$. Par différentiabilité de f,

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f\left(x + t(y-x)\right) - f(x)}{t} = Df(x).(y-x)\ .$$

Par convexité de f, et puisque $x + t(y-x) = (1-t)x + ty$, on a aussi que

$$f\left(x + t(y-x)\right) - f(x) \leq t\left(f(y) - f(x)\right)\ .$$

En combinant ces deux relations on obtient (ii). Donc (i) $\Rightarrow$ (ii). On suppose maintenant (ii) et on montre que (ii) $\Rightarrow$ (i). Soient $x, y \in X$. Avec (ii),

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f\left((1-t)x + ty\right) + (1-t)Df\left((1-t)x + ty\right).(y-x) \\ f(x) &\geq f\left((1-t)x + ty\right) + tDf\left((1-t)x + ty\right).(x-y)\ . \end{aligned}$$

En multipliant la première des relations par t, la seconde par $1-t$ puis en sommant on obtient l'inégalité de convexité. Donc (ii) $\Rightarrow$ (i). On suppose de nouveau (ii) et on montre que (ii) $\Rightarrow$ (iii). Soient $x, y \in X$. Par symétrie en x et y,

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(x) + Df(x).(y-x) \\ f(x) &\geq f(y) + Df(y).(x-y)\ . \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(x) + Df(x).(y-x) \\ &\geq f(y) + Df(y).(x-y) + Df(x).(y-x) \end{aligned}$$

et on obtient (iii). Donc (ii) $\Rightarrow$ (iii). On suppose enfin (iii) et on montre que (iii) $\Rightarrow$ (ii). Soient $x, y \in X$. La fonction

$$g(t) = f\left((1-t)x + ty\right) \tag{5.5}$$

est alors définie sur $[0,1]$. Elle est aussi dérivable sur $]0,1[$ puisque f est différentiable et pour tout $t \in]0,1[$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= Df\left((1-t)x + ty\right).(y-x) \\ &= \frac{1}{t} Df(z_t).(z_t - x) \end{aligned}$$

où $z_t = (1-t)x + ty$ et $t \in]0,1[$. Le théorème des accroissements finis donne qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que

$$g(1) - g(0) = g'(c)\ .$$

Donc

$$f(y) = f(x) + \frac{1}{c} Df(z_c).(z_c - x)\ .$$

Or, par (iii), $Df(z_c).(z_c - x) \geq Df(x).(z_c - x)$ et $Df(x).(z_c - x) = cDf(x).(y - x)$. D'où (ii) et on a bien que (iii) $\Rightarrow$ (ii). Le théorème est démontré. $\square$

Il y aussi, comme dans le cas des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une caractérisation de la convexité avec les différentielles secondes.

THÉORÈME 5.8. *Soit X un ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable sur X. Alors f est convexe sur X si et seulement si $D^2f(a) \geq 0$ au sens des formes bilinéaires pour tout $a \in X$.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $D^2f(a) \geq 0$ au sens des formes bilinéaires pour tout $a \in X$. Soient $x, y \in X$. On définit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ comme en (5.5). Puisque X est un ouvert, g est même définie et deux fois dérivables sur un intervalle un peu plus grand, donc du type $]-\eta, 1+\eta[$ avec $\eta > 0$ petit. Pour tout $t \in]0,1[$,

$$g'(t) = Df(z_t).(y - x) \text{ et } g''(t) = D^2f(z_t).(y - x, y - x) \ ,$$

où $z_t = (1-t)x + ty$. Avec la formule de Taylor-Lagrange pour g, il existe $c \in]0,1[$ tel que

$$g(1) - g(0) = g'(0) + \frac{1}{2}g''(c) \ .$$

Par hypothèse, $g''(c) \geq 0$ et donc

$$f(y) \geq f(x) + Df(x).(y - x) \ .$$

En vertue du Théorème 5.7, et puisque x et y sont quelconques dans X, f est convexe sur X. Réciproquement, supposons que f est convexe sur X. Soit $x \in X$. Avec la formule de Taylor à l'ordre deux du Théorème 2.16, pour tout $y \in X$,

$$f(y) = f(x) + Df(x).(y - x) + \frac{1}{2}D^2f(x).(y - x, y - x) + \|y - x\|^2\varepsilon(y - x)$$

où $\varepsilon(X) \to 0$ si $X \to 0$. En vertue du Théorème 5.7 on récupère donc que

$$\frac{1}{2}D^2f(x).(y - x, y - x) + \|y - x\|^2\varepsilon(y - x) \geq 0$$

pour tout $y \in X$. On fixe $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et pour $t \in \mathbb{R}$ petit (en valeur absolue) on pose $y = x + th$. Alors $y \in X$ (lorsque t est suffisamment petit en valeur absolue, puisque X est un ouvert) et donc

$$t^2 \left(\frac{1}{2}D^2f(x).(h, h) + \|h\|^2\varepsilon(th)\right) \geq 0 \ .$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2}D^2f(x).(h, h) + \|h\|^2\varepsilon(th) \geq 0$$

et en faisant tendre $t \to 0$ on récupère que $D^2f(x).(h, h) \geq 0$. L'inégalité reste valable si $h = 0$. Par suite $D^2f(x) \geq 0$ au sens des formes bilinéaires. Comme x est quelconque dans X, le théorème est démontré. $\square$

Il existe un analogue des Théorèmes 5.1 et 5.5 dans le cas de $\mathbb{R}^n$. En ce qui concerne la continuité le théorème qui suit est une conséquence directe du Théorème 5.13 ci-dessous.

THÉORÈME 5.9. *Soit X un ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur X. Alors f est continue sur X.*

En ce qui concerne la différentiabilité, un ensemble $N \subset \mathbb{R}^n$ est dit négligeable s'il est (mesurable et) de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et donc si $\int_N 1dx = 0$ (attention il s'agit là d'une intégrale multiple). Un sous ensemble négligeable est forcément d'intérieur vide. On pourra trouver une démonstration du résultat ci-dessous, donné ici sans preuve, dans pratiquement tous les ouvrages ou les cours spécialisés sur la convexité.

THÉORÈME 5.10. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors f est différentiable en presque tout point de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire en tout point de $\mathbb{R}^n \backslash N$ où $N \subset \mathbb{R}^n$ est un sous ensemble négligeable de $\mathbb{R}^n$.*

3. Fonctions convexes d'une variable banachique

Si l'on met à part les questions de régularité, la convexité des fonctions réelles définies sur un Banach se comporte quasiment systématiquement comme la convexité des fonctions réelles en dimension finie qui a été étudiée à la Section 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Pour $x, y \in E$ on note $[x, y]$ le segment de E défini par

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\} \ .$$

Un sous ensemble X de E est alors dit convexe si pour tous $x, y \in X$, $[x, y] \subset X$, et si $X \subset E$ est un sous ensemble convexe de E, une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite convexe sur X si

$$f\left((1-t)x + ty\right) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

pour tous $x, y \in X$ et tout $t \in [0, 1]$. La fonction est dite concave si $-f$ est convexe. L'épigraphe Epi(f) d'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est le sous ensemble de $E \times \mathbb{R}$ défini par

$$\mathrm{Epi}(f) = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \ / \ t \geq f(x)\} \ .$$

Il représente ce qui, dans $E \times \mathbb{R}$, se situe au dessus du graphe de f. Les Théorèmes 5.6, 5.7 et 5.8 de la Section 2 restent valables dans le cadre banachique (et même uniquement normé). Leurs preuves sont identiques à celles développées dans le cas $\mathbb{R}^n$.

THÉORÈME 5.11. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et soit $X \subset E$ un convexe. Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si Epi(f) est un convexe de $\mathbb{R}^{n+1}$. Si maintenant X est un ouvert et $f : X \to \mathbb{R}$ est différentiable sur X, les trois propriétés suivantes sont équivalentes:*
(i) f est convexe sur X,
(ii) $\forall x, y \in X$, $f(y) \geq f(x) + Df(x).(y-x)$
(iii) $\forall x, y \in X$, $Df(y).(y-x) \geq Df(x).(y-x)$.

La propriété (ii) signifie que le graphe de f est au dessus de tous ses "hyperplans" tangents. Pour (iii) on parle de monotonie de la différentielle. Enfin, si f est deux fois différentiable sur X, alors f est convexe sur X si et seulement si $D^2f(a) \geq 0$ au sens des formes bilinéaires pour tout $a \in X$.

L'inégalité de Jensen est elle aussi valable dans ce contexte. Donc si $X \subset E$ est un convexe et si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \tag{5.6}$$

pour tout $n \geq 2$, tous $x_1, \dots, x_n \in X$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$ vérifiant que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

On aborde dans ce qui suit les questions relatives à la continuité et à la différentiabilité des fonctions convexes. On dit d'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ qu'elle est localement lipschitzienne sur l'ouvert Ω d'un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|_E)$ si pour tout $a \in \Omega$ il existe $r_a > 0$ tel que f est localement lipschitzienne sur $B_a(r_a)$, où $B_a(r_a)$ est la boule ouverte de centre a et de rayon r_a et où f est dite lipschitzienne sur $B_a(r_a)$ s'il existe $C_a > 0$ telle que $|f(y) - f(x)| \leq C_a \|y - x\|$ pour tous $x, y \in B_a(r_a)$. Le premier résultat que l'on démontre est le suivant.

Théorème 5.12. *Soient $(E, \| \cdot \|)$ un espace de Banach, $\Omega \subset E$ un ouvert convexe de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur Ω. On suppose que f est bornée supérieurement sur Ω. Alors f est localement lipschitzienne sur Ω. En particulier, f est continue sur Ω.*

Démonstration. Soit $a \in \Omega$. On considère $\delta > 0$ tel que $B_a(2\delta) \subset \Omega$. Pour $\delta > 0$ suffisamment petit, soit $M > 0$ tel que $f \leq M$ sur $B_a(2\delta)$. Si $x \in B_a(2\delta)$ alors $2a - x \in B_a(2\delta)$ puisque $\|(2a - x) - a\| = \|x - a\|$. Or $a = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(2a - x)$ et donc, par convexité de f,

$$\begin{aligned} f(a) &\leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(2a - x) \\ &\leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} M \ . \end{aligned}$$

On en déduit que $f(x) \geq 2f(a) - M$ et la fonction f est donc aussi bornée inférieurement sur $B_a(2\delta)$. Ainsi il existe $\hat{M} > 0$ tel que $|f| \leq \hat{M}$ sur $B_a(2\delta)$. On considère maintenant $x, y \in B_a(\delta)$, $x \neq y$. Soit $r = \|y - x\|$. On définit

$$z = y + \frac{\delta}{r}(y - x) \ .$$

Alors $z \in B_a(2\delta)$ par inégalité triangulaire puisque $y \in B_a(\delta)$ et

$$\begin{aligned} \|z - a\| &\leq \|y - a\| + \frac{\delta}{r}\|y - x\| \\ &< \delta + \delta = 2\delta \ . \end{aligned}$$

Soit $\theta = \delta / r$ et soit $\hat{\theta} = 1/(1 + \theta)$ qui est dans $]0, 1[$. On écrit maintenant que

$$\begin{aligned} y &= \frac{\theta}{1 + \theta} x + \frac{1}{1 + \theta} z \\ &= (1 - \hat{\theta}) x + \hat{\theta} z \ . \end{aligned}$$

Alors, par convexité de f,

$$f(y) \leq (1 - \hat{\theta}) f(x) + \hat{\theta} f(z)$$

et donc

$$f(y) - f(x) \leq \hat{\theta} \left(f(z) - f(x) \right) \ .$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &\leq \frac{2\hat{M}}{1 + \theta} \\ &\leq \frac{2\hat{M}}{\delta} r = \frac{2\hat{M}}{\delta} \|y - x\| \ . \end{aligned}$$

Par symétrie en x et y,

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{2\hat{M}}{\delta} \|y - x\|$$

pour tous $x, y \in B_a(\delta)$ et f est lipschitzienne sur $B_a(\delta)$. En particulier, f est continue sur $B_a(\delta)$. Comme a est quelconque dans Ω, le théorème est démontré. $\square$

En dimension finie, donc par exemple dans le cas de $\mathbb{R}^n$, la convexité entraîne automatiquement le fait que f soit bornée supérieurement par inégalité de Jensen.

Théorème 5.13. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $\Omega \subset E$ un ouvert convexe de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur Ω. Si E est de dimension finie, alors f est localement bornée supérieurement sur Ω. En particulier, f est localement lipschitzienne sur Ω et continue sur Ω.*

Démonstration. Soit $a \in \Omega$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E choisie telle que $a \pm e_i \in \Omega$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. On pose $\hat{e}_i = \pm e_i$. Par équivalence des normes en dimension finie, en considérant l'équivalence avec la norme qui fait des e_i une base orthonormée, on voit que si $r > 0$ est suffisamment petit, alors

$$\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{e}_i\| \leq r \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| < 1 \ .$$

Pour $r > 0$ suffisamment petit, $B_a(r) \subset \Omega$. Tout $x \in B_a(r)$ sécrit

$$x = a + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \ .$$

Quitte à changer e_i en $-e_i$ on peut supposer que $\lambda_i \geq 0$. Soit $\theta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Pour $r > 0$ suffisamment petit, en supposant que $x \neq a$, on a alors avec ce qui a été dit plus haut que $0 < \theta < 1$ et $0 \leq \lambda_i < 1$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. En remarquant que

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \hat{\lambda}_i b_i$$

où $b_i = a + e_i$ si $1 \leq i \leq n$, $b_{n+1} = a$, $\hat{\lambda}_i = \lambda_i$ si $1 \leq i \leq n$ et $\hat{\lambda}_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, on obtient par inégalité de Jensen que

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \hat{\lambda}_i f(b_i) \leq \max_{i=1,\ldots,n+1} f(b_i) \ .$$

Donc, pour tout $a \in \Omega$ il existe $r > 0$ petit pour lequel f est majorée supérieurement sur $B_a(r)$. Le Théorème 5.12 appliqué à $B_a(r)$ permet de conclure. $\square$

On aborde maintenant les questions de différentiabilité des fonctions convexes. Dans le cas de la dimension finie la Fréchet-diffétrentiabilité (différentiabilité classique traitée dans cet ouvrage) des fonctions convexes est donnée par le Théorème 5.10, et on obtient une différentiabilité presque partout. Le théorème de Mazur qui suit traite de la Gateaux-différentiabilité. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. L'espace est dit séparable s'il existe un sous ensemble dense dénombrable de E. La notion de Gateaux-différentiabilité a été abordée à la Section 2 de ce chapitre.

THÉORÈME 5.14 (Théorème de Mazur). *Soient* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach séparable,* $\Omega \subset E$ *un ouvert convexe de* E *et* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe continue sur* Ω*. Alors* f *est Gateaux-différentiable sur un sous-ensemble dense de* Ω*.*

Le théorème de Mazur se démontre en plusieurs étapes que nous détaillons dans ce qui suit sous formes de lemmes. On note, lorsque la limite existe,

$$f^+(x;v) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t} .$$

Alors $f^+(x;v)$ est la dérivée directionnelle de f en x dans la direction v. Si f est différentiable en x, $f^+(x;v)$ existe et $f^+(x;v) = Df(x).(v)$. Etant donné un espace vectoriel E, une application $\Phi : E \to \mathbb{R}$ est dite sous-linéaire si:

(i) $\forall u, v \in E$, $\Phi(u+v) \leq \Phi(u) + \Phi(v)$,

(ii) $\forall u \in E$, $\forall \lambda \geq 0$, $\Phi(\lambda u) = \lambda\Phi(u)$.

Une application sous-linéaire $\Phi : E \to \mathbb{R}$ est linéaire si et seulement si pour tout $u \in E$, $\Phi(u) = -\Phi(-u)$.

LEMME 5.3. *Soient* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach,* $\Omega \subset E$ *un ouvert convexe de* E *et* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe sur* Ω*. La dérivée directionnelle* $f^+(x;v)$ *existe (et est finie) pour tout* $x \in \Omega$ *et tout* $v \in E$*. Pour tout* $x \in \Omega$ *la fonction de* E *dans* $\mathbb{R}$ *donnée par* $v \to f^+(x;v)$ *est de plus sous-linéaire. Enfin, pour tout* $x \in \Omega$ *et tout* $v \in E$*,* $f^+(x,v) \geq -f^+(x,-v)$*.*

DÉMONSTRATION. Soient $x \in \Omega$ et $v \in E$. Pour $t > 0$ suffisamment petit, $x + tv \in \Omega$. On considère la fonction définie pour $t \in]0, t_0[$, $t_0 > 0$ petit, par

$$g(t) = \frac{f(x+tv)-f(x)}{t} .$$

On montre que cette fonction est croissante. Soient $t < t' \in]0, t_0[$. On a

$$x + tv = (1 - \frac{t}{t'})x + \frac{t}{t'}(x + t'v)$$

et donc, par convexité de f,

$$f(x+tv) \leq (1-\frac{t}{t'})f(x) + \frac{t}{t'}f(x+t'v) .$$

On en déduit que $g(t) \leq g(t')$. Donc g est bien croissante sur $]0, t_0[$. Par suite $f^+(x;v)$ existe et $f^+(x;v) < +\infty$. A ce stade, possiblement $f^+(x;v) = -\infty$. Mais clairement il existe aussi $t_1 > 0$ pour lequel le segment $[x - t_1 v, x + t_1 v]$ est inclus dans Ω. Or, pour tout $t \in]0, t_1[$,

$$x = \frac{1}{2}(x - tv) + \frac{1}{2}(x + tv)$$

et donc, par convexité de f,

$$f(x) \leq \frac{1}{2}f(x-tv) + \frac{1}{2}f(x+tv) .$$

Par suite,

$$\frac{f(x+tv)-f(x)}{t} \geq -\frac{f(x-tv)-f(x)}{t}$$

et donc, par passage à la limite en $t \to 0^+$, $f^+(x,v) \geq -f^+(x,-v)$. On en déduit que $f^+(x,v) > -\infty$ puisque $f^+(x,-v) < +\infty$. Par suite, $f^+(x;v)$ existe et est finie pour tout $x \in \Omega$ et tout $v \in E$. On passe maintenant à l'affirmation selon laquelle

$v \to f^+(x;v)$ est sous-linéaire. Le point (ii) de la définition de la sous-linéarité est clairement vérifié par $v \to f^+(x;v)$ comme on le voit en effectuant le changement de variable $t \to \lambda t$ si $\lambda > 0$. Et il est clair que $f^+(x;0) = 0$. Soient maintenant $u, v \in E$. Pour $t > 0$ suffisamment petit, $x + tu, x + tv \in \Omega$. On a

$$x + \frac{1}{2}t(u+v) = \frac{1}{2}(x+tu) + \frac{1}{2}(x+tv)$$

et donc, par convexité de f,

$$\frac{f(x+\frac{1}{2}t(u+v)) - f(x)}{t} \le \frac{f(x+tu) - f(x)}{2t} + \frac{f(x+tv) - f(x)}{2t} \ .$$

En passant à la limite en $t \to 0^+$ on en déduit que $f^+(x;u+v) \le f^+(x;u) + f^+(x;v)$. Donc $u \to f^+(x;u)$ est bien sous-linéaire. Le lemme est démontré. $\square$

Le lemme suivant traite de la continuité des applications $u \to f^+(a;u)$.

Lemme 5.4. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $\Omega \subset E$ un ouvert convexe de E, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur Ω et continue en a. Alors $v \to f^+(a;v)$ est continue.*

Démonstration. Comme f est continue en a, f est bornée au voisinage de a. Avec le Théorème 5.12 on obtient alors que f est lipschitzienne au voisinage de a. De la définition première de f^+ on tire qu'il existe $M > 0$ tel que $f^+(a;u) \le M\|u\|$ pour tout $u \in E$. On en déduit avec le Lemme 5.3 que

$$\begin{aligned} -M\|u\| &\le -f^+(a;-u) \\ &\le f^+(a;u) \end{aligned}$$

et donc $|f^+(a;u)| \le M\|u\|$ pour tout $u \in E$. Par sous additivité de $f^+(a;\cdot)$ on peut écrire que $f^+(a;v) - f^+(a;u) \le f^+(a;v-u)$ et il suit que

$$f^+(a;v) - f^+(a;u) \le M\|v-u\| \ .$$

Par symétrie en u et v,

$$\left|f^+(a;v) - f^+(a;u)\right| \le M\|v-u\|$$

pour tous $u, v \in E$. Donc $v \to f^+(a;v)$ est lipschitzienne. En particulier, comme voulu, $v \to f^+(x;v)$ est continue. Le lemme est démontré. $\square$

On déduit facilement des Lemmes 5.3 et 5.4 une condition nécessaire et suffisante pour la Gateaux-différentiabilité en a d'une fonction convexe continue en a.

Lemme 5.5. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $\Omega \subset E$ un ouvert convexe de E, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur Ω et continue en a. Alors f est Gateaux-différentiable en a si et seulement si $f^+(a;u) = -f^+(a;-u)$ pour tout $u \in E$.*

Démonstration. On sait déjà avec les Lemmes 5.3 et 5.4 que $f^+(a;u)$ existe (et est finie) pour tout $u \in E$ et que la fonction $u \to f^+(a;u)$ est continue. Donc f est Gateaux-différentiable en a si et seulement si $u \to f^+(a;u)$ est linéaire. Or $\Phi = f^+(a;\cdot)$ est sous-linéaire en vertue du Lemme 5.3 et une fonction sous linéaire Φ est linéaire si et seulement si $\Phi(u) = -\Phi(-u)$ pour tout $u \in E$. D'où le lemme. $\square$

Soient maintenant $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach séparable, $\Omega \subset E$ un ouvert convexe de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue sur Ω. On considère dans ce qui suit un sous ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \subset E$, dense dans E, dont l'existence est donnée par l'hypothèse de séparabilité de $(E, \|\cdot\|)$. On note

$$A_m^n = \left\{ x \in \Omega \ / \ f^+(x; u_n) + f^+(x; -u_n) \geq \frac{1}{m} \right\}$$

puis $A = \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}^\star} A_m^n$.

Lemme 5.6. *Avec les notations ci-dessus, la fonction f est Gateaux-différentiable sur $\Omega \backslash A$.*

Démonstration. Il suit du Lemme 5.5, et de l'inégalité $f^+(x; u) \geq -f^+(x; -u)$ du Lemma 5.3, que si f n'est pas Gateaux-différentiable en x, alors

$$f^+(x; u) + f(x; -u) > 0$$

pour un $u \in E$. Soit $m \geq 1$ tel que $f^+(x; u) + f(x; -u) \geq \frac{2}{m}$. Par continuité de $u \to f^+(x; u)$ donnée par le Lemme 5.4, et par densité des u_n dans E, il existe alors $n \geq 1$ tel que $u \in A_m^n$. Donc, en particulier, $x \in A$ et ainsi, f est forcément continue sur $\Omega \backslash A$. $\square$

On peut maintenant conclure la preuve du théorème de Mazur.

Démonstration du Théorème 5.14. Soit $x \in \Omega$. La fonction f est lipschitzienne au voisinage de x d'après le Théorème 5.12 puisque la continuité de f en x entraîne que f est bornée au voisinage de x. Soit (x_p) une suite de points de Ω qui converge vers x. Il existe alors $M > 0$ tel que pour $p \gg 1$, $t > 0$ et $u \in E$,

$$\frac{f(x + tu) - f(x)}{t} \geq \frac{f(x_p + tu) - f(x_p)}{t} - \frac{M}{t} \|x_p - x\| \ . \tag{5.7}$$

Soit $t_p > 0$ tel que $t_p \to 0$ et $\|x_p - x\|/t_p \to 0$. Alors en prenant $t = t_p$ dans (5.7) et en faisant tendre $p \to \infty$ on obtient que

$$f^+(x; u) \geq \limsup_{p \to +\infty} \frac{f(x_p + t_p u) - f(x_p)}{t_p} \ .$$

On a vu dans la preuve du Lemme 5.3 que la fonction

$$t \to \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}$$

est croissante pour $t > 0$. Donc

$$\frac{f(x_p + t_p u) - f(x_p)}{t_p} \geq f^+(x_p; u)$$

et ainsi

$$f^+(x; u) \geq \limsup_{p \to +\infty} f^+(x_p; u)$$

pour tout $u \in E$. Par suite, si (x_p) est une suite de points de A_m^n qui converge vers x dans Ω, alors $x \in A_m^n$. On en déduit que les A_m^n sont des fermés de Ω (pour la topologie induite de E). On montre maintenant qu'ils sont aussi d'intérieurs vides. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $x \in A_m^n$ et $r > 0$ tels que $B_x(r) \subset A_m^n$. Soit $\hat{r}_n = r/\|u_n\|$. La fonction $g :]0, \hat{r}_n[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$g(t) = f(x + tu_n)$$

est bien définie sur $]0, \hat{r}_n[$ et elle est convexe sur $]0, \hat{r}_n[$ car f l'est sur $B_x(r) \subset \Omega$. Soit $x_t = x + tu_n$, $t \in]0, \hat{r}_n[$. Par hypothèse d'absurde $x_t \in A_m^n$ et donc, pour tout $t \in]0, \hat{r}_n[$,

$$f^+(x_t; u_n) \geq \frac{1}{m} - f^+(x_t; -u_n)$$

par définition de A_m^n. Donc $g'_d(t) > g'_g(t)$ pour tout $t \in]0, \hat{r}_n[$ et ainsi g n'est différentiable en aucun point $t \in]0, \hat{r}_n[$. Une contradiction avec le Théorème 5.5. Les A_m^n sont donc des fermés d'intérieurs vides de Ω, Ω étant un ouvert d'un espace de Banach. Le théorème de Baire (cf. Théorème 6.16) donne alors que A est lui aussi d'intérieur vide. Le Lemme 5.6 permet de conclure. D'où le théorème. $\square$

En dimension finie, et de façon assez surprenante, Gateaux-différentiabilité et Fréchet-différentiabilité sont deux notions équivalentes pour les fonctions convexes.

Théorème 5.15. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $\Omega \subset E$ un ouvert convexe de E, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur Ω. Alors f est Gateaux-différentiable en a si et seulement si elle est Fréchet-différentiable en a.*

Démonstration. Le sens Fréchet-différentiabilité $\Rightarrow$ Gateaux-différentiabilité est évident. Pour l'implication réciproque on suppose donc que f est Gateaux-différentiable en a. Sans perdre en généralité, par équivalence des normes en dimension finie, on peut supposer que $E = \mathbb{R}^n$ muni de la métrique euclidienne. Soit $p = \nabla f(a)$ le gradient de f en a (donc le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées les dérivées partielles de f en a). En vertue du Théorème 5.13, f est lipschitzienne sur une boule ouverte $B_a(r)$ contenue dans Ω. Soit $\varepsilon > 0$. Par compacité de la sphère unité S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$, il existe $u_1, \ldots, u_N \in S^{n-1}$ tels que $S^{n-1} \subset \bigcup_{i=1}^N B_{u_i}(\varepsilon)$. Comme f est Gateaux-différentiable en a, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $i = 1, \ldots, N$, il existe $\delta_i > 0$ tel que pour tout $t \in [-\delta_i, \delta_i]$,

$$\|f(a + tu_i) - f(a) - t\langle p, u_i\rangle\| \leq \varepsilon|t| \ ,$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire euclidien. Soit $\delta = \min_i \delta_i$. Pour tout $u \in S^{n-1}$ il existe i tel que $\|u - u_i\| < \varepsilon$. Si K est la constante de Lipschitz de f sur $B_a(r)$, et si $\|u_i - u\| < \varepsilon$, on peut écrire que

$$\|f(a + tu_i) - f(a + tu)\| \leq K\varepsilon|t|$$

pour tout $t \in] - r, r[$, et bien sûr on a aussi que

$$|\langle p, u_i\rangle - \langle p, u\rangle| \leq \|p\|\varepsilon \ .$$

Donc, pour $u \in S^{n-1}$ et $t \in] - \hat{r}, \hat{r}[$, où $\hat{r} = \min(r, \delta)$, on obtient que

$$\begin{aligned} &\|f(a + tu) - f(a) - t\langle p, u\rangle\| \\ &\leq \|f(a + tu_i) - f(a) - t\langle p, u_i\rangle\| + K\varepsilon|t| + \|p\|\varepsilon|t| \\ &\leq (1 + K + \|p\|)\,\varepsilon|t| \ . \end{aligned}$$

Tout $v \in \mathbb{R}^n$ s'écrit $v = tu$ pour un $u \in S^{n-1}$, et $|t| = \|v\|$. On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\hat{r} > 0$ tel que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, si $\|v\| < \hat{r}$, alors

$$\|f(a + v) - f(a) - \langle p, v\rangle\| \leq C\varepsilon\|v\| \ .$$

Donc f est Fréchet-différentiable en a et sa différentielle de Fréchet en a est la différentielle de Gateaux en a, à savoir la forme linéaire attendue $u \to \langle p, u\rangle$, où $p = \nabla f(a)$ est le gradient de f en a. Le théorème est démontré. $\square$

4. Convexité et sous-différentiabilité

On se place ici le cadre hilbertien. La notion de sous-différentielle des fonctions convexes est donnée dans la définition suivante.

DÉFINITION 5.3. *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Soit Ω un ouvert convexe de H, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur Ω. Un vecteur $p \in H$ est appelé sous-gradient de f en a si*

$$\forall x \in \Omega, f(x) \geq f(a) + \langle p, x - a \rangle \ .$$

Le sous-différentiel de f en a est l'ensemble $\partial f(a)$ constitué des sous-gradients de f en a. Enfin, on dit que f est sous-différentiable en a si $\partial f(a) \neq \emptyset$.

Si f est Gateaux-différentiable en a, alors la continuité de la forme linéaire $h \to f'(a; h)$ et le premier théorème de Riesz (Théorème 3.19) donnent qu'il existe $p \in H$ tel que $f'(a; h) = \langle p, h \rangle$ pour tout $h \in H$. Par analogie avec le cas $\mathbb{R}^n$ on peut voir p comme le gradient de f en a et, comme on s'en convaincra facilement, f est automatiquement sous-différentiable en a de sous-différentiel en a réduit à un seul élément: $\partial f(a) = \{p\}$. La réciproque, dont on pourra trouver la preuve dans la plupart des ouvrages traitant de la convexité, est plus surprenante: si $f : H \to \mathbb{R}$ convexe est continue en un point $a \in H$, et si $\partial f(a)$ est réduit à un seul élément, alors f est Gateaux-différentiable en a.

Le sous-différentiel peut être important, et même avec des fonctions très simples. A titre d'exemple d'un $\partial f(a)$ important, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction convexe donnée par $f(x) = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $\partial f(0) = [-1, +1]$.

LEMME 5.7. *Pour tout $x \in \Omega$, $\partial f(x)$ est un convexe fermé de H.*

DÉMONSTRATION. Si $(p_n) \in \partial f(a)^{\mathbb{N}}$ est une suite de points de $\partial f(a)$, et si $p_n \to p$ dans H, alors clairement $p \in \partial f(a)$. Donc $\partial f(a)$ est un fermé. Soit maintenant $p_1, p_2 \in \partial f(a)$. Soit aussi $t \in [0, 1]$. On a

$$f(x) \geq f(a) + \langle p_1, x - a \ \Rightarrow \ (1-t)f(x) \geq (1-t)f(a) + \langle (1-t)p_1, x - a \rangle \ ,$$
$$f(x) \geq f(a) + \langle p_2, x - a \ \Rightarrow \ tf(x) \geq tf(a) + \langle tp_2, x - a \rangle \ ,$$

et par addition de ces deux relations on obtient que pour tout $x \in \Omega$,

$$f(x) \geq f(a) + \langle (1-t)p_1 + tp_2, x - a \rangle \ .$$

Donc $(1-t)p_1 + tp_2 \in \partial f(a)$ et $\partial f(a)$ est convexe. □

Etant donné un espace métrique (X, d) une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite semi-continue inférieurement en un point $a \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $f(x) \geq f(a) - \varepsilon$ pour tout $x \in B_a(\eta)$, où $B_a(\eta)$ est la boule de centre a et de rayon η. Donc si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in B_a(\eta), f(x) \geq f(a) - \varepsilon \ .$$

Si f est semi-continue inférieurement en a alors pour toute suite (x_n) de points de X qui converge vers a,

$$f(a) \leq \liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \ , \tag{5.8}$$

où la limite inf est, dans $\mathbb{R} \bigcup \{\pm\infty\}$, la plus petite des limites des sous suites de $f(x_n)$, vue aussi comme la limite de la suite croissante de $\mathbb{R} \bigcup \{\pm\infty\}$ qui est constituée des $u_n = \inf_{m \geq n} f(x_m)$. Les fonctions convexes semi-continues inférieurement sont sous-différentiables en dimension finie. C'est l'objet du théorème suivant.

THÉORÈME 5.16. *Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert de dimension finie. Une fonction convexe $f : H \to \mathbb{R}$ est sous-différentiable en tout point de H.*

DÉMONSTRATION. Comme f est convexe, $\mathrm{Epi}(f)$ est un convexe de $H \times \mathbb{R}$. Il est clairement fermé dans $H \times \mathbb{R}$ car f est continue d'après le Théorème 5.13. En effet, si $(x_n, t_n) \in \mathrm{Epi}(f)$ pour tout n, et si $x_n \to x$ dans H et $t_n \to t$ dans $\mathbb{R}$ lorsque $n \to +\infty$, alors par passage à la limite dans les inégalités $t_n \geq f(x_n)$, et par continuité de f, on obtient que $t \geq f(x)$. Donc toute limite dans $H \times \mathbb{R}$ d'une suite de points de $\mathrm{Epi}(f)$ est encore dans $\mathrm{Epi}(f)$, ce qui implique que $\mathrm{Epi}(f)$ est un fermé de $H \times \mathbb{R}$. Pour $a \in H$,

$$(a, f(a)) \in \partial\mathrm{Epi}(f) .$$

Le théorème de séparation de Hahn-Banach (admis ici) entraîne l'existence d'un hyperplan d'appui à $\mathrm{Epi}(f)$ au point $(a, f(a))$. Il existe ainsi $(p, \theta) \in H \times \mathbb{R}\backslash\{(0, 0)\}$ tel que

$$\langle p, x\rangle + \theta t \leq \langle p, a\rangle + \theta f(a) \tag{5.9}$$

pour tout $(x, t) \in \mathrm{Epi}(f)$. En prenant $x = a$ et $t = f(a) + \hat{t}$, avec $\hat{t} \geq 0$, alors $(x, t) \in \mathrm{Epi}(f)$ et on obtient avec (5.9) que $\theta \leq 0$. On montre maintenant que nécessairement $\theta < 0$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\theta = 0$. Alors $\langle p, x - a\rangle \leq 0$ pour tout $x \in H$ puisque pour tout $x \in H$, $(x, f(x)) \in \mathrm{Epi}(f)$. En prenant $x = a+p$ on obtient que $p = 0$ ce qui est en contradiction avec $(p, \theta) \neq (0, 0)$. Donc $\theta < 0$. Soit $\hat{p} = (-1/\theta)p$. Alors (5.9) entraîne que

$$\langle \hat{p}, x\rangle - t \leq \langle \hat{p}, a\rangle - f(a) \tag{5.10}$$

pour tout $(x, t) \in \mathrm{Epi}(f)$. En particulier, en prenant $t = f(x)$, on obtient avec (5.10) que $f(x) \geq f(a) + \langle \hat{p}, x - a\rangle$ pour tout $x \in H$. Ainsi $\hat{p} \in \partial f(a)$ et donc $\partial f(a) \neq \emptyset$. Le théorème est démontré. □

La sous-différentiabilité (comme la différentiabilité dans le cas de fonctions quelconques) permet de caractériser les minimums des fonctions convexes.

THÉORÈME 5.17. *Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert. Soit Ω un ouvert convexe de H, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur Ω sous-différentiable en a. Alors a est un point de minimum de f sur Ω si et seulement si $0 \in \partial f(a)$.*

DÉMONSTRATION. Si $0 \in \partial f(a)$ alors $f(x) \geq f(a)$ pour tout $x \in \Omega$ et donc a est un point de minimum de f sur Ω. Réciproquement, si a est un point de minimum de f sur Ω alors $f(x) \geq f(a)$ pour tout $x \in \Omega$ et donc $0 \in \partial f(a)$. D'où le théorème. □

5. Fonctions strictement et α-convexes

En plus des fonctions convexes on peut définir les fonction strictement convexes et α-convexes. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset E$ ouvert convexe, est dite strictement convexe sur Ω si pour tous $x, y \in \Omega$ avec $x \neq y$, et pour tout $t \in]0, 1[$,

$$f\big((1 - t)x + ty\big) < (1 - t)f(x) + tf(y) .$$

Bien sûr, une fonction strictement convexe est convexe. Pour ce qui est de l'α-convexité, la définition suit.

DÉFINITION 5.4. *Soient* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach,* Ω *un ouvert convexe de* E*,* $\alpha > 0$ *un réel strictement positif et* $f : \Omega \to \mathbb{R}$*. On dit que* f *est* α*-convexe sur* Ω *si pour tous* $x, y \in \Omega$*,*

$$f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y) - \frac{\alpha}{2}t(1-t)\|x-y\|^2 \ ,$$

ce qui revient encore à dire que

$$x \to f(x) - \frac{\alpha}{2}\|x\|^2$$

est convexe. Lorsque f *est deux fois différentiables,* f *est* α*-convexe si et seulement si* $D^2f(x) \geq \alpha$ *au sens des formes bilinéaires.*

Les fonctions α-convexes sont bien sûr strictement convexes (et donc aussi convexes).

LEMME 5.8. *Une fonction* α*-convexe continue définie sur un ouvert convexe* Ω *est toujours minorée.*

DÉMONSTRATION: Supposons par l'absurde qu'il existe (x_k) une suite de points de Ω qui est telle que $f(x_k) \to -\infty$ lorsque $k \to +\infty$. Soit $x \in \Omega$ fixé. Pour tout $t \in [0,1]$, et tout k,

$$f\big((1-t)x + tx_k\big) \leq (1-t)f(x) + tf(x_k) - \frac{\alpha}{2}t_k(1-t_k)\|x_k - x\|^2 \ .$$

Quitte à extraire une sous suite on peut supposer que $\|x_k\|$ a une limite ℓ lorsque $k \to +\infty$. Si $\ell < +\infty$, on choisit $t_k > 0$, tendant vers 0 lorsque $k \to +\infty$ et vérifiant que $t_kf(x_k) \to -\infty$ lorsque $k \to +\infty$. Par exemple

$$t_k = \frac{1}{\sqrt{|f(x_k)|}}$$

pour $k \gg 1$. Si $\ell = +\infty$ on choisit $t_k > 0$, tendant vers 0 lorsque $k \to +\infty$, vérifiant que $t_k\|x_k\| \to 0$ mais aussi que $t_k\|x_k\|^2 \to +\infty$ lorsque $k \to +\infty$. Par exemple

$$t_k = \frac{1}{\|x_k\|^{3/2}} \ .$$

Soit

$$\hat{x}_k = (1-t_k)x + t_kx_k \ .$$

Par inégalité triangulaire, $\|x_k - x\|^2 \geq \frac{1}{4}\|x_k\|^2$ pour $k \gg 1$ lorsque $\ell = +\infty$. Par suite, dans les deux cas $\ell < +\infty$ et $\ell = +\infty$, $\hat{x}_k \to x$ lorsque $k \to +\infty$ tandis que $f(\hat{x}_k) \to -\infty$. Par continuité $f(x) = -\infty$. Une contradiction. $\square$

Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite infinie à l'infini si $f(x) \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to +\infty$. Le résultat suivant a lieu.

LEMME 5.9. *Une fonction* α*-convexe continue définie sur l'espace* E *tout entier est infinie à l'infini.*

DÉMONSTRATION. Soit f une fonction α-convexe et continue définie sur E. Soit $x_0 \in E$ fixé. Par α-convexité, pour tout $x \in E$, et tout $t \in [0,1]$,

$$f\big(x_0 + t(x - x_0)\big) + \frac{\alpha}{2}t(1-t)\|x - x_0\|^2 \leq (1-t)f(x_0) + tf(x) \ .$$

En vertue du Lemme 5.8, pour tout $x \in E$, et tout $t \in [0,1]$,

$$m_0 + \frac{\alpha}{2}t(1-t)\|x - x_0\|^2 \leq (1-t)f(x_0) + tf(x)$$

où $m_0 \in \mathbb{R}$. On fixe $t = \frac{1}{2}$ et on pose $m_1 = m_0 - \frac{1}{2}f(x_0)$. Alors

$$f(x) \geq 2m_1 + \frac{\alpha}{4}\|x - x_0\|^2$$

pour tout $x \in E$. Il s'ensuit facilement que f est infinie à l'infini. □

Si f est différentiable, et si l'on se place dans le cadre hilbertien, il y a plus simple comme preuve des Lemmes 5.8 et 5.9 en utilisant la caractérisation différentiable du Théorème 5.11. On fixe $x_0 \in \Omega$ et on écrit que puisque $f - \frac{\alpha}{2}\|\cdot\|^2$ est convexe, c'est que pour tout $x \in \Omega$,

$$f(x) - \frac{\alpha}{2}\|x\|^2 \geq f(x_0) - \frac{\alpha}{2}\|x_0\|^2 + Df(x_0).(x - x_0) - \alpha\langle x_0, x - x_0\rangle$$

ce qui donne encore, en écrivant que $\|Df(x_0).(x)\| \leq \|Df(x_0)\| \times \|x\|$, que

$$f(x) \geq \frac{\alpha}{2}\|x\|^2 - C_1 - C_2\|x\| \ ,$$

où les constantes $C_1, C_2 > 0$ ne dépendent pas de x. Les Lemmes 5.8 et 5.9 suivent alors facilement.

6. Minimiseurs des fonctions convexes

On traite brièvement de quelques résultats concernant les minimiseurs des fonctions convexes. Le premier résultat d'existence est général et ne concerne pas uniquement les fonctions convexes.

Théorème 5.18 (Existence de minimiseurs). *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach.* **(i)** *Si f est deux fois différentiable en un point $a \in E$, si a est un point critique de f et si $D^2f(a) \geq \alpha$ au sens des formes bilinéaires, avec $\alpha > 0$, alors a est un minimiseur local de f.* **(ii)** *Si f est infinie à l'infinie, au sens où $f(x) \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to +\infty$, et si E est de dimension finie, alors f possède un minimiseur global dans E.*

Démonstration. La première affirmation est celle déjà faite au Théorème 4.12. Pour ce qui est de la seconde, soit $x_0 \in E$ un point quelconque de E. Comme f est infinie à l'infini, il existe $R > 0$ tel que $f(x) > f(x_0)$ pour tout $x \in E\backslash\overline{B}$, où $\overline{B}$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon R. En particulier, nécessairement, $x_0 \in \overline{B}$. Comme E est de dimension finie, $\overline{B}$ est compacte. Toute fonction continue sur un compact atteint ses bornes. Il existe donc $a \in \overline{B}$ qui est tel que $f(a) \leq f(x)$ pour tout $x \in \overline{B}$. En particulier, $f(a) \leq f(x_0)$ puisque $x_0 \in \overline{B}$. On en déduit que a est un minimiseur global de f. □

Si l'on revient aux fonctions convexes, leur comportement en minimisation est assez surprenant. Le théorème suivant a lieu.

Théorème 5.19. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $\Omega \subset E$ un ouvert convexe de E, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur Ω. Alors:* **(i)** *Si a est un minimiseur local de f, c'est aussi un minimiseur global de f.* **(ii)** *Si f est strictement convexe, elle a au plus un minimiseur local (ou global puisqu'il s'agit de la même chose pour les fonctions convexes).* **(iii)** *Si f est différentiable sur Ω alors a est un minimiseur local (ou global puisqu'il s'agit de la même chose pour les fonctions convexes) si et seulement si a est un point critique de f.*

DÉMONSTRATION. **(i)** Il suffit de montrer qu'il ne peut exister $b \in \Omega$ tel que $f(b) < f(a)$. Or, par convexité, si $f(b) < f(a)$ alors

$$f\big((1-t)a + tb\big) \leq (1-t)f(a) + tf(b) < f(a)$$

pour tout $t \in]0,1]$, en particulier pour $0 < t \ll 1$. Il ne reste plus qu'à remarquer que dans n'importe quel voisinage ouvert V de a il y a des $(1-t)a + tb$ avec $0 < t \ll 1$.

(ii) Si a et b sont des minimiseurs de f, avec $a \neq b$, alors

$$f(\frac{a+b}{2}) < \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)$$

par stricte convexité, et comme $f(a) = f(b)$, on obtient une contradiction.

(iii) Si a est un minimiseur local de f alors, le résultat n'a rien à voir avec la convexité, forcément $\nabla f(a) = 0$ comme on l'a vu au Théorème 4.12. Réciproquement, si f est convexe et $\nabla f(a) = 0$, comme f est au dessus de tous ses hyperplans tangents d'après le Théorème 5.11, en prenant l'hyperplan tangent en a on récupère que $f(x) \geq f(a)$ pour tout $x \in \Omega$. □

Du Lemme 5.9 et des Théorèmes 5.18 et 5.19 on obtient facilement que le résultat suivant a lieu.

LEMME 5.10. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach de dimension finie. Une fonction infinie à l'infini et strictement convexe* $f : E \to \mathbb{R}$ *possède un, et un unique, minimiseur. En particulier une fonction* α*-convexe définie sur l'espace* E *tout entier possède un, et un unique, minimiseur.*

Dans la cadre Hilbert, et lorsque les fonctions sont sous-différentiables, il s'agira aussi de ne pas oublier le Théorème 5.17.

CHAPITRE 6

Petit précis de topologie

Ce chapitre propose un survol de topologie, avec des théorèmes démontrés, et d'autres pas, des preuves détaillées, et d'autres pas.

1. Espaces topologiques

Définition 6.1. *Un espace topologique est un couple* $(X, \mathcal{O})$*, où* X *est un ensemble, et* $\mathcal{O}$ *est un sous ensemble de* $\mathcal{P}(X)$*, l'ensemble des parties de* X*, qui vérifie:*

(1) $\emptyset \in \mathcal{O}$ *et* $X \in \mathcal{O}$*,*

(2) toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{O}$ *est un élément de* $\mathcal{O}$*,*

(3) toute réunion (même infinie) d'éléments de $\mathcal{O}$ *est un élément de* $\mathcal{O}$*.*

On dit que $\mathcal{O}$ *définit une topologie sur* X*. Les ensembles de* $\mathcal{O}$ *sont les ouverts de la topologie.*

Dans ce qui suit, $(X, \mathcal{O})$ désigne un espace topologique, et A désigne un sous ensemble de X.

Définition 6.2. *On dit que* A *est une partie fermée de* X*, ou encore un fermé de* X*, si* $X \backslash A \in \mathcal{O}$*, i.e si* $X \backslash A$ *est un ouvert de* X*.*

Un sous ensemble de X n'est pas forcément soit ouvert soit fermé. Par convention $\emptyset$ et X sont à la fois des ouverts et des fermés de X.

Lemme 6.1. *Toute intersection (même infinie) de fermés est un fermé, et toute réunion finie de fermés est un fermé.*

Démonstration. La clef réside dans les formules de Morgan:

$$X \backslash \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X \backslash A_i) \text{ et } X \backslash \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X \backslash A_i) \ .$$

On se ramène alors aux propriétés (2) et (3) qui caractérisent $\mathcal{O}$. □

Définition 6.3. *On appelle voisinage de* A *toute partie* V *de* X *qui est telle qu'il existe* $U \in \mathcal{O}$ *avec* $A \subset U \subset V$*. En particulier, on appelle voisinage d'un point* $x \in X$ *toute partie* V *de* X *qui est telle qu'il existe* $U \in \mathcal{O}$ *avec* $x \in U$ *et* $U \subset V$*.*

On note dans ce qui suit $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

Définition 6.4. *On appelle adhérence de* A*, et on note* $\overline{A}$*, le sous ensemble de* X *défini par*

$$\overline{A} = \left\{ x \in X \ / \ \forall V \in \mathcal{V}(x), \ V \cap A \neq \emptyset \right\} \ .$$

C'est un fermé, et même le plus petit des fermés contenant A*.*

On vérifie que $\overline{A}$ est bien un fermé et même le plus petit des fermés contenant A. Soit $x \in X\backslash\overline{A}$. Il existe alors $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \cap A = \emptyset$. Il existe donc U_x ouvert avec $x \in U_x$ et $U_x \cap A = \emptyset$. On a $U_x \subset X\backslash\overline{A}$ puisqu'un ouvert U_x est un voisinage de chacun de ses points. On a alors que

$$X\backslash\overline{A} = \bigcup_{x \in X\backslash\overline{A}} U_x$$

et donc $X\backslash\overline{A}$ est un ouvert (comme réunion d'ouverts) de sorte que $\overline{A}$ est un fermé (par définition des fermés). On a bien sûr que $A \subset \overline{A}$. Soit maintenant F un fermé tel que $A \subset F$. Si $x \notin F$ alors $x \in X\backslash F$ qui est un ouvert qui ne rencontre pas A. Donc $x \in X\backslash\overline{A}$ et puisque x est quelconque dans $X\backslash F$, $X\backslash F \subset X\backslash\overline{A}$, ce qui revient à dire que $\overline{A} \subset F$. Donc $\overline{A}$ est bien le plus petit des fermés qui contient A.

Lemme 6.2. *Pour tout $A \subset X$, $A \subset \overline{A}$, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ et A est un fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.*

Démonstration. On a déjà vu que $A \subset \overline{A}$. Si A est un fermé, alors A est forcément le plus petit fermé contenant A et donc $A = \overline{A}$. Réciproquement, si $A = \overline{A}$ alors A est un fermé puisque $\overline{A}$ en est un. Donc A est un fermé si et seulement si $A = \overline{A}$. Il suit que forcément $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ puisque $\overline{A}$ est un fermé. D'où le lemme. $\square$

Définition 6.5. *On appelle intérieur de A, et on note $\mathring{A}$, le sous ensemble de X défini par*

$$\mathring{A} = \left\{x \in X \ / \ A \in \mathcal{V}(x)\right\} .$$

En d'autres termes, $x \in \mathring{A}$ si et seulement si il existe $U \in \mathcal{O}$ avec $x \in U$ et $U \subset A$. C'est un ouvert et le plus grand des ouverts contenus dans A.

On montre que $\mathring{A}$ est un ouvert et même le plus grand ouvert contenu dans A. Si $x \in \mathring{A}$ alors il existe U_x un ouvert contenant x et tel que $U_x \subset A$. En écrivant que $\mathring{A} = \bigcup_{x \in \mathring{A}} U_x$ on voit que $\mathring{A}$ est un ouvert (puisque réunion d'ouverts). Clairement $\mathring{A} \subset A$. Soit maintenant O un ouvert contenu dans A. Les points de O sont dans $\mathring{A}$ puisque O est un voisinage de chacun de ses points. Donc $O \subset \mathring{A}$ et donc $\mathring{A}$ est bien le plus grand des ouverts contenus dans A.

Lemme 6.3. *Pour tout $A \subset X$, $\mathring{A} \subset A$, $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$ et A est un ouvert si et seulement si $\mathring{A} = A$.*

Démonstration. On a déjà vu que $\mathring{A} \subset A$. Si A est un ouvert c'est clairement le plus grand ouvert contenu dans A et donc $\mathring{A} = A$. Réciproquement si $\mathring{A} = A$ alors A est un ouvert puisque $\mathring{A}$ en est un. Donc A est un ouvert si et seulement si $\mathring{A} = A$. On en déduit que $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$. $\square$

Les relations suivantes ont lieues.

Proposition 6.1. *Si A et B sont deux parties de X:*

$$\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B} \ , \ \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B} \ , \ X\backslash\overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{X\backslash A}}$$

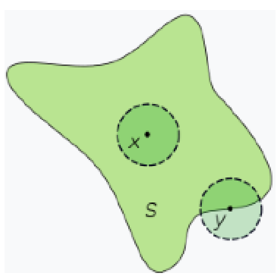
$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \ , \ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \ , \ X\backslash\mathring{A} = \overline{X\backslash A} \ .$$

Démonstration. Pour ne pas trop alourdir la rédaction on se restreint à la preuve des trois premières relations. Pour la première, on remarque que $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$ est un ouvert. Il est contenu dans A, donc dans $\mathring{A}$, et même chose avec B. Donc $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Réciproquement, $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ est un ouvert contenu dans $A \cap B$. Donc, $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$. D'où la première égalité par double inclusion. En remarquant que $A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, et que $\overline{A} \cap \overline{B}$ est un fermé on obtient que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Il n'y a pas d'espoir d'obtenir l'égalité en toute généralité comme on le voit en considérant $A = [0,1[$ et $B =]1,2]$ pour lesquels $A \cap B = \emptyset$ tandis que $\overline{A} = [0,1]$ et $\overline{B} = [1,2]$ de sorte que $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$. Pour la troisième relation on remarque que $X \backslash \overline{A}$ est un ouvert et que $X \backslash \overline{A} \subset X \backslash A$. Donc $X \backslash \overline{A} \subset \overset{\circ}{\widehat{X \backslash A}}$. Pour montrer l'inclusion réciproque on considère $x \in \overset{\circ}{\widehat{X \backslash A}}$. Il existe alors U_x un ouvert contenant x tel que $U_x \subset X \backslash A$. Donc $x \notin \overline{A}$ et ainsi, puisque x est quelconque dans $\overset{\circ}{\widehat{X \backslash A}}$, on obtient que $\overset{\circ}{\widehat{X \backslash A}} \subset X \backslash \overline{A}$. D'où la troisième relation par double inclusion. $\square$

La notion de frontière est aussi une notion importante en topologie.

Définition 6.6. *On appelle frontière de A, et on note ∂A, le sous ensemble de X défini par $\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A}$.*

Les points de la frontière sont caractérisés par le fait que $x \in \partial A$ si et seulement si pour tout voisinage V de x, $V \cap A \neq \emptyset$ (qui traduit $x \in \overline{A}$) et $V \cap (X \backslash A) \neq \emptyset$ (qui traduit qu'il n'existe pas de voisinage V de x qui soit contenu dans A et donc que $x \notin \mathring{A}$).



Le point x est intérieur à S. Le point y est sur la frontière de S.

La frontière est un fermé puisque $\partial A = \overline{A} \cap (X \backslash \mathring{A})$, et on a donc ∂A qui s'écrit comme intersection de deux fermés. On montre qu'un sous ensemble A est fermé si et seulement si $\partial A \subset A$. Si A est fermé, $\overline{A} = A$ et donc $\partial A \subset A$. Réciproquement, si $\partial A \subset A$ alors $\overline{A} \subset A$ car si $x \in \overline{A}$ soit $x \in \mathring{A}$, et auquel cas, trivialement $x \in A$, soit $x \in \partial A$, auquel cas $x \in A$ par hypothèse. Donc $\overline{A} \subset A$ et comme on a toujours $A \subset \overline{A}$, c'est que $A = \overline{A}$. Donc A est fermé.

Définition 6.7. *Un sous ensemble $A \subset X$ est dit dense dans X si $\overline{A} = X$.*

On termine cette section avec les notions de base de topologie et de topologie induite.

Définition 6.8. *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{O}$ est une base de la toplogie de X si tout ouvert de X peut s'écrire comme réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.*

Une partie $\mathcal{SB}$ de $\mathcal{P}(X)$ est une sous base de la topologie de X si tout ouvert de X est réunion d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{SB}$.

DÉFINITION 6.9. *Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $A \subset X$ une partie de X. La topologie induite sur A par celle de X est définie par*

$$\mathcal{O}_A = \big\{U \cap A,\ U \in \mathcal{O}\big\} \ .$$

L'espace $(A, \mathcal{O}_A)$ est un sous espace topologique de X.

Un ouvert O_A de A n'est pas forcément un ouvert de X si $O_A = U \cap A$ avec $U \in \mathcal{O}$, A n'est pas un ouvert de X et $U \not\subset A$. Attention, si A n'est pas un ouvert de X il l'est cependant pour la topologie induite sur A (tout comme il est fermé pour cette même topologie au même titre que X est à la fois ouvert et fermé pour sa propre topologie). Si par contre A est un ouvert, les ouverts de A sont les ouverts de X qui sont contenus dans A.

2. Continuité - homéomorphismes - topologies particulières

La notion de fonction continue fait sens dès qu'on a une topologie.

DÉFINITION 6.10. *Soient $(X, \mathcal{O})$ et $(Y, \mathcal{O}')$ deux espaces topologiques. Une application $f : X \to Y$ est dite continue en un point x de X si $\forall V \in \mathcal{V}\big(f(x)\big)$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$. Par extension, f est continue sur X si f est continue en tout point de X.*

Le théorème suivant a lieu.

PROPOSITION 6.2. *Soient $(X, \mathcal{O})$ et $(Y, \mathcal{O}')$ deux espaces topologiques. Une application $f : X \to Y$ est continue sur X si et seulement si $\forall V \in \mathcal{O}'$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}$, et donc si et seulement si l'image réciproque par f de tout ouvert est un ouvert, ce qui est aussi équivalent à dire que pour tout F fermé de Y, $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.*

DÉMONSTRATION. L'équivalence entre la formulation avec les ouverts et la formulation avec les fermés vient de la relation $f^{-1}(Y \backslash A) = X \backslash f^{-1}(A)$ qui s'obtient facilement par double inclusion. Supposons maintenant que f est continue. Soit O un ouvert de Y. Pour tout $x \in f^{-1}(O)$, $f(x) \in O$ et O est donc un voisinage de $f(x)$. Donc $f^{-1}(O)$ est un voisinage de x et il existe ainsi U_x un ouvert de X tel que $x \in U_x$ et $U_x \subset f^{-1}(O)$. On peut alors écrire que

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{x \in f^{-1}(O)} U_x$$

et $f^{-1}(O)$ est donc un ouvert puisque réunion d'ouverts. Réciproquement supposons que l'image réciproque par f de tout ouvert est un ouvert. Soit $x \in X$ et soit $V \in \mathcal{V}\big(f(x)\big)$. Il existe alors $V_{f(x)}$ un ouvert de Y tel que $f(x) \in V_{f(x)}$ et $V_{f(x)} \subset V$. Clairement $x \in f^{-1}(V_{f(x)})$ et, par hypothèse, $f^{-1}(V_{f(x)})$ est un ouvert. On a $f^{-1}(V_{f(x)}) \subset f^{-1}(V)$ et donc $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$. Donc f est continue en x, et comme x est quelconque dans X, f est continue sur X. □

Les propriétés réciproques de celle de la proposition portent un nom. Une application qui vérifie que l'image de tout ouvert est un ouvert est dite ouverte. Une application qui vérifie que l'image de tout fermé est un fermé est dite fermée.

Deux espaces topologiques $(X, \mathcal{O})$ et $(Y, \mathcal{O}')$ sont dits homéomorphes s'il existe une bijection bicontinue $f : X \to Y$ (i.e f est bijective de X sur Y, f est continue, f^{-1} est continue). Une telle application est appelée un homéomorphisme. Les ouverts de X sont alors précisément les images réciproques par f des ouverts de Y, et les ouverts de Y sont précisément les images par f des ouverts de X.

DÉFINITION 6.11. *Soient $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille (possiblement infinie) d'espaces topologiques et $X = \prod_{i\in I} X_i$ le produit cartésien des X_i. Si $\pi_i : X \to X_i$ est la projection canonique d'indice i, l'ensemble*

$$\mathcal{A} = \left\{\pi_j^{-1}(U_j),\ j \in I,\ U_j \in \mathcal{O}_j\right\}$$

engendre une topologie sur X appelée topologie produit. L'ensemble $\mathcal{B}$ des intersections finies d'éléments de A est une base de cette topologie. L'ensemble $(X, \mathcal{O})$ est appelé espace produit des espaces $(X_i, \mathcal{O}_i)$.

Si I est fini, i.e si $I = \{1, \ldots, n\}$, alors $\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i=1}^{n} U_i,\ U_i \in \mathcal{O}_i \right\}$.

DÉFINITION 6.12. *Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique, Y un ensemble quelconque, et $f : X \to Y$ une application. L'ensemble*

$$\mathcal{O}_f = \left\{U \subset Y \ /\ f^{-1}(U) \in \mathcal{O}\right\}$$

définit une topologie sur Y, appelée topologie induite par l'application f.

En particulier, si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur X, et si $Y = X/\mathcal{R}$, la topologie induite sur $X/\mathcal{R}$ par la surjection canonique $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ est appelée la topologie quotient de X par $\mathcal{R}$.

3. Espaces séparés - convergence

On aborde la notion importante d'espace topologique séparé.

DÉFINITION 6.13. *Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est dit séparé, ou encore de Hausdorff, si $\forall x, y \in X$ avec $x \neq y$, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$, et il existe $W \in \mathcal{V}(y)$ tels que $V \cap W = \emptyset$.*

On montre que tout produit d'espaces séparés est encore un espace séparé. Par contre un espace quotient d'un espace séparé n'est pas forcément séparé.

DÉFINITION 6.14. *Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique séparé et (x_n) une suite de points de X. On dira que (x_n) converge vers $x \in X$ si*

$$\forall V \in \mathcal{V}(x),\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geq N,\ x_n \in V\ .$$

On note alors $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$, ou plus simplement on écrit que $x_n \to x$ lorsque $n \to +\infty$.

La limite, lorsqu'elle existe, est unique, et c'est là que la séparation intervient. En effet si $x \neq y$ sont limites d'une même suite (x_n), par séparation il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(y)$ avec $V \cap W = \emptyset$. Par convergence il existe N (le max des deux N donnés par les deux convergences) tel que $x_n \in V$ pour $n \geq N$ et $x_n \in W$ pour $n \geq N$. Une contradiction car alors on aurait $V \cap W \neq \emptyset$.

Définition 6.15. *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un espace topologique séparé. On dit que* $(X, \mathcal{O})$ *vérifie la propriété* $(\star)$ *si tout point de* X *possède un système fondamental dénombrable de voisinages, i.e si pour tout point* x *de* X*, il existe un sous ensemble (fini ou) dénombrable* $\mathcal{A}_x$ *de* $\mathcal{V}(x)$ *qui est tel que:* $\forall V' \in \mathcal{V}(x),\ \exists V \in \mathcal{A}_x \ /\ V \subset V'$.

En anticipant un peu, les espaces métriques vérifient la propriété $(\star)$ en considérant par exemple la famille des boules ouvertes de centre x (fixé) et de rayons $1/n$. On a alors le résultat suivant.

Proposition 6.3. *Soient* $(X, \mathcal{O})$ *et* $(Y, \mathcal{O}')$ *deux espaces topologiques séparés vérifiant la propriété* $(\star)$*. Alors:*

(1) pour toute partie A *de* X *et tout* $x \in \overline{A}$*, il existe* (x_n) *suite de points de* A *telle que* $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$*, en particulier tout point de* ∂A *est limite d'une suite de points de* A*,*

(2) Une partie A *de* X *est fermée si et seulement si pour toute suite* (x_n) *de points de* A*, si* $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ *dans* X *alors* $x \in A$*,*

(3) Une application $f : X \to Y$ *est continue en un point* x *de* X *si et seulement si pour toute suite* (x_n) *de points de* X*, si* $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ *dans* X *alors* $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$ *dans* Y*.*

Démonstration. (1) On démontre la première assertion. Si $x \in A$ il suffit de considérer la suite constante $x_n = x$ pour tout n. Sinon, $x \in \overline{A}\backslash A$. On considère une suite (V_n), système fondamental de voisinages de x. Sans perdre en généralité, en prenant des intersections successives V_1, $V_1 \cap V_2$, $V_1 \cap V_2 \cap V_3$ etc. on peut supposer que $V_{n+1} \subset V_n$ pour tout n. Par définition de l'adhérence, pour tout n, $V_n \cap A \neq \emptyset$. Soit (x_n) une suite construite en prenant $x_n \in V_n \cap A$ (sans autre exigence que d'être dans cette intersection). Alors clairement $x_n \to x$ lorsque $n \to +\infty$, et l'assertion est démontré.

(2) On démontre la seconde assertion. Supposons que pour toute suite (x_n) de points de A, si $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ dans X alors $x \in A$. Alors avec ce que l'on vient de démontrer, $\overline{A} \subset A$ et donc A est fermé. Réciproquement supposons que A est fermé. Soit (x_n) une suite convergente de points de A. On note x sa limite dans X. Pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \emptyset$ puisque les x_n pour n grand vont se trouver dans cette intersection. Donc $x \in \overline{A}$. Or, A étant fermé, $\overline{A} = A$. Donc $x \in A$. La seconde assertion est démontrée.

(3) On démontre la troisième assertion. Supposons que f est continue en x. Soit (x_n) une suite convergent vers x. Soit $V \in \mathcal{V}(f(x))$. Comme f est continue en x, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$. Donc il existe N tel que $x_n \in f^{-1}(V)$ pour tout $n \geq N$. Mais alors $f(x_n) \in V$ pour tout $n \geq N$. Et comme $V \in \mathcal{V}(f(x))$ est quelconque, c'est que $f(x_n) \to f(x)$ lorsque $n \to +\infty$. Réciproquement on suppose que pour toute suite (x_n), si $x_n \to x$ alors $f(x_n) \to f(x)$. Soit $V \in \mathcal{V}(f(x))$. On veut montrer que $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $f^{-1}(V) \notin \mathcal{V}(x)$. On considère une suite (V_n), système fondamental de voisinages de x avec, comme en (1), $V_{n+1} \subset V_n$ pour tout n. Pour tout n, $V_n \not\subset f^{-1}(V)$ car sinon, $f^{-1}(V)$ serait un voisinage de x. Donc, pour tout n, il existe $x_n \in V_n \backslash f^{-1}(V)$. Comme $x_n \in \mathcal{V}_n$ pour tout n, on a que $x_n \to x$ lorsque $n \to +\infty$. Par hypothèse on devrait donc

avoir que $f(x_n) \to f(x)$ lorsque $n \to +\infty$. Mais alors pour $n \gg 1$ suffisamment grand, $f(x_n) \in V$, et donc $x_n \in f^{-1}(V)$, une contradiction. La troisième assertion est démontrée. $\square$

4. Espaces compacts

La notion d'espace topologique compact est une notion particulièrement importante en topologie.

Définition 6.16. *Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est dit compact (un espace compact) s'il est séparé et s'il vérifie l'axiome de Borel-Lebesgue: de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous recouvrement qui soit fini.*

En d'autres termes, $(X, \mathcal{O})$ est un compact s'il est séparé et si

$$\forall (U_i)_{i \in I} \in \mathcal{O},\ X = \bigcup_{i \in I} U_i \ \Rightarrow\ \exists i_1, \dots, i_n \in I \ / \ X = \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}\ .$$

Une partie A de X est dite compacte si $(A, \mathcal{O}_A)$ est un espace compact. Par définition de la topologie induite sur A, l'axiome de Borel-Lebesgue pour A se traduit par

$$\forall (U_i)_{i \in I} \in \mathcal{O},\ A \subset \bigcup_{i \in I} U_i \ \Rightarrow\ \exists i_1, \dots, i_n \in I \ / \ A \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}\ .$$

Une partie A de X est dite relativement compacte si l'adhérence $\overline{A}$ de A est une partie compacte de X.

Théorème 6.1. *Dans un espace séparé $(X, \mathcal{O})$ tout sous espace compact de X est fermé, et dans un espace compact $(X, \mathcal{O})$, les parties compactes de X sont précisément les parties fermées de X.*

Démonstration. Supposons que $A \subset X$ soit compacte. Si A n'est pas fermé, il existe $x \in \overline{A} \backslash A$. Par séparation, pour tout $y \in A$, $y \neq x$, il existe U_y, V_y deux ouverts de X avec $x \in U_y$, $y \in V_y$ et $U_y \cap V_y = \emptyset$. Les $\Omega_y = V_y \cap A$ sont des ouverts de A et ils constituent un recouvrement ouvert de A pour y parcourant A. Par compacité il existe $y_1, \dots, y_n \in A$ tels que $A \subset \Omega_{y_1} \cup \dots \cup \Omega_{y_n}$. Or $U = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$ est un ouvert contenant x. Comme $x \in \overline{A}$, $U \cap A \neq \emptyset$ alors que, pourtant, $U \cap (\Omega_{y_1} \cup \dots \cup \Omega_{y_n}) = \emptyset$. Une contradiction. Donc $\overline{A} = A$ et A est fermé. Supposons maintenant que X est compact. Si $A \subset X$ est compact, A est fermé comme on vient de le voir (et pour cette affirmation la compacité de X ne sert à rien). Réciproquement supposons que A est fermé. Soit (U_i) un recouvrement ouvert de A par des ouverts de X. Forcément, $X = (\bigcup_{i \in I} U_i) \bigcup (X \backslash A)$, et comme A est fermé, $X \backslash A$ est ouvert. On a donc un recouvrement ouvert de X. Par compacité de X on peut en extraire un recouvrement fini, et en retirant $X \backslash A$ à ce recouvrement, on obtient un sous recouvrement fini de A. Donc A est compact. $\square$

Toute partie finie est compacte. L'ensemble formé d'une suite convergente et de sa limite est aussi toujours compact. En effet, étant donné un recouvrement ouvert de cet ensemble, un des ouverts contient x, et par convergence tous les x_n à partir d'un certain rang. Reste alors à ajouter les ouverts qui contiennent le nombre fini de points restant pour obtenir un sous recouvrement fini.

THÉORÈME 6.2 (Théorème de Bolzano-Weierstrass). *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un espace topologique séparé vérifiant la propriété* $(\star)$ *de la Définition 6.15.* $(X, \mathcal{O})$ *est un compact si et seulement si toute suite de points de* X *possède une sous suite convergente, i.e si et seulement si pour toute suite* $(x_n)_n$ *de points de* X*, il existe* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante telle que* $(x_{\varphi(n)})_n$ *converge.*

La preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass dans le cas métrique est mot pour mot celle que nous avons donné au Chapitre 3 pour les espaces vectoriels normés. Dans le cas topologique non métrique (ce qui est assez rare, voir le théorème d'Urysohn plus loin dans ce chapitre) la preuve s'adapte grâce à la propriété $(\star)$.

THÉORÈME 6.3 (Théorème de Weierstrass). *Soient* $(X, \mathcal{O})$ *et* $(Y, \mathcal{O}')$ *deux espaces topologiques, avec* $(Y, \mathcal{O}')$ *séparé, et soit* $f : X \to Y$ *une application continue. Si* A *est un compact de* X*, alors* $f(A)$ *est un compact de* Y*.*

DÉMONSTRATION. Soit A un compact de X. Soit $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $f(A)$. Comme f est continue, les $f^{-1}(V_i)$ sont des ouverts de X et, bien sûr, ils constituent un recouvrement ouvert de A. Comme A est compact on peut en extraire un sous recouvrement fini. Or $A \subset f^{-1}(V_{i_1}) \bigcup \cdots \bigcup f^{-1}(V_{i_n})$ entraîne que $f(A) \subset V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_n}$ et de tout recouvrement ouvert de $f(A)$ on a donc extrait un sous recouvrement fini. Donc $f(A)$ est compact. $\square$

La propriété réciproque porte un nom. Une application qui vérifie que l'image récirpoque de tout compact est un compact est dite propre (voir ci-dessous). On donne le théorème suivant sans preuve.

THÉORÈME 6.4 (Théorème de Tychonoff). *Tout produit d'espaces compacts est un espace compact.*

Un espace topologique séparé $(X, \mathcal{O})$ est localement compact si tout point de X possède un voisinage compact. Etant donnés $(X, \mathcal{O})$ un espace séparé, $(Y, \mathcal{O}')$ un espace localement compact, et $f : X \to Y$ une application continue, on dit que f est propre si l'image réciproque par f de tout compact de Y est un compact de X. Une application injective et propre réalise un homéomorphisme sur son image.

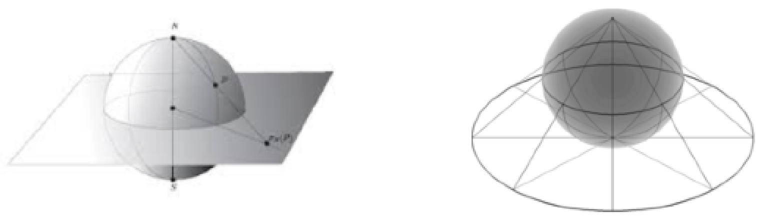
On dit qu'un espace topologique localement compact est dénombrable à l'infini s'il est réunion (finie ou) dénombrable de compacts.

5. Compactifié d'Alexandroff

L'idée dans la compactification d'Alexandroff est de rajouter un point à l'infini à un espace topologique pour en faire un compact, tout comme le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$ peut-être regardé comme un compactifié de $\mathbb{R}$, ou comme la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ peut-être vue comme un compactifié de $\mathbb{R}^n$. On renvoie là aux projections stéréographiques du Théorème 8.1.

THÉORÈME 6.5 (Théorème d'Alexandroff). *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un espace topologique localement compact. Il existe alors un espace topologique* $(\hat{X}, \hat{\mathcal{O}})$ *compact qui fait de* $(X, \mathcal{O})$ *un sous-espace topologique et qui est telle que* $\hat{X} = X \cup \{a\}$ *pour un* $a \in \hat{X}$*.*

DÉMONSTRATION. Soit a un élément arbitraire quelconque fixé. On note alors $\hat{X} = X \cup \{a\}$ de sorte que $X \subset \hat{X}$, et on définit sur $\hat{X}$ l'ensemble $\hat{\mathcal{O}} \subset \mathcal{P}(\hat{X})$ par: $\Omega \in \hat{\mathcal{O}}$ si et seulement si, soit $\Omega \subset X$ est un ouvert $(X, \mathcal{O})$, soit $\hat{X} \backslash \Omega$ est un compact de $(X, \mathcal{O})$. Ce n'est pas très difficile à démontrer, on a là une topologie sur $\hat{X}$. De plus, comme $(X, \mathcal{O})$ est localement compact, $(\hat{X}, \hat{\mathcal{O}})$ est séparé. En effet on peut toujours séparer deux points $x, y \in X$ et la question maintenant est de séparer un point quelconque x de X et a. Comme $(X, \mathcal{O})$ est localement compact, il existe K un voisinage compact de x. Soit U ouvert de X tel que $x \in U$ et $U \subset K$. Alors U et $\hat{X} \backslash K$ séparent x et a. On montre maintenant que $(\hat{X}, \hat{\mathcal{O}})$ est compact. Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $\hat{X}$. Il existe alors $i_0 \in I$ tel que $a \in \Omega_{i_0}$. Alors $K = \hat{X} \backslash \Omega_{i_0}$ est un compact de X. Pour tout $i \in I$, $K \cap \Omega_i$ est un ouvert de K, soit parce que Ω_i est un ouvert de X, soit parce que $K \cap \Omega_i = K \backslash (\hat{X} \backslash \Omega_i)$ (et $\hat{X} \backslash \Omega_i$ est un fermé de X). Par compacité de K, il existe alors $i_1, \ldots, i_N \in I$ tels que $K \subset \Omega_{i_1} \cup \cdots \cup \Omega_{i_N}$. Donc $\hat{X} \subset \Omega_{i_0} \cup \cdots \cup \Omega_{i_N}$ et ainsi de tout recouvrement ouvert de $\hat{X}$ on peut extraire un sous recouvrement fini. Donc $(\hat{X}, \hat{\mathcal{O}})$ est compact, ce qui conclue la preuve du théorème. □



La sphère S^3 compactifie le plan IR^2 par projections stéréographiques.

6. Espaces paracompacts - partitions de l'unité

Un recouvrement ouvert d'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$, à savoir une famille $(U_i)_{i \in I}$, $U_i \in \mathcal{O}$, vérifiant $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, est dit localement fini si tout point de X possède un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini de U_i. Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $(U_i)_{i \in I}$, $(V_j)_{j \in J}$ deux recouvrements ouverts de X. On dira par ailleurs que $(U_i)_{i \in I}$ est plus fin que $(V_j)_{j \in J}$ si $\forall i \in I, \exists j \in J$ tel que $U_i \subset V_j$.

Définition 6.17. *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique séparé. On dit que $(X, \mathcal{O})$ est paracompact si à tout recouvrement ouvert de X correspond un recouvrement ouvert plus fin qui est localement fini.*

Tout espace compact est paracompact et tout fermé d'un paracompact est paracompact.

Définition 6.18. *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X. On appelle partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ toute famille $(\eta_j)_{j \in J}$, $\eta_j : X \to [0,1]$, de fonctions continues sur X, à valeurs dans $[0,1]$ qui vérifie:*

(1) $\forall j \in J, \exists i \in I$ / $Supp\eta_j \subset U_i$,

(2) $\forall x \in X, \exists V \in \mathcal{V}(x)$ / $Supp\eta_j \cap V = \emptyset$ *sauf pour un nombre fini de* j,

(3) $\forall x \in X, \sum_{j \in J} \eta_j(x) = 1,$

où $Supp\eta_j$, le support de η_j, désigne l'adhérence de l'ensemble des x de X qui sont tels que $\eta_j(x) \neq 0$.

On donne le résultat suivant sans preuve.

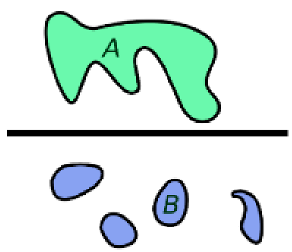
THÉORÈME 6.6. *Dans un espace paracompact à tout recouvrement ouvert de l'espace on peut associer une partition de l'unité qui lui est subordonnée.*

7. Espaces connexes - espaces connexes par arcs

On aborde ici les notions de connexité et de connexité par arcs.

DÉFINITION 6.19. *Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est connexe s'il n'existe pas de partition de X en deux ensembles ouverts non triviaux, i.e s'il n'existe pas $U, V \in \mathcal{O}$, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, tels que $U \cap V = \emptyset$ et $X = U \cup V$. On peut encore dire que $(X, \mathcal{O})$ est connexe si $\emptyset$ et X sont les seules parties de X qui sont à la fois ouvertes et fermées.*

Une partie A d'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est dite connexe si le sous espace topologique $(A, \mathcal{O}_A)$ est connexe.



A est connexe car «en un seul morceau». B ne l'est pas car «en plusieurs morceaux».

On montre que si A est une partie connexe de X, alors toute partie B de X qui vérifie $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe. En effet, si B n'était pas connexe alors il existerait deux ouverts U et V de X tels que si $\hat{U} = U \cap B$ et si $\hat{V} = V \cap B$, alors $\hat{U} \neq \emptyset$, $\hat{V} \neq \emptyset$, $\hat{U} \cap \hat{V} = \emptyset$ et $B = \hat{U} \cup \hat{V}$. On aurait alors $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$ et $A = (U \cap A) \cup (V \cap A)$ et, comme A est connexe, forcément $U \cap A = \emptyset$ ou $V \cap A = \emptyset$. Sans perdre en généralité supposons que $U \cap A = \emptyset$. Comme $\hat{U} \neq \emptyset$, il existe $x \in B \cap U$. On a alors $x \in \overline{A}$ car $B \subset \overline{A}$ et $x \in U$ ouvert de X. Donc forcément $U \cap A \neq \emptyset$. Une contradiction.

LEMME 6.4. *Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est connexe si et seulement si les seules applications continues $f : X \to \{0, 1\}$ sont les applications constantes, où $\{0, 1\}$ est muni de la topologie discrète induite de la topologie de $\mathbb{R}$ pour laquelle $\{0\}$ et $\{1\}$ sont des ouverts de $\{0, 1\}$.*

DÉMONSTRATION. Supposons que X est connexe. Si $f : X \to \{0, 1\}$ est continue alors $U = f^{-1}(0)$ et $V = f^{-1}(V)$ sont des ouverts. Or $U \cap V = \emptyset$ et $X = U \cup V$. Donc, comme X est connexe, forcément $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$ et ainsi, f est constante. Réciproquement, supposons que les seules applications continues $f : X \to \{0, 1\}$ sont les applications constantes. Par l'absurde supposons qu'il existe U, V ouverts non vides de X tels que $U \cap V = \emptyset$ et $X = U \cup V$. Soit $f : X \to \{0, 1\}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in U$ et $f(x) = 1$ si $x \in V$. Alors f est continue sur X car l'image réciproque des ouverts $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$ de $\{0, 1\}$ sont des ouverts. Donc f devrait être constante et on devrait ainsi avoir $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$, une contradiction. $\square$

La notion de composante connexe est important en topologie.

DÉFINITION 6.20. *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $x \in X$. La composante connexe de x, notée $C(x)$, est par définition la réunion de toutes les parties connexes de X qui contiennent le point x. C'est une partie connexe de X, la plus grande contenant le point x.*

Il y a tout de même une affirmation dans cette définition, à savoir que $C(x)$ est bien connexe. Une fois cela démontré il est clair que $C(x)$ sera la plus grande partie connexe contenant le point x. Le fait que $C(x)$ soit connexe se démontre facilement par l'absurde. Si $C(x)$ n'était pas connexe il existerait U, V deux ouverts de X tels que si $\hat{U} = U \cap C(x)$ et si $\hat{V} = V \cap C(x)$, alors $\hat{U} \neq \emptyset$, $\hat{V} \neq \emptyset$, $\hat{U} \cap \hat{V} = \emptyset$ et $C(x) = \hat{U} \cup \hat{V}$. On a $x \in C(x)$ et donc $x \in U$ ou $x \in V$. Sans perdre en généralité supposons que $x \in U$. Soit $A \subset X$ une partie connexe qui contient x. Alors $A \subset C(x)$ et donc $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$ et $A = (U \cap A) \cup (V \cap A)$. Donc $U \cap A = \emptyset$ ou $V \cap A = \emptyset$. Comme $U \cap A \neq \emptyset$ puisque $x \in U \cap A$, on a donc que pour tout $A \subset X$ partie connexe de X qui contient x, $V \cap A = \emptyset$. Donc $C(x) \cap V = \emptyset$, une contradiction.

De façon plus générale, si A et B sont deux parties connexes de X telles que $A \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cup B$ est encore connexe. Par contre, l'ensemble formé par l'union de deux parties disjointes A et B telles que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ n'est jamais connexe puisque $A \cup B$ peut sécrire comme la réunion disjointe de $(X \backslash \overline{A}) \cap B$ et $(X \backslash \overline{B}) \cap A$. Les intersections de connexes n'ont par contre aucune raison d'être connexes. Elles peuvent l'être ou pas, selon les cas. Le théorème suivant a lieu.

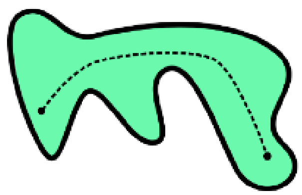
THÉORÈME 6.7 (Théorème de Bolzano). *L'image d'un connexe par une application continue est encore un connexe.*

DÉMONSTRATION. Soit A un connexe de l'espace de départ. Soient U, V ouverts de l'espace d'arrivé, $\Omega = U \cap f(A)$ et $\Omega' = V \cap f(A)$ des ouverts non vides de $f(A)$. On suppose que $f(A) = \Omega \cup \Omega'$. On peut maintenant écrire que $A = f^{-1}(\Omega) \cup f^{-1}(\Omega')$. Comme f est continue, $f^{-1}(\Omega)$ et $f^{-1}(\Omega')$ sont des ouverts de A (et ils sont non vides de façon évidente). Comme A est connexe on a que forcément $f^{-1}(\Omega) \cap f^{-1}(\Omega') \neq \emptyset$. Mais alors $\Omega \cap \Omega' \neq \emptyset$. Ainsi $f(A)$ ne peut s'écrire comme union de deux ouverts disjoints et $f(A)$ est donc bien connexe. $\square$

On montre que tout produit d'espaces connexes est encore un espace connexe. Par ailleurs un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est dit localement connexe si tout point de X possède un système fondamental de voisinages connexes, i.e si $\forall x \in X$, $\exists \mathcal{S} \subset \mathcal{V}(x)$ telle que $\forall U \in \mathcal{S}$, U est connexe et $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists U \in \mathcal{S}$ tel que $U \subset V$.

Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et x, y deux points de X. Une application continue $\gamma : [0, 1] \to X$ qui vérifie $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$ s'appelle un chemin continu d'origine x et d'extrémité y.

DÉFINITION 6.21. *Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est connexe par arcs si deux points quelconques de X peuvent toujours joints par un chemin continu. Un sous ensemble $A \subset X$ est connexe par arcs si deux points quelconques de A peuvent toujours joints par un chemin continu entièrement contenu dans A.*



Deux points quelconques peuvent être joints par un chemin continu. L'ensemble est connexe par arcs.

THÉORÈME 6.8. *Un espace topologique connexe par arcs est connexe.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $X = U \cup V$ avec U, V ouverts non vides. Soient $x \in U$ et $y \in V$. Soit $\gamma : [0,1] \to X$ un chemin continue qui vérifie $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Alors $[0,1] = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$. Comme γ est continue, $\gamma^{-1}(U)$ et $\gamma^{-1}(V)$ sont des ouverts de $[0,1]$. Ils sont non vides. Or $[0,1]$ est connexe. Donc $\gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V) \neq \emptyset$ et donc $U \cap V \neq \emptyset$. Ainsi X ne peut s'écrire comme union de deux ouverts disjoints et X est donc bien connexe. $\square$

On a utilisé dans cette preuve le fait que $[0,1]$ est connexe. Supposons que $[0,1] = U \cup V$ avec U, V ouverts non vides de $[0,1]$ (donc du type $U = \Omega \cap [0,1]$ et $V = \Omega' \cap [0,1]$ avec Ω, Ω' ouverts de $\mathbb{R}$) et $U \cap V = \emptyset$. Quitte à change U en V on peut supposer que $0 \in U$. On note t_0 la borne supérieure de l'ensemble des t qui vérifient que $[0,t] \subset U$. Comme U est un ouvert $t_0 > 0$. De plus $t_0 \notin U$ car sinon il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\subset U$ ce qui contredit la définition de t_0 car on devrait avoir $t_0 \geq t_0 + \varepsilon$. Mais alors $t_0 \in V$ et comme V est un ouvert il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\subset V$ Mais là encore on contredit la définition de t_0 car on devrait avoir $t_0 \leq t_0 - \varepsilon$. Ainsi, $[0,1]$ ne peut s'écrire comme union de deux ouverts disjoints et $[0,1]$ est donc bien connexe. Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe.

8. Espaces métriques

On commence avec la définition des distances, donc des espaces métriques.

DÉFINITION 6.22. *Un espace métrique est un couple (X, d) où X est un ensemble et $d : X \times X \to \mathbf{R}^+$ vérifie*
(1) $\forall x, y \in X,\ d(x,y) = d(y,x)$,
(2) $\forall x, y \in X,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(3) (inégalité triangulaire) $\forall x, y, z \in X,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$,
L'application d s'appelle une distance sur X.

Si A est une partie de X, la restriction de d à A, notée d_A, est une distance sur A. (A, d_A) est un espace métrique appelé sous espace métrique de (X, d). Soit (X, d) un espace métrique. Pour $x \in X$ et $r > 0$, on appelle boule ouverte de centre x et de rayon r, et on note $B_x(r)$, le sous ensemble de X défini par $B_x(r) = \big\{y \in X \ / \ d(x,y) < r\big\}$. On appelle boule fermée de centre x et de rayon r, et on note $B^prime_x(r)$, le sous ensemble de X défini par $B'_x(r) = \big\{y \in X \ / \ d(x,y) \leq r\big\}$.

THÉORÈME 6.9. *Toute distance d sur X induit une topologie séparée $\mathcal{O}$ sur X par: $U \in \mathcal{O}$ si et seulement si $\forall x \in U$, $\exists r_x > 0$ tel que $B_x(r) \subset U$.*

Les boules ouvertes sont des ouverts, ce qui se démontre facilement avec l'inégalité triangulaire: $\forall y \in B_x(r)$, $B_y(\hat{r}) \subset B_x(r)$, où $\hat{r} = r - d(x,y)$. Les boules fermées sont des fermés: $\forall y \in X \backslash B'_x(r)$, $B_y(\tilde{r}) \subset X \backslash B'_x(r)$, où $\tilde{r} = d(x,y) - r$, puisque pour tout $z \in B_y(\tilde{r})$, $d(x,z) \geq d(x,y) - d(y,z)$ par inégalité triangulaire.

LEMME 6.5. *Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques, $a \in X$ un point de X et $f : X \to Y$ une application. Alors f est continue en a si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in X, d_X(a,x) < \eta \ \Rightarrow \ d_Y\big(f(a), f(x)\big) < \varepsilon \ .$$

DÉMONSTRATION. Supposons que f est continue en a. Soit $\varepsilon > 0$ fixé quelconque. Comme $B_{f(a)}(\varepsilon)$ est un ouvert contenant a, $f^{-1}\big(B_{f(a)}(\varepsilon)\big)$ est un voisinage de a. Donc il existe $\eta > 0$ tel que $B_a(\eta) \subset f^{-1}\big(B_{f(a)}(\varepsilon)\big)$, ce qui est exactement la phrase de continuité du lemme. Réciproquement supposons la phrase de continuité du lemme vraie. Soit V un voisinage de $f(a)$ dans Y. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B_{f(a)}(\varepsilon) \subset V$. Il existe alors $\eta > 0$ tel que $B_a(\eta) \subset f^{-1}\big(B_{f(a)}(\varepsilon)\big)$ et donc tel que $B_a(\eta) \subset f^{-1}(V)$. Or $B_a(\eta)$ est un ouvert contenant a, donc un voisinage de a. Ainsi, pour tout voisinage V de $f(a)$ dans Y il existe un voisinage U de a dans X tel que $U \subset f^{-1}(V)$ et f est donc continue en a. $\square$

Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est dit métrisable s'il existe une distance d sur X qui induit la topologie $\mathcal{O}$. Un produit (fini ou) dénombrable d'espaces métrisables est métrisable.

DÉFINITION 6.23. *Un espace topologique séparé $(X, \mathcal{O})$ est dit régulier si: $\forall F$ fermé de X, $\forall x \in X \backslash F$, $\exists U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ tels que $x \in U_1$, $F \subset U_2$ et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Les espaces métriques sont toujours séparés, même réguliers, et ils vérifient la propriété $(\star)$ de la Définition 6.15. Il est clair qu'un espace métrique est toujours séparé. Si $x \neq y$ et si $r = d(x,y)$ alors $r > 0$ et les boules ouvertes $B_x(r/4)$ et $B_y(r/4)$ sont deux ouverts disjoints contenant respectivement x et y. La propriété $(\star)$ se vérifie facilement en considérant pour tout x le système complet de voisinages constitué des $B_x(1/n)$, $n \in \mathbb{N}^\star$. On montre qu'un espace métrique est régulier de la façon suivante: Soit F un fermé et $x \notin F$. Comme F est fermé, $X \backslash F$ est ouvert et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_x(\varepsilon) \subset X \backslash F$. Si $y \in F$ alors $B_y(\varepsilon/2) \cap B_x(\varepsilon/2) = \emptyset$ car sinon, par inégalité triangulaire, $d(x,y) < \varepsilon$ et donc $B_x(\varepsilon)$ et F ne seraient pas d'intersection vide. Reste à prendre $U_1 = B_x(\varepsilon/2)$ et $U_2 = \bigcup_{y \in F} B_y(\varepsilon/2)$. On énonce les théorèmes de Stone et Urysohn sans en donner de preuves.

THÉORÈME 6.10 (Théorème de Stone). *Tout espace métrique est paracompact.*

THÉORÈME 6.11 (Théorème d'Urysohn). *Un espace topologique régulier qui possède une base dénombrable pour sa topologie, est métrisable.*

Le critère de métrisabilité de Nagata-Smirnov, parfois aussi appelé théorème de métrisabilité de Smirnov, démontré indépendamment par Nagata en 1950 et Smirnov en 1951, stipule quant à lui qu'un espace topologique est métrisable si et seulement si il est régulier et possède une base de topologie dénombrablement localement finie (à savoir qui est union dénombrable de familles localement finies).

Bien sûr on a encore le théorème de Bolzano-Weierstrass: un espace métrique (X, d) est compact si et seulement si toute suite de points de X possède une sous suite convergente. La convergence d'une suite (x_n) vers un point x dans un espace métrique (X, d) se traduit par la phrase mathématique

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, \ d(x_n, x) < \epsilon \ ,$$

qui est exactement celle rencontré aux chapitres précédents et qui rejoint la définition de la Section 3 de ce chapitre puisque V est un voisiange de x si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_x(\varepsilon) \subset V$ et puisque les $B_x(\varepsilon)$ sont aussi des voisinages de x.

9. Espaces complets et complétion métrique

On termine ce chapitre avec la notion particulièrement importante de suite de Cauchy et d'espace complet.

Définition 6.24. *Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite de points de X. On dit que (x_n) est une suite de Cauchy si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall p, q \geq N,\ d(x_p, x_q) < \epsilon\ .$$

On dit que (X, d) est complet si toute suite de Cauchy de (X, d) converge.

Toute suite convergente est (par inégalité triangulaire) de Cauchy. Tout espace métrique compact est complet car si une suite de Cauchy possède une sous suite convergente, alors elle est elle-même convergente. Pour tout n, $\mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne est complet et, plus généralement, tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet (Théorème 3.10). On a bien sûr aussi le résultat suivant.

Théorème 6.12. *Tout complet est fermé et tout fermé dans un complet est complet.*

Démonstration. Soit $Y \subset X$. Si Y est un complet, toute suite convergente étant une suite de Cauchy, on en déduit que les suites convergentes de points de Y ont forcément leurs limites dans Y. Donc Y est fermé. Supposons maintenant que Y est fermé et que (X, d) est complet. Les suites de Cauchy dans Y sont de Cauchy dans X. Elles convergent donc dans X. Comme Y est fermé leurs limites restent dans Y. Donc elles convergent de fait dans Y et Y est ainsi complet (pour la distance induite de X). $\square$

Il est par contre des espaces métriques qui ne sont pas complets. Cela étant dit, tout espace métrique peut-être regardé comme un sous espace dense d'un espace métrique complet. C'est l'objet du théorème de complétion suivant. On dit d'une application $\kappa : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ qu'elle présèrve les distances, on parle encore d'isométrie de (X, d_X) dans (Y, d_Y), si

$$d_Y\big(\kappa(x), \kappa(y)\big) = d_X(x, y)$$

pour tous $x, y \in X$. Une telle application est forcément injective (parler d'une injection qui présèrve les distances est du coup redondant). Elle réalise alors une bijection isométrique (l'application réciproque est elle aussi isométrique) de (X, d_X) sur le sous espace $\kappa(X) \subset Y$ muni de la métrique d_Y restreinte à $\kappa(X)$. Ainsi, grâce à κ, (X, d_X) s'assimile à un sous espace métrique de (Y, d_Y).

Théorème 6.13 (Complétion métrique). *Soit (X, d) un espace métrique. Il existe toujours un espace métrique complet $(\hat{X}, \hat{d})$ et une injection présérvant les distances $\tau : X \to \hat{X}$ pour laquelle $\tau(X)$ est dense dans $\hat{X}$. On dit que $(\hat{X}, \hat{d}, \tau)$ est le complété de (X, d). A isométrie près, (X, d) s'assimile ainsi à un sous espace dense d'un espace métrique complet $(\hat{X}, \hat{d})$, la métrique de ce sous espace étant la restriction au sous espace de la métrique $\hat{d}$ du complété. Le complété est par ailleurs unique au sens suivant: si $(\hat{X}_1, \hat{d}_1, \tau_1)$ et $(\hat{X}_2, \hat{d}_2, \tau_2)$ sont deux compétés de (X, d),* *il existe alors une bijection* $f : (\hat{X}_1, \hat{d}_1) \to (\hat{X}_2, \hat{d}_2)$ *qui présèrve les distances et qui vaut* $\tau_2 \circ \tau_1^{-1}$ *sur* $\tau_1(X)$.

Démonstration. On commence par montrer l'existence d'un complété. On calque en quelque sorte la construction classique de $\mathbb{R}$. Etant données deux suites de Cauchy dans (X, d) on définit la relation $(x_n)\mathcal{R}(y_n)$ si et seulement si $d(x_n, y_n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Clairement $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{C}_X$ des suites de Cauchy de (X, d). On note $\hat{X} = \mathcal{C}_X/\mathcal{R}$ l'espace quotient. Pour $x \in X$ on note $\overline{x}$ la "classe de x" pour $\mathcal{R}$ définie comme étant le sous ensemble de $\mathcal{C}_X$ constitué des suites de Cauchy de (X, d) qui converge vers x (la suite constante étant l'une d'entre elles). L'application $\tau : X \to \hat{X}$ qui à x associe $\overline{x}$ est évidemment injective par unicité des limites. Soient $\alpha, \beta \in \hat{X}$. Si $(x_n) \in \alpha$ et $(y_n) \in \beta$ alors la suite des $d(x_n, y_n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ puisque, par inégalité triangulaire,

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \le d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n)$$

pour tous $m, n \in \mathbb{N}$. Ainsi la suite des $d(x_n, y_n)$ a une limite. Cette limite ne dépend ni du choix de $(x_n) \in \alpha$, ni du choix de $(y_n) \in \beta$, puisque, toujours par inégalité triangulaire,

$$|d(x_n, y_n) - d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)| \le d(x_n, \tilde{x}_n) + d(y_n, \tilde{y}_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, tous $(x_n), (\tilde{x}_n) \in \alpha$ et tous $(y_n), (\tilde{y}_n) \in \beta$. On peut ainsi définir $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \to \mathbb{R}^+$ par

$$\hat{d}(\alpha, \beta) = \lim_{n \to +\infty} d(x_n, y_n) \tag{6.1}$$

pour tous $\alpha, \beta \in \hat{X}$, où $(x_n) \in \alpha$ et $(y_n) \in \beta$. Il est facile de vérifier que $\hat{d}$ définie en (6.1) est bien une distance sur $\hat{X}$. L'injection τ est alors trivialement isométrique de (X, d) dans $(\hat{X}, \hat{d})$. On montre que $\tau(X)$ est dense dans $\hat{X}$. En effet si $\alpha \in \hat{X}$ et $(x_n) \in \alpha$, alors, avec (6.1),

$$\hat{d}\big(\alpha, \tau(x_m)\big) = \lim_{n \to +\infty} d(x_n, x_m) \tag{6.2}$$

pour tout m et, puisque (x_n) est de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \ge N$, $\hat{d}\big(\alpha, \tau(x_m)\big) \le \varepsilon$. Donc, clairement, $\tau(X)$ est dense dans $\hat{X}$. Il reste à montrer, en ce qui concerne l'existence du complété, que $(\hat{X}, \hat{d})$ est bien un espace complet. Soit (α_n) une suite de Cauchy dans $(\hat{X}, \hat{d})$. Par densité de $\tau(X)$ dans $\hat{X}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in X$ tel que

$$\hat{d}\big(\alpha_n, \tau(x_n)\big) \le \frac{1}{n+1} \ . \tag{6.3}$$

Avec (6.3), la suite des $\tau(x_n)$ est de Cauchy dans $(\hat{X}, \hat{d})$ et, puisque τ est une isométrie, la suite des (x_n) est de Cauchy dans (X, d). Soit α la classe d'équivalence de (x_n). Il suit de (6.1)-(6.3) que $\alpha_n \to \alpha$ lorsque $n \to +\infty$.

On montre maintenant l'unicité du complété. Soient donc $(\hat{X}_1, \hat{d}_1)$ et $(\hat{X}_2, \hat{d}_2)$ deux complétés de (X, d). On note $\tau_1 : (X, d) \to (\hat{X}_1, \hat{d}_1)$ et $\tau_2 : (X, d) \to (\hat{X}_2, \hat{d}_2)$ les injections présérvant les distances de la définition des complétés. Alors

$$\tau_2 \circ \tau_1^{-1} : (\tau_1(X), \hat{d}_1) \to (\hat{X}_2, \hat{d}_2)$$

est encore isométrique. Or $\tau_1(X)$ est dense dans $\hat{X}_1$ et donc $\tau_2 \circ \tau_1^{-1}$ se prolonge par continuité en une isométrie de $(\hat{X}_1, \hat{d}_1)$ dans $(\hat{X}_2, \hat{d}_2)$. Pour le voir on considère $\alpha \in \hat{X}_1$ et (α_n) une suite de $\tau_1(X)$ qui converge vers α. On remarque ensuite que la suite des $\tau_2\circ\tau_1^{-1}(\alpha_n)$ est de Cauchy dans $(\hat{X}_2,\hat{d}_2)$ puisque $\tau_2\circ\tau_1^{-1}$ est isométrique. Elle a donc une limite que l'on note $\tau_2\circ\tau_1^{-1}(\alpha)$, après avoir vérifié que cette limite ne dépend pas du choix de la suite (α_n) de $\tau_1(X)$ du moment qu'elle converge vers α. On remarque enfin facilement que $\tau_2\circ\tau_1^{-1}$ ainsi construite est isométrique de $(\hat{X}_1,\hat{d}_1)$ dans $(\hat{X}_2,\hat{d}_2)$. En particulier $\tau_2\circ\tau_1^{-1}(\hat{X}_1)$ est un sous espace complet de $\hat{X}_2$. Donc il est forcément fermé. Or il est aussi dense dans $(\hat{X}_2,\hat{d}_2)$. Donc $\tau_2\circ\tau_1^{-1}(\hat{X}_1)=\hat{X}_2$. En particulier, $\tau_2\circ\tau_1^{-1}$ réalise de fait une bijection isométrique de $(\hat{X}_1,\hat{d}_1)$ sur $(\hat{X}_2,\hat{d}_2)$, ce qui démontre le théorème. $\square$

En particulier, en raison du Théorème 6.13, un espace non complet n'est pas vraiment un espace pour lequel les suites "ne convergent pas", mais plutôt un espace "trop petit" pour contenir les limites de toutes les suites de Cauchy. Exemple: $C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni des deux normes $\|f\|_{L^\infty}=\max_{x\in[0,1]}|f(x)|$ (norme de la convergence uniforme) et

$$\|f\|_{L^2}=\sqrt{\int_0^1 f(x)^2dx}$$

(la norme L^2). Alors $C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_{L^\infty}$ est un Banach tandis que $C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_{L^2}$ ne l'est pas, une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_{L^2}$ ayant bien une limite pour $\|\cdot\|_{L^2}$, mais dans l'espace de Lebesgue $L^2([0,1],\mathbb{R})$, pas forcément dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

10. Complétion pour les E.V.N.

Le Théorème 6.13 de complétion métrique s'étend aux espaces vectoriels normés.

THÉORÈME 6.14 (Complétion des e.v.n.). *Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Il existe toujours un espace de Banach $(\overline{E},\|\cdot\|')$ et une injection linéaire présérvant les normes $\tau:E\to\overline{E}$ pour laquelle $\tau(E)$ est dense dans $\overline{E}$. On dit que $(\overline{E},\|\cdot\|',\tau)$ est le complété de $(E,\|\cdot\|)$. A isométrie près, $(E,\|\cdot\|)$ s'assimile ainsi à un sous espace dense d'un espace métrique complet $(\overline{E},\|\cdot\|')$, la norme de ce sous espace étant la restriction au sous espace de la norme $\|\cdot\|'$ du complété. Le complété est par ailleurs unique au sens suivant: si $(\overline{E}_1,\|\cdot\|_1',\tau_1)$ et $(\overline{E}_2,\|\cdot\|_2',\tau_2)$ sont deux compétés de $(E,\|\cdot\|)$, il existe alors un isomorphisme $f:(\overline{E}_1,\|\cdot\|_1')\to(\overline{E}_2,\|\cdot\|_2')$ qui présèrve les normes et qui vaut $\tau_2\circ\tau_1^{-1}$ sur $\tau_1(E)$.*

DÉMONSTRATION. On reprend la preuve du Théorème 6.13 et on y inclue la structure vectorielle attachée aux espaces vectoriels normés. On commence par montrer l'existence d'un complété. Etant données deux suites de Cauchy dans $(E,\|\cdot\|)$ on définit la relation $(x_n)\mathcal{R}(y_n)$ si et seulement si $\|x_n-y_n\|\to 0$ lorsque $n\to+\infty$. Clairement $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{C}_E$ des suites de Cauchy de $(E,\|\cdot\|)$. On note $\overline{E}=\mathcal{C}_E/\mathcal{R}$ l'espace quotient et pour $x\in E$ on note $\overline{x}$ la "classe de x" pour $\mathcal{R}$ comme étant le sous ensemble de $\mathcal{C}_E$ constitué des suites de Cauchy de $(E,\|\cdot\|)$ qui converge vers x (la suite constante étant l'une d'entre elles). Clairement $\hat{E}$ a une structure naturelle d'espace vectoriel par

$$\begin{cases}\overline{(x_n)}+\overline{(y_n)}=\overline{(x_n+y_n)}\ ,\\ \lambda\overline{(x_n)}=\overline{(\lambda x_n)}\ ,\end{cases}$$

où $\overline{(x_n)}$ est la classe d'équivalence de $(x_n)\in\mathcal{C}_E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. L'application $\tau:E\to\overline{E}$ qui à x associe $\overline{x}$ est évidemment injective par unicité des limites et elle est aussi linéaire. Soit $\alpha \in \overline{E}$. Si $(x_n) \in \alpha$ alors la suite des $\|x_n\|$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ puisque, par inégalité triangulaire,

$$\big|\|x_n\| - \|x_m\|\big| \leq \|x_m - x_n\|$$

pour tous $m, n \in \mathbb{N}$. Ainsi la suite $(\|x_n\|)$ a une limite. Cette limite ne dépend pas du choix de $(x_n) \in \alpha$ puisque, toujours par inégalité triangulaire,

$$\big|\|x_n\| - \|\tilde{x}_n\|\big| \leq \|x_n - \tilde{x}_n\|$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $(x_n), (\tilde{x}_n) \in \alpha$. On peut ainsi définir $\| \cdot \|' : \overline{E} \to \mathbb{R}^+$ par

$$\|\alpha\|' = \lim_{n \to +\infty} \|x_n\| \tag{6.4}$$

pour tout $\alpha \in \overline{E}$, où $(x_n) \in \alpha$. Il est facile de vérifier que $\| \cdot \|'$ définie en (6.4) est bien une norme sur $\overline{E}$. L'injection τ est alors trivialement isométrique de $(E, \| \cdot \|)$ dans $(\overline{E}, \| \cdot \|')$. On montre que $\tau(E)$ est dense dans $\overline{E}$. En effet si $\alpha \in \overline{E}$ et $(x_n) \in \alpha$, alors, avec (6.4),

$$\|\alpha - \tau(x_m)\|' = \lim_{n \to +\infty} \|x_n - x_m\| \tag{6.5}$$

pour tout m et, puisque (x_n) est de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq N$, $\|\alpha - \tau(x_m)\|' \leq \varepsilon$. Donc, clairement, $\tau(E)$ est dense dans $\overline{E}$. Il reste à montrer, en ce qui concerne l'existence du complété, que $(\overline{E}, \| \cdot \|')$ est bien un espace de Banach. Soit (α_n) une suite de Cauchy dans $(\overline{E}, \| \cdot \|')$. Par densité de $\tau(E)$ dans $\overline{E}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in E$ tel que

$$\|\alpha_n - \tau(x_n)\|' \leq \frac{1}{n+1} \ . \tag{6.6}$$

Avec (6.6), la suite des $\tau(x_n)$ est de Cauchy dans $(\overline{E}, \| \cdot \|')$ et, puisque τ est une isométrie, la suite des (x_n) est de Cauchy dans $(E, \| \cdot \|)$. Soit α la classe d'équivalence de (x_n). Il suit de (6.4)-(6.6) que $\alpha_n \to \alpha$ lorsque $n \to +\infty$. On montre maintenant l'unicité du complété. Soient donc $(\overline{E}_1, \| \cdot \|_1')$ et $(\overline{E}_2, \| \cdot \|_2')$ deux complétés de $(E, \| \cdot \|)$. On note $\tau_1 : (E, \| \cdot \|) \to (\overline{E}_1, \| \cdot \|_1')$ et de même on note $\tau_2 : (E, \| \cdot \|) \to (\overline{E}_2, \| \cdot \|_2')$ les injections linéaires présérvant les normes de la définition des complétés. Alors

$$\tau_2 \circ \tau_1^{-1} : (\tau_1(E), \| \cdot \|_1') \to (\overline{E}_2, \| \cdot \|_2')$$

est encore isométrique. Or $\tau_1(E)$ est dense dans $\overline{E}_1$ et donc $\tau_2 \circ \tau_1^{-1}$ se prolonge par continuité en une isométrie de $(\overline{E}_1, \| \cdot \|_1')$ dans $(\overline{E}_2, \| \cdot \|_2')$. L'argument est identique à celui utilisé dans la preuve du Théorème 6.13 et on vérifie facilement que la linéarité est préservée. En particulier, donc, $\tau_2 \circ \tau_1^{-1}(\overline{E}_1)$ est un sous espace complet de $\overline{E}_2$. Donc il est forcément fermé. Or il est aussi dense dans $(\overline{E}_2, \| \cdot \|_2')$. Donc $\tau_2 \circ \tau_1^{-1}(\overline{E}_1) = \overline{E}_2$. En particulier, $\tau_2 \circ \tau_1^{-1}$ réalise de fait un isomorphisme isométrique de $(\overline{E}_1, \| \cdot \|_1')$ sur $(\overline{E}_2, \| \cdot \|_2')$, ce qui démontre le théorème. □

11. Théorème de Baire

Théorème 6.15 (Théorème de Baire 1). *Soit (X, d) un espace métrique complet. Toute intersection dénombrable d'ouverts denses de X est dense dans X et, de façon équivalente, toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide.*

DÉMONSTRATION. Soit (X, d) un espace métrique complet et soit (U_n) une suite d'ouverts denses de X. On pose $U = \bigcap_{n=0}^{+\infty} U_n$. On veut montrer que pour tout ouvert Ω de X, $\Omega \cap U \neq \emptyset$. Soit $x_0 \in \Omega \cap U_0$ fixé quelconque et $\varepsilon_0 > 0$ tel que $B'_{x_0}(\varepsilon_0) \subset \Omega \cap U_0$, où $B'_{x_0}(\varepsilon_0)$ est la boule fermée de centre x_0 et de rayon ε_0. Par densité des U_n on construit facilement par récurrence une suite (x_n) de points de X et une suite (ε_n) de réels strictements positifs qui converge vers 0 en demandant que pour tout $n \geq 0$:

(i) $x_{n+1} \in B_{x_n}(\varepsilon_n) \cap \Omega \cap U_{n+1}$,
(ii) $B'_{x_{n+1}}(\varepsilon_{n+1}) \subset B_{x_n}(\varepsilon_n) \cap \Omega \cap U_{n+1}$,
(iii) $\varepsilon_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$,

où les $B'_x(\varepsilon)$ ci-dessus représentent la boule fermée de centre x et de rayon ε. La suite des (ε_n) ainsi construite est une suite de réels strictements positifs qui converge vers 0 et la suite (x_n) ainsi construite est de Cauchy puisque pour $n \geq m$, $x_n \in B'_{x_m}(\varepsilon_m)$ et donc $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon_m$ avec $\varepsilon_m \to 0$ lorsque $m \to +\infty$. Comme (X, d) est complet, $x_n \to x$ lorsque $n \to +\infty$ pour un certain x. Toujours pour $n \geq m$, comme $x_n \in B'_{x_m}(\varepsilon_m)$ qui est un fermé, on obtient par passage à la limite que $x \in B'_{x_m}(\varepsilon_m)$. En particulier, $x \in \Omega \cap U_{m-1}$, et puisque m est quelconque, $x \in \Omega \cap U$. Le théorème est démontré. □

Le théorème de Baire est en fait plus général que cela. Les espaces de Baire se définissent comme les espaces topologiques qui vérifient que toute intersection dénombrable d'ouverts denses est encore dense ou, de façon équivalente, comme les espaces topologiques pour lesquels toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide. Le théorème de Baire stipule alors que tout espace métrique complet est un espace de Baire, que tout espace topologique localement compact est un espace de Baire et que tout ouvert d'un espace de Baire est de Baire pour la topologie induite.

THÉORÈME 6.16 (Théorème de Baire 2). *Soit (X, d) un espace métrique complet et soit Ω un ouvert de X. Toute intersection dénombrable d'ouverts denses de Ω est dense dans Ω et, de façon équivalente, toute réunion dénombrable de fermés de Ω d'intérieurs vides est d'intérieur vide.*

12. Théorème du point fixe de Banach

Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application. L'application f est dite contractante s'il existe $K \in [0, 1[$ telle que

$$d_Y\big(f(x), f(y)\big) \leq K d_X(x, y)$$

pour tous $x, y \in X$. Une application contractante est bien sûr continue. Pour les application $f : X \to X$, d'un espace dans lui-même, on peut se poser la question de l'existence et de l'unicité des points fixes de f, á savoir des points $x \in X$ qui sont tels que $f(x) = x$.

THÉORÈME 6.17 (Théorème du point fixe de Banach). *Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $f : X \to X$ une application contractante. Alors f possède un, et un unique, point fixe.*

DÉMONSTRATION. Soit $x_0 \in X$ quelconque fixé. On construit par récurrence la suite (x_n) en posant $x_{n+1} = f(x_n)$. Comme f est contractante, il existe $K \in [0, 1[$

telle que pour tous $n \geq m$,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq K d(x_{n-1}, x_{m-1}) \\ &\leq K^2 d(x_{n-2}, x_{m-2}) \\ &\leq K^m d(x_{n-m}, x_0)\ . \end{aligned} \tag{6.7}$$

On tire de (6.7) dans le cas $n = m + 1$, et par inégalité triangulaire, que pour tout entier n,

$$d(x_n, x_0) \leq \sum_{k=0}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq d(x_1, x_0) \sum_{k=0}^{n-1} K^k = \frac{1}{1-K} d(x_0, x_1)\ . \tag{6.8}$$

Avec (6.7) et (6.8) on obtient donc que pour tous $n \geq m$,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{K^m}{1-K} d(x_0, x_1)\ . \tag{6.9}$$

Or $K^m \to 0$ lorsque $m \to +\infty$. Donc (x_n) est de Cauchy. Comme (X, d) est complet, $x_n \to a$ lorsque $n \to +\infty$ pour un certain $a \in X$. Et comme f est continue, en passant à la limite dans la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ on obtient que $f(a) = a$. Donc f possède bien un point fixe. Ce point fixe est unique car si $f(a) = a$ et $f(b) = b$, et comme f est contractante, $d\big(f(a), f(b)\big) \leq K d(a, b)$ avec $K < 1$ ne peut avoir lieu si $a \neq b$. D'où le théorème. $\square$

CHAPITRE 7

Variétés différentielles banachiques

On présente très brièvement ici l'idée qui se cache derrière le calcul différentiel sur des patatoïdes en traitant rapidement dans ce chapitre de la théorie élémentaires des variétés modelées sur un Banach. On reprend ici des idées exposées dans l'excellent ouvrage de Lang [*Introduction aux variétés différentiables*, Dunod, 1962]. Ce chapitre est volontairement très court et l'on s'y borne à esquisser les idées de bases et les lignes directrices de la théorie. Ces idées seront exposées avec beaucoup plus de détails dans les chapitres suivants, lorsqu'on traitera de la théorie dans le cas plus courant des variétés de dimension finies, modelées sur $\mathbb{R}^n$ et non plus sur un espace de Banach quelconque.

Dans tout ce qui suit $(E, \|\cdot\|)$ est donc un espace de Banach donné, fixé.

1. La notion de variété

DÉFINITION 7.1. *Soit $(M, \mathcal{O})$ un espace topologique connexe séparé. On dit que $(M, \mathcal{O})$ est une E-variété topologique si tout point de M possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de E.*

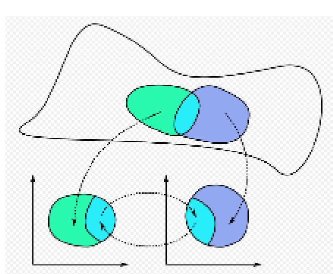
Soit $(M, \mathcal{O})$ une E-variété topologique. Soient $x \in M$ un point de M, Ω un ouvert de M qui contient x et $\varphi : \Omega \to V$ un homéomorphisme de Ω sur un ouvert V de E. Le couple (Ω, φ) est appelé une carte locale de M au point x. On appelle alors atlas de M toute famille

$$\mathcal{A} = \Big((\Omega_i, \varphi_i)\Big)_{i \in I}$$

de cartes locales qui est telle que $M = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Les applications

$$\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(\Omega_i \cap \Omega_j) \to \varphi_j(\Omega_i \cap \Omega_j)$$

sont appelées applications de changement de cartes, ou encore fonctions de transitions.



Changements de cartes

DÉFINITION 7.2. *Soit* $(M, \mathcal{O})$ *une* E*-variété topologique et soit* $\mathcal{A} = ((\Omega_i, \varphi_i))_{i \in I}$ *un atlas de* M*. On dit que* $\mathcal{A}$ *est de classe* C^k*,* $1 \leq k \leq +\infty$*, si les fonctions de transitions* φ_{ij} *sont de classe* C^k *en tant qu'applications entre ouverts de* E*. On dit que* $\mathcal{A}$ *est* C^k*-saturé (ou* C^k*-complet) s'il n'est contenu dans aucun atlas de classe* C^k *qui soit strictement plus grand que lui.*

En raisonnant par compatibilité d'atlas, une relation d'équivalence, on montrer que tout atlas de classe C^k est contenu dans un unique C^k-atlas saturé. On a alors la définition suivante.

DÉFINITION 7.3. *Une* E*-variété différentiable de classe* C^k *est une variété topologique qui est munie d'un* C^k*-atlas saturé.*

Il suffit donc pour munir une E-variété topologique $(M, \mathcal{O})$ d'une structure de variété de classe C^k, de trouver sur M un atlas qui soit de classe C^k. Cet atlas engendre un unique C^k-atlas saturé qui le contient et qui confère à M une structure de variété de classe C^k.

2. La notion de différentiabilité et de différentielle

Dans la définition qui suit on considère $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach.

DÉFINITION 7.4. *Soient* M *une* E*-variété de classe* C^k*,* N *une* F*-variété de classe* C^k*,* $k \geq 1$*,* x *un point de* M*, et* $f : M \to N$ *une application continue au point* x*. On dit que* f *est différentiable au point* x *si pour toute carte* (Ω, φ) *de* M *au point* x*, et toute carte* (Ω', ψ) *de* N *au point* $f(x)$ *vérifiant* $f(\Omega) \subset \Omega'$*, l'application*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \to \psi(\Omega')$$

est différentiable au point $\varphi(x)$ *en tant qu'application d'un ouvert de* E *dans un ouvert de* F*. On dit que* $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ *est la lecture de* f *dans les cartes* (Ω, φ) *et* (Ω', ψ)*.*

Par extension, une application continue $f : M \to N$ est dite différentiable sur M si elle est différentiable en tout point de M. Dans le même ordre d'idées, on dit qu'une application continue $f : M \to N$ est de classe C^p sur M, avec ici nécessairement $p \leq k$, si pour toute carte (Ω, φ) de M, et toute carte (Ω', ψ) de N vérifiant $f(\Omega) \subset \Omega'$, l'application

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \to \psi(\Omega')$$

est de classe C^k sur $\varphi(\Omega)$. On montre facilement que ces définitions ne dépendent pas du choix des cartes en remarquant que deux lectures diffèrent par des compositions avec des changements de cartes qui sont de classe C^k:

$$\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1} = \left(\psi_2 \circ \psi_1^{-1}\right) \circ \left(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}\right) \circ \left(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}\right)$$

A ce stade on sait donc définir la différentiabilité mais on ne sait pas définir la différentielle. On porrait imaginer de d'efinir la différentielle comme la différentielle d'une lecture mais là, par contre, on construit un objet qui dépend de la lecture et qui perd donc la caractère intrinsèque qu'il devrait avoir. Pouyr différentier, il faut construire l'espace où va vivre la différentielle. On se borne dans ce chapitre à la seule définition de ce que sera la différentielle en un point.

Soient M une E-variété de classe C^k, $k \geq 1$, et x un point de M. On note $\mathcal{F}_x$ l'espace vectoriel des fonctions $f : M \to \mathbb{R}$ qui sont différentiables au point x. Si

$f \in \mathcal{F}_x$, on dit que f est plate au point x si pour toute carte (Ω, φ) de M au point x,

$$D\big(f \circ \varphi^{-1}\big)_{\varphi(x)} \equiv 0 \ .$$

On montre facilement que la nullité de $D\big(f \circ \varphi^{-1}\big)_{\varphi(x)}$ pour une carte (Ω, φ) au point x, entraîne la nullité de $D\big(f \circ \psi^{-1}\big)_{\psi(x)}$ pour toute autre carte (Ω', ψ) au point x. Pour le voir, il suffit d'écrire que

$$f \circ \psi^{-1} = \big(f \circ \varphi^{-1}\big) \circ \big(\varphi \circ \psi^{-1}\big)$$

de sorte que

$$D\big(f \circ \psi^{-1}\big)_{\psi(x)} = D\big(f \circ \varphi^{-1}\big)_{\varphi(x)} \circ D\big(\varphi \circ \psi^{-1}\big)_{\psi(x)} \ .$$

On note $\mathcal{N}_x$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{F}_x$ constitué des fonctions qui sont plates au point x.

DÉFINITION 7.5. *Soient M une E-variété de classe C^k, $k \geq 1$, et x un point de M. On appelle vecteur tangent à M au point x toute forme linéaire $X : \mathcal{F}_x \to \mathbb{R}$ qui s'annule sur $\mathcal{N}_x$, i.e qui est telle que $\mathcal{N}_x \subset KerX$. L'espace tangent à M au point x, noté $T_x(M)$, est l'ensemble des vecteurs tangents à M au point x.*

L'espace tangent est le lieu de vie des différentielles qui se définissent comme suit.

DÉFINITION 7.6. *Soient M une E-variété de classe C^k, N une F-variété de classe C^k, $k \geq 1$, x un point de M, et $f : M \to N$ une application continue au point x. La différentielle de f en x, appelée application linéaire tangente et notée $f_\star(x)$, est l'application linéaire de $T_x(M)$ dans $T_{f(x)}(N)$ qui à $X \in T_x(M)$ associe $f_\star(x).X \in T_{f(x)}(N)$ défini par*

$$\left(f_\star(x).X\right).(g) = X\left(g \circ f\right)$$

pour toute fonction $g : N \to \mathbb{R}$ qui est différentiable au point $f(x)$.

On verra très vite, dans les chapitres qui suivent, qu'il s'agit là effectivement d'une définition tout à fait pertinente de la différentielle.

CHAPITRE 8

Variétés différentielles

On reprend la théorie esquissée au Chapitre 6 mais de façon détaillée et dans le cas des variétés modelées sur $\mathbb{R}^n$.

1. Premières Constructions

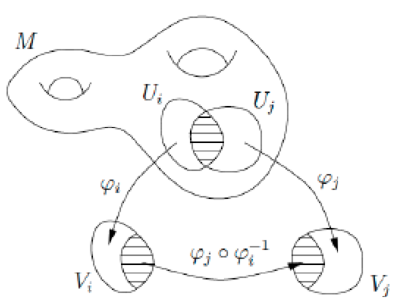
On commence par la définition des variétés topologiques de dimension n.

DÉFINITION 8.1. *Soit* $(M, \mathcal{O})$ *un espace topologique connexe séparé. On dit que* $(M, \mathcal{O})$ *est une variété topologique de dimension* n *si tout point de* M *possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*.*

En d'autres termes, $(M, \mathcal{O})$ est une variété topologique de dimension n si pour tout point x de M, il existe Ω un voisinage ouvert de x dans M, il existe V un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et il existe $\varphi : \Omega \to V$ un homéomorphisme de Ω sur V. En reprenant à peu de choses près ce qui fut dit par Elie Cartan dans sa "leçon sur la géométrie des espaces de Riemann" de 1925, "*une variété est au fond formée d'une infinité de petits morceaux d'espaces euclidiens.*"

DÉFINITION 8.2. *Soit* $(M, \mathcal{O})$ *une variété topologique de dimension* n*. Soient* $x \in M$ *un point de* M*,* Ω *un ouvert de* M *qui contient* x *et* $\varphi : \Omega \to V$ *un homéomorphisme de* Ω *sur un ouvert* V *de* $\mathbb{R}^n$*. Le couple* (Ω, φ) *est appelé une carte locale de* M *au point* x*. Pour tout* y *dans* Ω*, les coordonnées de* $\varphi(y)$ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *sont dites coordonnées de* y *dans la carte* (Ω, φ)*. Une carte locale est encore appelée un système (local) de coordonnées.*

On a alors la configuration suivante:



Changements de cartes sur une variété

et l'on voit apparaître les applications de changements de cartes entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ qui joueront un rôle dans la définition des atlas de classe C^k.

Proposition 8.1. *Soit $(M, \mathcal{O})$ une variété topologique de dimension n. Alors tout point de M possède un système fondamental dénombrable de voisinages compacts et connexes, M est connexe par arcs, si M est paracompacte elle est dénombrable à l'infini et, enfin, M est métrisable si et seulement si elle est paracompacte.*

Démonstration. La première assertion est immédiate puisqu'on a en fait des homéomorphismes locaux avec $\mathbb{R}^n$. Pour ce qui est de la seconde assertion, on considère x un point de M, et on note $\mathcal{C}_x$ l'ensemble des points de M qui peuvent être joints à x par un chemin continu. A savoir

$$\mathcal{C}_x = \left\{ y \in M \ / \ \exists \gamma \in C^0([0,1], M), \ \gamma(0) = x, \ \gamma(1) = y \right\} \ .$$

Il nous faut montrer que $\mathcal{C}_x = M$. Pour commencer, on remarque que $\mathcal{C}_x \neq \emptyset$, puisque par définition même d'une variété topologique, il existe Ω un voisinage ouvert de x tel que $\Omega \subset \mathcal{C}_x$. Il suffit de prendre $(\tilde{\Omega}, \tilde{\varphi})$ une carte de M en x, de prendre $\varepsilon > 0$ tel que $B_{\tilde{\varphi}(x)}(\varepsilon) \subset \tilde{\varphi}(\tilde{\Omega})$, puis de poser $\Omega = \tilde{\varphi}^{-1}\left(B_{\tilde{\varphi}(x)}(\varepsilon)\right)$. Montrons maintenant que $\mathcal{C}_x$ est un ouvert de M. Soit $y \in \mathcal{C}_x$. Là encore, il existe Ω un voisinage ouvert de y ayant la propriété que tout point de Ω peut être joint à y par un chemin continu. Par suite:

$$\begin{aligned}
&\exists \gamma_1 \in C^0([0,1], M) \ / \ \gamma_1(0) = x, \ \gamma_1(1) = y \text{ et} \\
&\forall z \in \Omega, \ \exists \gamma_2 \in C^0([0,1], M) \ / \ \gamma_2(0) = y, \ \gamma_2(1) = z \ .
\end{aligned}$$

On définit le chemin $\gamma \in C^0([0,1], M)$ par:

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= \gamma_1(2t) \text{ si } t \in [0, \tfrac{1}{2}] \\
\gamma(t) &= \gamma_2(2t-1) \text{ si } t \in [\tfrac{1}{2}, 1] \ .
\end{aligned}$$

Alors $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = z$. Il s'ensuit que $z \in \mathcal{C}_x$, et donc que $\Omega \subset \mathcal{C}_x$. Par conséquent, $\mathcal{C}_x$ est un ouvert de M. Pour finir de démontrer la seconde assertion, on montre que $\mathcal{C}_x$ est un fermé de M. Soit $z \in \overline{\mathcal{C}_x}$, et soit Ω un voisinage ouvert de z ayant la propriété que tout point de Ω peut être joint à z par un chemin continu. Puisque $z \in \overline{\mathcal{C}_x}$, il existe $y \in \Omega \cap \mathcal{C}_x$. Par suite, il existe un chemin continu joignant x à y, et il existe un chemin continu joignant y à z. En raisonnant comme précédemment, on en déduit l'existence d'un chemin continu joignant x à z. Il s'ensuit que $z \in \mathcal{C}_x$, et donc que $\mathcal{C}_x$ est un fermé de M. En conclusion, $\mathcal{C}_x$ est non vide, et tout à la fois un ouvert et un fermé de M. Par connexité de M, on en déduit que $\mathcal{C}_x = M$, à savoir la seconde assertion de la proposition. On montre maintenant la troisième assertion de la proposition. Etant donné x un point de M, on note Ω_x un voisinage ouvert relativement compact de x. Alors

$$M = \bigcup_{x \in M} \Omega_x \ ,$$

et puisque M est ici paracompacte, il existe un recouvrement ouvert $(\omega_i)_{i \in I}$ qui est tel que:

(i) $(\omega_i)_{i \in I}$ est localement fini,
(ii) $(\omega_i)_{i \in I}$ est plus fin que $(\Omega_x)_{x \in M}$.

Avec (i), on a que pour tout compact K de M,

$$\mathrm{Card}\Big\{ i \in I \ / \ \omega_i \cap K \neq \emptyset \Big\} < +\infty \ .$$

On pose $K_1 = \overline{\omega_1}$, ω_1 un des ω_i, et par récurrence on définit

$$K_m = \bigcup_{i \in I_m} \overline{\omega_i} \ ,$$

où

$$I_m = \Big\{ i \in I \ / \ \omega_i \cap K_{m-1} \neq \emptyset \Big\} \ .$$

On vérifie facilement par récurrence que:

(iii) pour tout m, I_m est fini, et K_m est donc compact,
(iv) pour tout $m \geq 2$, $K_{m-1} \subset \mathring{K}_m$.

Par suite, $\displaystyle\bigcup_{m \geq 1} K_m \neq \emptyset$, et

$$\bigcup_{m \geq 1} K_m = \bigcup_{m \geq 1} \mathring{K}_m \ ,$$

de sorte $\mathcal{K} = \bigcup_{m \geq 1} K_m$ est un ouvert de M. On montre maintenant que $\mathcal{K}$ est aussi un fermé de M. Soit $x \in \overline{\mathcal{K}}$. En particulier,

$$\omega_i \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$$

pour un i tel que $x \in \omega_i$. Or

$$\omega_i \cap \mathcal{K} \neq \emptyset \implies \exists m \ / \ \omega_i \cap K_m \neq \emptyset \ ,$$

tandis que $\omega_i \cap K_m \neq \emptyset$ entraine par construction que $x \in K_{m+1}$. Il s'ensuit que $x \in \mathcal{K}$, et donc que $\mathcal{K}$ est un fermé de M. Par connexité de M, on en déduit là encore que $M = \mathcal{K}$, à savoir que $M = \bigcup_{m \geq 1} K_m$. D'où la troisième assertion de la proposition. Reste donc à remarquer que la quatrième assertion de la proposition est une conséquence facile du théorème de Stone et du théorème d'Urysohn du Chapitre **??**. La proposition est démontrée. $\square$

On aborde maintenant la notion d'atlas, une terminologie assez parlante avec celle de cartes (et sachant que la Terre est une sphère et donc une variété comme nous le verrons bientôt).

Définition 8.3. *Soit $(M, \mathcal{O})$ une variété topologique. On appelle atlas de M toute famille*

$$\mathcal{A} = \Big((\Omega_i, \varphi_i) \Big)_{i \in I}$$

de cartes locales qui est telle que $M = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Les applications

$$\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(\Omega_i \cap \Omega_j) \to \varphi_j(\Omega_i \cap \Omega_j)$$

sont appelées applications de changement de cartes, ou encore fonctions de transitions.

Les applications de changement de cartes n'ont de sens que lorsque $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$, et elles réalisent des homéomorphismes de $\varphi_i(\Omega_i \cap \Omega_j)$ sur $\varphi_j(\Omega_i \cap \Omega_j)$. En particulier, et pour tous $i, j \in I$, $\varphi_{ji} = \varphi_{ij}^{-1}$.

2. Variétés de classe C^k

La notion de variété de classe C^k est rattachée à la notion d'atlas de classe C^k.

DÉFINITION 8.4. *Soit $(M, \mathcal{O})$ une variété topologique et soit $\mathcal{A} = ((\Omega_i, \varphi_i))_{i \in I}$ un atlas de M. On dit que $\mathcal{A}$ est de classe C^k, $1 \leq k \leq +\infty$, si les fonctions de transitions φ_{ij} sont de classe C^k.*

Puisque $\varphi_{ji} = \varphi_{ij}^{-1}$, dire que $\mathcal{A}$ est de classe C^k revient encore à dire que les fonctions de transitions φ_{ij} sont des difféomorphismes de classe C^k de $\varphi_i(\Omega_i \cap \Omega_j)$ sur $\varphi_j(\Omega_i \cap \Omega_j)$.

DÉFINITION 8.5. *Soient $(M, \mathcal{O})$ une variété topologique, et $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux atlas de classe C^k sur M. On dit que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont C^k-compatibles si l'atlas $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ est encore de classe C^k.*

On s'e doute, la relation que l'on vient de définir est une relation d'équivalence.

LEMME 8.1. *La relation de C^k-compatibilité est une relation d'équivalence sur l'ensemble des atlas de classe C^k de M.*

DÉMONSTRATION. La réflexivité et la symétrie sont évidentes. Reste à montrer la transitivité. Soient $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$ trois atlas de classe C^k. On suppose que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont C^k-compatibles et que $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$ sont C^k-compatibles. On veut montrer que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_3$ sont C^k-compatibles et donc que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_3$ est un atlas de classe C^k. Soient (Ω_1, φ_1) une carte de $\mathcal{A}_1$ et (Ω_3, φ_3) une carte de $\mathcal{A}_3$ telles que $\Omega_1 \cap \Omega_3 \neq \emptyset$. On veut montrer que $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ est C^k sur $\varphi_1(\Omega_1 \cap \Omega_3)$. Soit $a \in \Omega_1 \cap \Omega_3$ et soit (Ω_2, φ_2) une carte de $\mathcal{A}_2$ telle que $a \in \Omega_2$. On écrit que

$$\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} = \left(\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1}\right) \circ \left(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\right)$$

sur $V = \varphi_1(\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3)$. Or V est un voisinage ouvert de $\varphi_1(a)$. Et comme $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont C^k-compatibles, et $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$ sont C^k-compatibles, les applications de changement de cartes $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ et $\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1}$ sont de classe C^k. Donc $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ est de classe C^k sur V et on en déduit que $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ est de classe C^k au voisinage de tout point de $\varphi_1(\Omega_1 \cap \Omega_3)$. Cela revient encore à dire que $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ est de classe C^k sur $\varphi_1(\Omega_1 \cap \Omega_3)$. On a ainsi montré que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_3$ sont C^k-compatibles. Le lemme est démontré. □

La notion d'atlas saturé est importante d'un point de vue conceptuel, beaucoup moins dans la construction des variétés, comme on le verra plus bas.

DÉFINITION 8.6. *Soient $(M, \mathcal{O})$ une variété topologique et $\mathcal{A}$ un atlas de classe C^k sur M. On dit que $\mathcal{A}$ est C^k-saturé (ou C^k-complet) s'il n'est contenu dans aucun atlas de classe C^k qui soit strictement plus grand que lui.*

En d'autres termes, $\mathcal{A}$ est C^k-saturé si pour tout atlas $\mathcal{A}'$ de classe C^k, l'inclusion $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ entraîne que $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$. La relation d'inclusion n'étant pas une relation d'ordre total, il se peut très bien qu'il y ait plusieurs C^k-atlas saturés (et c'est effectivement souvent le cas, voir plus bas). Le résultat suivant a par contre lieu.

LEMME 8.2. *Tout atlas de classe C^k est contenu dans un unique C^k-atlas saturé.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{A}_0$ un atlas de classe C^k. Soit $\mathcal{R}$ la relation de C^k-compatibilité. On pose

$$\tilde{\mathcal{A}} = \bigcup_{\mathcal{A}\in[\mathcal{A}_0]_{\mathcal{R}}} \mathcal{A} ,$$

où $[\mathcal{A}_0]_{\mathcal{R}}$ est la classe d'équivalence de $\mathcal{A}_0$ pour $\mathcal{R}$. Deux cartes dans $\tilde{\mathcal{A}}$ sont toujours dans deux atlas C^k-compatibles, donc le changement de cartes associé est forcèment de classe C^k. Par suite $\tilde{\mathcal{A}}$ est un atlas de classe C^k qui contient $\mathcal{A}_0$. Si $\mathcal{A}$ est un atlas de classe C^k qui contient $\mathcal{A}_0$, alors $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}$ sont C^k-compatibles. Donc si $\mathcal{A}$ est un C^k-atlas tel que $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$, et donc $\mathcal{A} \in [\mathcal{A}_0]_{\mathcal{R}}$ de sorte que $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$. Il s'ensuit que $\tilde{\mathcal{A}}$ est C^k-saturé. C'est même le seul C^k-atlas saturé qui contient $\mathcal{A}_0$ car tout atlas de classe C^k qui contient $\mathcal{A}_0$ est automatiquement dans $[\mathcal{A}_0]_{\mathcal{R}}$, et donc contenu dans $\tilde{\mathcal{A}}$. Le lemme est démontré. □

La notion de variété de classe C^k suit.

DÉFINITION 8.7. *Une C^k-variété différentiable, ou variété de classe C^k, est une variété topologique qui est munie d'un C^k-atlas saturé.*

En raison du lemme précédent, il suffit pour munir une variété topologique $(M, \mathcal{O})$ d'une structure de variété de classe C^k, de trouver sur M un atlas qui soit de classe C^k. Cet atlas engendre alors un unique C^k-atlas saturé qui le contient et qui confère à M une structure de variété de classe C^k. En particulier, on remarque que toute structure de variété de classe C^k sur une variété topologique induit naturellement une structure de variété de classe $C^{k'}$ sur la variété, pour tout $k' \leq k$. Mais attention, le C^k-atlas saturé, regardé comme atlas de classe $C^{k'}$, n'est plus $C^{k'}$-saturé.

PROPOSITION 8.2. *Soient M une variété de classe C^k de dimension n et soit $\mathcal{A}$ le C^k-atlas saturé de M qui confère à M sa structure de variété de classe C^k. Soient $(\Omega, \varphi) \in \mathcal{A}$ et $f : \varphi(\Omega) \to V$ un difféomorphisme de classe C^k de $\varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$. Alors $(\Omega, f \circ \varphi) \in \mathcal{A}$. En particulier:*

(i) pour tout $x_0 \in M$ et tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une carte (Ω, φ) de M en x_0 qui est telle que $\varphi(x_0) = y_0$,

(ii) pour tout $x_0 \in M$, tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$, il existe une carte (Ω, φ) de M en x_0 qui est telle que $\varphi(x_0) = y_0$ et $\varphi(\Omega) = B_{y_0}(r)$, où $B_{y_0}(r)$ est la boule euclidienne de centre y_0 et de rayon r,

(iii) pour tout $x_0 \in M$ et tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une carte (Ω, φ) de M en x_0 qui est telle que $\varphi(x_0) = y_0$ et $\varphi(\Omega) = \mathbb{R}^n$.

Dans les points (i)-(iii) de cet énoncé, et à partir de maintenant, par carte de M on entend une carte dans le C^k-atlas saturé de M, celui qui confère à M sa structure de variété de classe C^k.

DÉMONSTRATION. Considérons $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \bigcup \{(\Omega, f \circ \varphi)\}$. Clairement $\tilde{\mathcal{A}}$ est un atlas de classe C^k car pour toute carte (Ω', ψ) de $\mathcal{A}$, on a que $(f \circ \varphi) \circ \psi^{-1} = f \circ (\varphi \circ \psi^{-1})$ est de classe C^k (et vice-versa). Comme $\mathcal{A}$ est C^k-saturé, et puisque $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$, on doit avoir $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$. Donc $(\Omega, f \circ \varphi) \in \mathcal{A}$. D'où la première affirmation.

(i) On démontre le premier point. Soient $x_0 \in M$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit (Ω, ψ) une carte de M en x_0. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ le C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ consistant en la translation de vecteur $y_0 - \psi(x_0)$. Donc $f(y) = y + y_0 - \psi(x_0)$. Alors, en vertue de la première affirmation, $(\Omega, f\circ\psi)$ est une carte de M en x_0. On a $(f\circ\psi)(x_0) = y_0$. D'où (i).

(ii) On démontre le second point. On se donne $x_0 \in M$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Soit (Ω', ψ) la carte de M en x_0 obtenue en (i). Comme $\psi(\Omega')$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_{y_0}(\varepsilon) \subset \psi(\Omega')$. On note $\Omega = \psi^{-1}\left(B_{y_0}(\varepsilon)\right)$. Clairement, (Ω, ψ) est encore une carte de M en x_0 (même raisonnement que dans le lemme, mais en plus simple). Soit maintenant $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ le C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ consistant en la translation/homothétie donnée par

$$f(y) = y_0 + \frac{r}{\varepsilon}(y - y_0) \ .$$

Alors $(\Omega, f\circ\psi)$ est une carte de M en x_0 d'après a première affirmation, tandis que $(f\circ\psi)(\Omega) = B_{y_0}(r)$. D'où (ii).

(iii) On démontre le troisième point. On prend la carte construite en (ii) avec $r = 1$. Pour simplifier on pourra supposer que $y_0 = 0$. On utilise alors le fait que $f : B_0(1) \to \mathbb{R}^n$ donnée par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} \ ,$$

réalise un C^∞-difféomorphisme de $B_0(1)$ sur $\mathbb{R}^n$. L'application inverse est donnée par

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1 + \|y\|^2}} \ .$$

Si (Ω, ψ) est la carte du (ii) dont on est parti, alors, toujours en vertue du lemme précédent, $(\Omega, f\circ\psi)$ répond à la question. La proposition est démontrée. $\square$

3. Des exemples de variétés différentiables

Il y a d'abord les exemples de base, et en tout premier lieu l'espace $\mathbb{R}^n$ lui-même. L'ensemble à un élément $\left\{(\mathbb{R}^n, \mathrm{Id})\right\}$ est un atlas de classe C^∞. Le C^∞-atlas saturé qui lui correspond est constitué des couples (Ω, φ), où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et φ un difféomorphisme de classe C^∞ de Ω sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Cela confère à $\mathbb{R}^n$ une structure naturelle de variété C^∞ de dimension n.

Toujours dans les exemples de base, tout ouvert connexe U d'une C^k-variété M de dimension n, possède une structure naturelle de C^k-variété de dimension n. Il suffit de considérer les cartes $(U\cap\Omega, \varphi)$, où (Ω, φ) parcourt l'ensemble des cartes de (l'atlas saturé de) M.

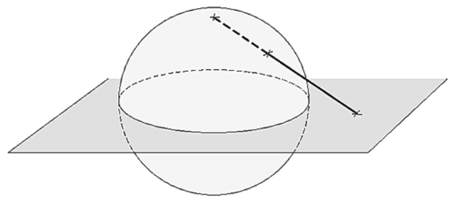
Un exemple plus sophistiqué est donné par la sphère unité S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$. A savoir,

$$S^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ \|x\| = 1\right\} \ ,$$

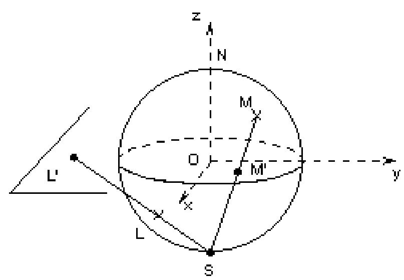
où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^{n+1}$. On place sur S^n la topologie induite de celle de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Théorème 8.1. *S^n possède une structure naturelle de C^∞-variété compacte de dimension n.*

Démonstration. On note P et Q les deux points de S^n de coordonnées dans $\mathbb{R}^{n+1}$ $(0, \ldots, 0, 1)$ et $(0, \ldots, 0, -1)$. Soient de plus $\Omega_P = S^n\backslash\{P\}$ et $\Omega_Q = S^n\backslash\{Q\}$. On note $\Phi_P : \Omega_P \to \mathbb{R}^n$ (resp. $\Phi_Q : \Omega_Q \to \mathbb{R}^n$) la projection stéréographique de pôle P (resp. de pôle Q). Graphiquement



ou encore



Les équations des projections stéréograhiques sont données par:

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \Omega_P,\ \Phi_P(x) = \Big(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\Big)$$
$$\forall x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \Omega_Q,\ \Phi_Q(x) = \Big(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}}\Big)\ .$$

On vérifie sans difficulté que Φ_P et Φ_Q sont des homéomorphismes de Ω_P et Ω_Q sur $\mathbb{R}^n$. Les inverses sont donnés pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ par

$$\Phi_P^{-1}(x) = \Big(\frac{2x_1}{1 + |x|^2}, \ldots, \frac{2x_n}{1 + |x|^2}, \frac{|x|^2 - 1}{1 + |x|^2}\Big)$$
$$\Phi_Q^{-1}(x) = \Big(\frac{2x_1}{1 + |x|^2}, \ldots, \frac{2x_n}{1 + |x|^2}, \frac{1 - |x|^2}{1 + |x|^2}\Big)\ ,$$

où $|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Reste maintenant à montrer que

$$\big((\Omega_P, \Phi_P), (\Omega_Q, \Phi_Q)\big)$$

est un atlas de classe C^∞ sur S^n, à savoir que $\Phi_Q \circ \Phi_P^{-1}$ est un difféomorphisme de classe C^∞ de $\Phi_P(\Omega_P \cap \Omega_Q) = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ sur lui-même. Or

$$\Phi_Q \circ \Phi_P^{-1}(x) = \frac{x}{|x|^2}\ .$$

D'où le résultat. □

Un autre exemple standard aurait pu être donné par l'espace projectif réel $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, l'espace des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$, qui lui aussi possède une structure naturelle de variété compacte C^∞ de dimension n. A partir de deux variétés on en fabrique facilement une troisième par produit cartésien.

Lemme 8.3. *Soient M et N deux C^k-variétés de dimensions respectives m et n, et soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ les C^k-atlas saturés respectifs de M et N. Alors $M \times N$ possède une structure naturelle de C^k-variété de dimension $m + n$, définie par l'atlas de classe C^k (non saturé) formé des $\big(\Omega \times \Omega', \varphi \times \psi\big)$, où pour $(\Omega, \varphi) \in \mathcal{A}$ et $(\Omega', \psi) \in \mathcal{A}'$, l'application $\varphi \times \psi : \Omega \times \Omega' \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ vérifie $\varphi \times \psi(x, y) = \big(\varphi(x), \psi(y)\big)$.*

Le tore plat $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ (n fois) est la variété C^∞-compacte de dimension n obtenue à partir de S^1 par produit cartésien de S^1 avec lui-même n fois. Le cylindre $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ de dimension n possède aussi une structure de variété C^∞ donnée par le produit de la variété $\mathbb{R}$ avec la variété S^{n-1}.

Dans toute la suite, sauf mention du contraire, le terme variété (sans mention de la classe de différentiabilité) désignera une variété de classe C^∞.

La justification de ce parti pris classique sera vue un peu plus loin, l'idée étant que toute structure C^1 possède une sous structure C^∞.

4. Applications différentiables entre variétés

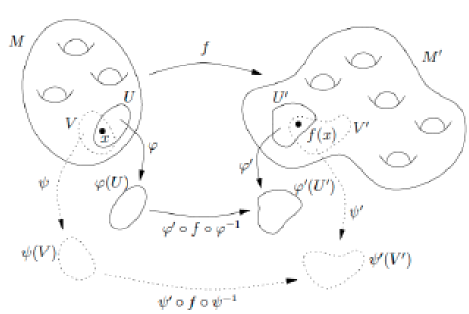
On définit la différentiabilité pour les applications entre variétés.

DÉFINITION 8.8. *Soient M et N deux variétés, x un point de M, et $f : M \to N$ une application continue au point x. On dit que f est différentiable au point x si pour toute carte (Ω, φ) de M au point x, et toute carte (Ω', ψ) de N au point $f(x)$ vérifiant $f(\Omega) \subset \Omega'$, l'application*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \to \psi(\Omega')$$

est différentiable au point $\varphi(x)$.

Etant données (Ω, φ) et (Ω', ψ) deux cartes de M et N telles que $f(\Omega) \subset \Omega'$, *lire* f dans ces cartes signifie que l'on considère l'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \to \psi(\Omega')$.



Lecture d'une application dans deux cartes entre deux variétés.

DÉFINITION 8.9. *Par extension, une application continue $f : M \to N$ est dite différentiable sur M si elle est différentiable en tout point de M. Dans le même ordre d'idées, on dit qu'une application continue $f : M \to N$ est de classe C^k sur M, k un entier, si pour toute carte (Ω, φ) de M, et toute carte (Ω', ψ) de N vérifiant $f(\Omega) \subset \Omega'$, l'application*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \to \psi(\Omega')$$

est de classe C^k sur $\varphi(\Omega)$.

La condition $f(\Omega) \subset \Omega'$ n'est pas vraiment restrictive. Plus précisément, étant données deux cartes quelconques (Ω, φ) et (Ω', ψ) respectivement de M et N en x et $f(x)$, il existe un procédé très simple qui permet de se ramener au cas où $f(\Omega) \subset \Omega'$. Par continuité de f on pourra remplacer Ω par $\Omega \cap f^{-1}(\Omega')$. On a alors $f(\Omega) \subset \Omega'$. Le procédé fonctionne aussi lorsque f est seulement supposée continue en x en passant par les voisinages. Une autre remarque est la suivante: inutile de définir la différentiablitié sur un ouvert d'une variété puisque tout ouvert (connexe) d'une variété possède une structure naturelle de variété.

Théorème 8.2. *Soient M et N deux variétés, x un point de M, et $f : M \to N$ une application de M dans N. Pour que f soit différentiable au point x, il suffit qu'il existe une carte (Ω, φ) de M en x, et une carte (Ω', ψ) de N en $f(x)$, vérifiant $f(\Omega) \subset \Omega'$, pour lesquelles l'application*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \to \psi(\Omega')$$

est différentiable au point $\varphi(x)$. De même, pour que f soit de classe C^k sur M, k un entier, il suffit que pour tout x de M, il existe une carte (Ω, φ) de M en x, et une carte (Ω', ψ) de N en $f(x)$, vérifiant $f(\Omega) \subset \Omega'$, pour lesquelles l'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est de classe C^k sur $\varphi(\Omega)$.

Démonstration. Soient (Ω_1, φ_1) et (Ω_2, φ_2) deux cartes de M telles que $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$, et soient (Ω'_1, ψ_1) et (Ω'_2, ψ_2) deux cartes de N telles que $f(\Omega_1) \subset \Omega'_1$ et $f(\Omega_2) \subset \Omega'_2$. On écrit que

$$\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1} = \left(\psi_2 \circ \psi_1^{-1}\right) \circ \left(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}\right) \circ \left(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}\right)$$

sur $\varphi_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$. Sachant que les applications de changement de cartes $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ et $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ sont de classe C^∞, on obtient immédiatement la première partie du théorème à partir de la relation ci-dessus, à savoir que si f lue dans les cartes (Ω_1, φ_1) et (Ω'_1, ψ_1) est différentiable au point $\varphi_1(x)$, alors f lue dans les cartes (Ω_2, φ_2) et (Ω'_2, ψ_2) est différentiable au point $\varphi_2(x)$. La seconde partie du théorème se démontre de la même façon. D'où le résultat. □

On sait donc définir la différentiabilité d'une application entre variétés. Par contre on ne sait pas encore définir sa différentielle. Nous verrons cela un peu plus tard,lorsque nous aborderons la notion d'espace tangent.

Dans le cas particulier où $N = \mathbb{R}$, sous entendu muni de sa structure naturelle de variété définie par l'atlas à une carte $(\mathbb{R}, \mathrm{Id})$, on tire du dernier théorème qu'une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ est

(1) différentiable en un point x de M s'il existe une carte (Ω, φ) de M au point x pour laquelle $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \to \mathbb{R}$ est différentiable au point $\varphi(x)$,

(2) de classe C^k sur M si pour tout point x de M, il existe une carte (Ω, φ) de M en x, pour laquelle $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \to \mathbb{R}$ est de classe C^k sur $\varphi(\Omega)$.

Dans les deux énoncés (1) et (2) on pose en fait $(\Omega', \psi) = (\mathbb{R}, \mathrm{Id})$. Ces deux assertions se généralisent bien sûr au cas où f est à valeurs dans un espace $\mathbb{R}^n$ (là encore, sous entendu muni de sa structure naturelle de variété).

Proposition 8.3. *Soient M_1, M_2, et M_3 trois variétés, et $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$ deux applications. Si f est différentiable en un point x de M_1, et si g est différentiable au point $f(x)$, l'application $g \circ f : M_1 \to M_3$ est différentiable au* *point x. De même, si f est de classe C^k sur M_1 et si g est de classe C^k sur M_2, $g \circ f$ est de classe C^k sur M_1.*

DÉMONSTRATION. Soient (Ω_1, φ_1) une carte de M_1 en x, (Ω_2, φ_2) une carte de M_2 en $f(x)$, et (Ω_3, φ_3) une carte de M_3 en $g\big(f(x)\big)$. Quitte à diminuer Ω_1 et Ω_2, on pourra toujours supposer que $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ et $g(\Omega_2) \subset \Omega_3$. On écrit alors que

$$\varphi_3 \circ (g \circ f) \circ \varphi_1^{-1} = \left(\varphi_3 \circ g \circ \varphi_2^{-1}\right) \circ \left(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}\right) ,$$

d'où l'on tire le résultat. □

Le résultat qui suit s'obtient très facilement à partir de la définition des structures produits. On le donne sans preuve.

PROPOSITION 8.4. *Soient M, M_1, M_2 trois variétés, et x un point de M. On munit $M_1 \times M_2$ de sa structure de variété produit. Etant donnée*

$$f = \big(f_1, f_2\big) : M \to M_1 \times M_2 ,$$

f est différentiable au point x (resp. de classe C^k) si et seulement si f_1 et f_2 sont différentiables au point x (resp. de classe C^k) en tant qu'applications de M dans M_1 et M_2.

On termine cette section avec la définition des difféomorphismes.

DÉFINITION 8.10. *Soient M et N deux variétés, et $f : M \to N$ une application. On dit que f est un C^k-difféomorphisme de M sur N si: f est bijective de M sur N, f est de classe C^k sur M et f^{-1} est de classe C^k sur N.*

On vérifie facilement que l'existence d'un difféomorphisme entre deux variétés impose l'égalité des dimensions.

5. Un cas intéressant de (non) multiplicité

On discute le résultat suivant en préambule de la multiplicité des structures lisses sur laquelle nous reviendrons plus tard.

PROPOSITION 8.5. *Soient M une variété et soit $\mathcal{A} = ((\Omega_i, \varphi_i))_{i \in I}$ son C^∞-atlas saturé. On note Ψ un homéomorphisme de M que l'on suppose non de classe C^1. On définit $\tilde{\mathcal{A}} = \big((\Psi^{-1}(\Omega_i), \varphi_i \circ \Psi)\big)_{i \in I}$. Alors $\tilde{\mathcal{A}}$ est un atlas de classe C^∞ sur M, les atlas $\mathcal{A}$ et $\tilde{\mathcal{A}}$ ne sont pas C^1-compatibles et l'application identité $Id : (M, \mathcal{A}) \to (M, \tilde{\mathcal{A}})$ de la variété $(M, \mathcal{A})$ sur la variété $(M, \tilde{\mathcal{A}})$ n'est pas un C^1-difféomorphisme. Par contre les variétés $(M, \mathcal{A})$ et $(M, \tilde{\mathcal{A}})$ sont C^∞-difféomorphes.*

PROOF. Il est clair que $\tilde{\mathcal{A}}$ est un atlas topologique. Si maintenant $(\Psi^{-1}(\Omega_i), \varphi_i \circ \Psi)$ et $(\Psi^{-1}(\Omega_j), \varphi_j \circ \Psi)$ sont deux cartes de $\tilde{\mathcal{A}}$, alors

$$(\varphi_j \circ \Psi) \circ (\varphi_i \circ \Psi)^{-1} = \varphi_j \circ (\Psi \circ \Psi^{-1}) \circ \varphi_i^{-1} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$$

qui est de classe C^∞. Donc $\tilde{\mathcal{A}}$ est un atlas C^∞. Si Ψ n'est pas de classe C^1 c'est qu'il existe (Ω_i, φ_i) et (Ω_j, φ_j) deux cartes de M pour lesquelles Ψ lue dans ces cartes n'est pas C^1. Or $\varphi_j \circ \Psi \circ \varphi_i^{-1} = (\varphi_j \circ \Psi) \circ \varphi_i^{-1}$ s'interprète comme le changement de cartes entre la carte $(\Psi^{-1}(\Omega_j), \varphi_j \circ \Psi)$ de $\tilde{\mathcal{A}}$ et la carte (Ω_i, φ_i) de $\mathcal{A}$. Ce changement de cartes n'étant pas C^1 c'est que les atlas ne sont pas C^1-compatibles. La lecture de l'identité de la variété $(M, \mathcal{A})$ sur la variété $(M, \tilde{\mathcal{A}})$ dans les cartes (Ω_i, φ_i) et $(\Psi^{-1}(\Omega_j), \varphi_j \circ \Psi)$ n'est rien d'autre que $(\varphi_j \circ \Psi) \circ \varphi_i^{-1}$. On en déduit que l'identité n'est pas un C^1-difféomorphisme de la variété $(M, \mathcal{A})$ sur la variété $(M, \tilde{\mathcal{A}})$. Pour finir on remarque que $\Psi : (M, \tilde{\mathcal{A}}) \to (M, \mathcal{A})$ est de classe C^∞ car sa lecture dans deux cartes quelconques $(\Psi^{-1}(\Omega_i), \varphi_i \circ \Psi)$ de $\tilde{\mathcal{A}}$ et (Ω_j, φ_j) de $\mathcal{A}$ vaut

$$\begin{aligned}\varphi_j \circ \Psi \circ (\varphi_i \circ \Psi)^{-1} &= \varphi_j \circ (\Psi \circ \Psi^{-1}) \circ \varphi_i^{-1} \\ &= \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} ,\end{aligned}$$

qui est de classe C^∞. Donc Ψ est de classe C^∞ de la variété $(M, \tilde{\mathcal{A}})$ sur la variété $(M, \mathcal{A})$. On montre sans plus de difficulté que son inverse Ψ^{-1} est C^∞ de de la variété $(M, \mathcal{A})$ sur la variété $(M, \tilde{\mathcal{A}})$. Les deux variétés sont donc C^∞-difféomorphes. La proposition est démontrée. $\square$

6. Rang, immersions, submersions, plongements.

Le rang d'une application différentiable entre variétés se définit comme suit.

DÉFINITION 8.11. *Soient M et N deux variétés, x un point de M, et $f : M \to N$ une application différentiable au point x. Etant données (Ω, φ) une carte de M en x, et (Ω', ψ) une carte de N en $f(x)$, telles que $f(\Omega) \subset \Omega'$, le rang de f au point x est par définition le rang de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ au point $\varphi(x)$, à savoir le rang de l'application linéaire $D\big(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big)$. On le note $Rg(f)_x$. La définition est intrinsèque, au sens où elle ne dépend pas du choix des cartes.*

DÉMONSTRATION. On démontre que la définition est intrinsèque. Soient (Ω_1, φ_1) et (Ω_2, φ_2) deux cartes de M en x, et (Ω_1', ψ_1) et (Ω_2', ψ_2) deux cartes de N en $f(x)$ telles que $f(\Omega_1) \subset \Omega_1'$ et $f(\Omega_2) \subset \Omega_2'$. On écrit que

$$\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1} = \big(\psi_2 \circ \psi_1^{-1}\big) \circ \big(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}\big) \circ \big(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}\big) .$$

Par différentiation de cette relation au point $\varphi_2(x)$ on obtient que

$$\begin{aligned}&D\big(\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}\big)\big(\varphi_2(x)\big) \\ &= D\big(\psi_2 \circ \psi_1^{-1}\big)\big(\psi_1(f(x))\big) \circ D\big(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}\big)\big(\varphi_1(x)\big) \\ &\qquad \circ D\big(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}\big)\big(\varphi_2(x)\big) .\end{aligned}$$

Sachant que $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ et $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ sont des difféomorphismes, on pourra encore écrire que

$$D\big(\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}\big)\big(\varphi_2(x)\big) = G \circ D\big(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}\big)\big(\varphi_1(x)\big) \circ F$$

où G est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$, F est un isomorphisme de $\mathbb{R}^m$, m désigne la dimension de M et n désigne la dimension de N. On a $F(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m$ et G présèrve les dimensions. Il s'ensuit que

$$Rg\Big(D\big(\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}\big)\big(\varphi_2(x)\big)\Big) = Rg\Big(D\big(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}\big)\big(\varphi_1(x)\big)\Big) .$$

D'où le résultat, à savoir l'indépendance de la définition par rapport au choix des cartes. $\square$

Le théorème d'inversion locale passe sans difficulté au cas des variétés (il suffit de l'appliquer à la lecture de l'application). On l'énonce ici sans démonstration.

THÉORÈME 8.3 (Inversion locale). *Soient M et N deux variétés de même dimension n, et $f : M \to N$ une application de classe C^k de M dans N. Si en un point x de M, $Rg(f)_x = n$, alors f réalise un difféomorphisme de classe C^k d'un voisinage ouvert de x dans M sur un voisinage ouvert de $f(x)$ dans N. En* *particulier, si f est bijective de M sur N, et si en tout point x de M, $Rg(f)_x = n$, alors f réalise un difféomorphisme de classe C^k de M sur N.*

Le théorème d'inversion locale peut être vu comme un cas particulier du théorème du rang constant (qui prend une forme agréable dans le contexte des variétés, contrairement à la forme qu'il prend entre espaces euclidiens).

THÉORÈME 8.4 (Théorème du rang constant). *Soient M et N deux variétés de dimensions respectives m et n, et soit $f : M \to N$ une application de classe C^∞. On suppose que f est de rang constant p sur M. Pour tout $x_0 \in M$ il existe alors une carte (Ω, φ) de M au point x_0, et il existe une carte (Ω', ψ) de N au point $f(x_0)$ vérifiant $f(\Omega) \subset \Omega'$, telles que pour tout $x \in \varphi(\Omega)$,*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = S(x) \ ,$$

où $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est l'application de rang p de référence définie par $S\big(x_1, \dots, x_m\big) = \big(x_1, \dots, x_p, 0 \dots, 0\big)$ si $p < n$ et $S\big(x_1, \dots, x_m\big) = \big(x_1, \dots, x_n\big)$ si $p = n$.

On définit maintenant ce que l'on entend par immersion, submersion, et plongement. Immersions et submersions sont des applications de rang maximum par rapport à la configuration.

DÉFINITION 8.12. *Soient M et N deux variétés de dimensions respectives m et n, et $f : M \to N$ une application différentiable sur M. On dit que f est une immersion si f est de rang constant m sur M, une submersion si f est de rang constant n sur M, un plongement si f est une immersion qui réalise un homéomorphisme sur son image.*

L'existence d'une immersion $f : M \to N$ impose $m \leq n$, tandis que l'existence d'une submersion $f : M \to N$ impose $m \geq n$.

PROPOSITION 8.6. *Une immersion injective et propre est un plongement. En particulier, si M est compacte, et si $f : M \to N$ est une immersion injective, alors f est un plongement.*

DÉMONSTRATION. Le résultat est énoncé dans le chapitre de topologie. On se souviendra que propre signifie que l'image réciproque d'un compact est un compact. Une application continue d'un compact est automatiquement propre car compact implique fermé, tout fermé dans un compact est compact et l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé. D'où la proposition. □

Le théorème du rang constant dans le cas des immersions prend la forme suivante.

COROLLAIRE 8.1 (Théorème du rang constant pour les immersions). *Soient M et N deux variétés de dimensions respectives m et n, et soit $f : M \to N$ une immersion de classe C^∞. Pour tout $x_0 \in M$ il existe une carte de (Ω, φ) de M au point x_0, et il existe une carte (Ω', ψ) de N au point $f(x_0)$ vérifiant $f(\Omega) \subset \Omega'$, telles que pour tout $x \in \varphi(\Omega)$,*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = I(x) \ ,$$

où $I : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est l'injection canonique définie par

$$I\big(x_1, \dots, x_m\big) = \big(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0\big) \ .$$

En particulier, une immersion C^∞ est localement un plongement.

Le théorème du rang constant dans le cas des submersions prend la forme suivante.

Corollaire 8.2 (Théorème du rang constant pour les submersions). *Soient M et N deux variétés de dimensions respectives m et n, et soit $f : M \to N$ une submersion de classe C^∞. Pour tout $x_0 \in M$ il existe une carte (Ω, φ) de M au point x_0, et il existe une carte (Ω', ψ) de N au point $f(x_0)$ vérifiant $f(\Omega) \subset \Omega'$, telles que pour tout $x \in \varphi(\Omega)$,*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = P(x) \ ,$$

où $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est la projection canonique définie par

$$P\big(x_1, \ldots, x_m\big) = \big(x_1, \ldots, x_n\big) \ .$$

En particulier, une submersion C^∞ est une application ouverte.

Dans un autre registre, le résultat suivant a lieu.

Lemme 8.4. *La composée de deux immersions (resp. deux submersions) est encore une immersion (resp. une submersion). La composée d'une immersion et d'une submersion dans le sens immersion $\circ$ submersion est une application de rang constant. On ne peut rien dire a priori sur la composée d'une immersion et d'une submersion dans le sens submersion $\circ$ immersion.*

Démonstration. Soit $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ une lecture de f. On remarque que f est une immersion (resp. submersion) sur Ω, l'ouvert de la carte (Ω, φ), si $D\tilde{f}\,(\varphi(x))$ est injective (resp. surjective) en tout point x de Ω. On compose alors les lectures par

$$\varphi_3 \circ (g \circ f) \circ \varphi_1^{-1} = (\varphi_3 \circ g \circ \varphi_2^{-1}) \circ (\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \ .$$

Par suite, en tout point $x \in \Omega_1$, l'ouvert de la carte (Ω_1, φ_1),

$$\begin{aligned} &D\left(\varphi_3 \circ (g \circ f) \circ \varphi_1^{-1}\right)(\varphi_1(x)) \\ &= D\left(\varphi_3 \circ g \circ \varphi_2^{-1}\right)(\varphi_2\,(f(x))) \circ D(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1})\,(\varphi_1(x)) \ . \end{aligned}$$

Si f et g sont toutes deux des immersions alors le membre de droite de la relation ci-dessus est du type injective$\circ$injective. C'est donc encore une application injective et on en déduit bien que

$$\text{immersion} \circ \text{immersion} = \text{immersion} \ .$$

Même chose avec le sens submersion $\circ$ submersion et la surjectivité. Donc

$$\text{submersion} \circ \text{submersion} = \text{submersion} \ .$$

Pour ce qui est du sens immersion$\circ$submersion on remarque que le membre de droite de la relation précédente est du type injective $\circ$ surjective. Ecrivons $G \circ F$ avec F et G des applications linéaires respectivement surjectives et injectives. Soient aussi n_1, n_2 et n_3 les dimensions des trois variétés. Comme F est surjective, on peut écrire que $F(\mathbb{R}^{n_1}) = \mathbb{R}^{n_2}$, et comme G est injective, on a que $\dim G(\mathbb{R}^{n_2}) = n_2$. Donc, dans le sens immersion $\circ$ submersion on récupère une application de rang constant la dimension de la variété milieu. Pour l'autre sens on renvoie à l'exemple ci-dessous. $\square$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application donnée par $f(x,y,z) = (y,z)$. C'est une submersion. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par $g(t) = (t, t^2, t^3)$. C'est clairement une immersion. Par contre

$$f \circ g(t) = (t^2, t^3) \ ,$$

dont la matrice jacobienne en t vaut

$$M = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \ .$$

Cette matrice est de rang 1 en tout $t \neq 0$, mais de rang 0 en $t = 0$. Donc $f \circ g$ n'est pas de rang constant.

7. Sous variétés

On traite de la notion de sous variété dans cette section.

Définition 8.13. *Une sous variété N de dimension q d'une variété M de dimension n, $q \leq n$, est un sous espace topologique de M qui vérifie: pour tout x de N, il existe une carte (Ω, φ) de M au point x, il existe U_1 un ouvert de $\mathbb{R}^q$, et il existe U_2 un ouvert de $\mathbb{R}^{n-q}$, tels que*

$$\varphi(x) = 0 \ \text{ et } \varphi(\Omega) = U_1 \times U_2 \ ,$$
$$\varphi\big(\Omega \cap N\big) = U_1 \times \big\{0\big\}$$

La carte (Ω, φ) est alors appelée carte de M en x adaptée à N.

Une autre façon de dire les choses est encore la suivante: N est une sous variété de dimension q d'une variété M de dimension n si pour tout point x de N il existe un système de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ de M au point x ayant la propriété que N y soit défini par les équations $x_{q+1} = \dots = x_n = 0$. Le résultat suivant est immédiat.

Théorème 8.5. *Si N est une sous variété de dimension q d'une variété M, alors N hérite d'une structure naturelle de variété de dimension q. L'atlas qui définit cette structure est donné par les*

$$\Big(\Omega \cap N, \Pi \circ \varphi_{|\Omega \cap N}\Big) \ ,$$

où (Ω, φ) décrit l'ensemble des cartes adaptées à N, et $\Pi : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-q} \to \mathbb{R}^q$ désigne la première projection. En particulier, l'injection canonique $i : N \to M$ (définie par $i(x) = x$) est un plongement de la variété N dans la variété M.

Le résultat qui suit est tout autant immédiat.

Proposition 8.7. *Soient N et N' deux sous variétés des variétés M et M', et soit de plus $f : M \to M'$ une application de classe C^k. Si $f(N) \subset N'$, alors f restreinte à N, et considérée en tant qu'application de la variété N dans la variété N', est encore une application de classe C^k.*

On démontre maintenant le résultat suivant.

Théorème 8.6 (Représentation implicite des sous variétés). **(1)** *Soit N une sous variété de dimension q d'une variété M de dimension n. Alors N s'écrit localement comme l'image réciproque d'un point par une C^∞-submersion à valeurs dans $\mathbb{R}^{n-q}$, i.e: $\forall x \in N$, $\exists \Omega$ voisinage ouvert de x dans M, et $\exists f : \Omega \to \mathbb{R}^{n-q}$ une C^∞-submersion tels que $\Omega \cap N = f^{-1}(0)$.* **(2)** *Réciproquement, soient M et M' deux variétés de dimensions respectives n et $n - q$, soit $f : M \to M'$ une* *application de classe C^∞, et soit y_0 un point de $f(M)$. On suppose que pour tout $x \in f^{-1}(y_0)$, $Rg(f)_x = n-q$. Alors $f^{-1}(y_0)$ est une sous variété de dimension q de M. En particulier, l'image réciproque d'un point par une C^∞-submersion est une sous variété (le tout à connexité près).*

Démonstration. **(1)** Soient $x \in N$ et (Ω, φ) une carte de M en x adaptée à N. Si $\varphi = \big(\varphi_1, \dots, \varphi_n\big)$ alors

$$f = \big(\varphi_{q+1}, \dots, \varphi_n\big) : \Omega \to \mathbb{R}^{n-q}$$

est une C^∞-submersion et $\Omega \cap N = f^{-1}(0)$.

(2) Soient M, M' deux variétés de dimensions n et $n-q$, $f : M \to M'$ une application C^∞, y_0 un point de $f(M)$, et on suppose que $\forall x \in f^{-1}(y_0)$, $\mathrm{Rg}(f)_x = n-q$. Soit alors $x_0 \in f^{-1}(y_0)$. Comme f est de rang maximum en x_0, il existe un voisinage ouvert Ω de x_0 tel que f y soit toujours de rang maximum. Sans perdre en généralité, on pourra supposer que Ω est l'ouvert d'une carte (Ω, φ) de M en x_0, et on pourra considérer (Ω', ψ) une carte de M' en y_0 vérifiant $f(\Omega) \subset \Omega'$ et telles que: $\forall x \in \varphi(\Omega)$,

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = P(x) \ ,$$

où $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-q}$ est la projection $P(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-q})$. Quitte à considérer la carte $(\Omega, \mathcal{C} \circ \varphi)$ au lieu de (Ω, φ), où

$$\mathcal{C}(x_1, \dots, x_n) = (x_{q+1}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_q) \ ,$$

on pourra supposer que $P(x_1, \dots, x_n) = (x_{q+1}, \dots, x_n)$. Là encore, et quitte à restreindre Ω, on pourra maintenant supposer que $\varphi(\Omega) = U_1 \times U_2$, où U_1 est un ouvert de $\mathbb{R}^q$, et U_2 un ouvert de $\mathbb{R}^{n-q}$. On remarque alors que

$$\varphi\big(\Omega \cap f^{-1}(y_0)\big) = U_1 \times \psi(y_0) \tag{$\star$}$$

En effet:

a) $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = P \ \Rightarrow \ \psi \circ f = P \circ \varphi$ et ainsi

$$P\Big(\varphi\big(\Omega \cap f^{-1}(y_0)\big)\Big) = \psi(y_0)$$

de sorte que $\varphi\big(\Omega \cap f^{-1}(y_0)\big) \subset U_1 \times \psi(y_0)$.

b) Si $z \in U_1 \times \psi(y_0)$ alors $\varphi^{-1}(z) \in \Omega$ et puisque $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = P$,

$$\psi \circ f\big(\varphi^{-1}(z)\big) = \psi(y_0)$$

et $f\big(\varphi^{-1}(z)\big) = y_0$. D'où $\varphi^{-1}(z) \in f^{-1}(y_0)$ et

$$U_1 \times \psi(y_0) \subset \varphi\big(\Omega \cap f^{-1}(y_0)\big) \ .$$

En particulier, le résultat annoncé, l'égalité $(\star)$, est démontré. A partir de là, on remarque que puisque $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = P$,

$$\psi(y_0) = \big(\varphi^{q+1}(x_0), \dots, \varphi^n(x_0)\big) \ .$$

On pose alors

$$\Phi(x) = \big(\varphi^1(x) - \varphi^1(x_0), \dots, \varphi^n(x) - \varphi^n(x_0)\big) \ ,$$

et on construit ainsi une carte (Ω, Φ) de M en x_0 telle que $\Phi(x_0) = 0$ et

$$\Phi\big(\Omega \cap f^{-1}(y_0)\big) = \tilde{U}_1 \times \{0\}$$
$$\Phi(\Omega) = \tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2 \ ,$$

où $\tilde{U}_1$ et $\tilde{U}_2$ sont les translatés de U_1 et U_2 par les vecteurs $\big(\varphi^1(x_0),\dots,\varphi^q(x_0)\big)$ et $\big(\varphi^{q+1}(x_0),\dots,\varphi^n(x_0)\big)$. D'où le résultat, puisque $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ est quelconque. □

Dans le même ordre d'idées, le résultat suivant a lieu.

Théorème 8.7 (Représentation paramétrée des sous variétés). **(1)** *Soit N une sous variété de dimension q d'une variété M de dimension n. Alors N est localement l'image d'un ouvert de $\mathbb{R}^q$ par un C^∞-plongement, i.e: $\forall x \in N$, $\exists\Omega$ voisinage ouvert de x dans M, $\exists U$ un ouvert de $\mathbb{R}^q$, et il existe $f : U \to M$ un C^∞-plongement tels que $f(U) = \Omega \cap N$.* **(2)** *Réciproquement, si M et M' sont deux variétés de dimensions respectives q et $n+q$, et si $f : M \to M'$ est un C^∞-plongement, alors $f(M)$ est une sous variété de dimension q de M'. De plus, f réalise un difféomorphisme de la variété M sur la variété $f(M)$.*

La sphère unité S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$ est une sous variété de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$, définie implicitement par l'équation $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - 1 = 0$. Sa structure de sous variété coïncide (fort heureusement) avec sa structure de variété définie auparavant.

8. Le théorème de Whitney

Le théorème de Whitney établit un lien entre la théorie générale (ou abstraite) des variétés différentiables (que nous avons adoptée ici), et la théorie des sous variétés de l'espace euclidien. En un certain sens, ces deux théories sont identiques.

Théorème 8.8 (Théorème de Whitney). *Toute variété paracompacte de dimension n se plonge de façon C^∞ dans $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

En d'autres termes: si M est une variété paracompacte de dimension n, il existe un C^∞-plongement $i : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$. En particulier, $i(M)$ est une sous variété de dimension n de $\mathbb{R}^{2n+1}$, et i réalise un C^∞-difféomorphisme de M sur $i(M)$. Toute variété paracompacte de dimension n est ainsi difféomorphe à une sous variété de dimension n de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Démonstration. On donne une preuve simplifiée du théorème de Whitney en se limitant à la preuve du résultat plus faible suivant: *toute variété compacte se plonge de façon C^∞ dans un espace euclidien.* Soit donc M une variété compacte. A tout x de M on associe une carte (Ω_x, φ_x) de M en x telle que $\varphi_x(x) = 0$ et

$$\varphi_x(\Omega_x) = B_0(3) \subset \mathbb{R}^n ,$$

où n désigne la dimension de M, et $B_0(3)$ désigne la boule ouverte de centre 0 et rayon 3 dans $\mathbb{R}^n$. On écrit alors que

$$M = \bigcup_{x\in M} \varphi_x^{-1}\big(B_0(1)\big) ,$$

et puisque M est compacte, il existe une famille finie $(x_j)_{j=1,\dots,N}$ de points de M telle que

$$M = \bigcup_{j=1}^{N} \varphi_{x_j}^{-1}\big(B_0(1)\big) .$$

Soit maintenant $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ qui satisfait

$$\eta(x) = 1 \text{ si } x \in B_0(1) ,\ \eta(x) = 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}^n \backslash B_0(2) .$$

On note $\varphi_j = \varphi_{x_j}$ et on pose $\eta_j = \eta \circ \varphi_j$. La fonction

$$\Phi : M \to \mathbb{R}^{N(n+1)}$$

définie par

$$\Phi = \big(\eta_1\varphi_1, \ldots, \eta_N\varphi_N, \eta_1, \ldots, \eta_N\big)$$

est alors de classe C^∞ sur M. (On prolonge ici les fonctions $\eta_i\varphi_i$ et η_i par 0 en dehors de Ω_{x_i}). On affirme que

(a) Φ est une immersion,

(b) Φ est injective.

(a) Etant donné x un point de M, il existe $i \in \{1, \ldots, N\}$ tel que $x \in \varphi_i^{-1}\big(B_0(1)\big)$. Par suite, $\eta_i\varphi_i = \varphi_i$ au voisinage de x, et on retrouve dans l'expression de $\Phi \circ \varphi_i^{-1}$ l'application identité de $\mathbb{R}^n$. D'où $\mathrm{Rg}(\Phi)_x = n$, et le point (a).
(b) Si $\Phi(x) = \Phi(y)$, alors pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, $\eta_i(x) = \eta_i(y)$. Par ailleurs, il existe $i_0 \in \{1, \ldots, N\}$ tel que $\eta_{i_0}(x) \neq 0$, et donc x et y appartiennent tous deux à $\Omega_{x_{i_0}}$. De la double égalité $\eta_{i_0}(x) = \eta_{i_0}(y)$ et $\eta_{i_0}(x)\varphi_{i_0}(x) = \eta_{i_0}(y)\varphi_{i_0}(y)$, on en déduit que nécessairement $x = y$, à savoir le point (b).

Pour finir de démontrer le résultat, il reste à se souvenir qu'une immersion injective d'une variété compacte est nécessairement un plongement. $\square$

9. Existence et unicité des structures lisses

Soit M une variété topologique. Par structure lisse sur M on entend la donnée d'un atlas saturé de classe C^∞ sur M. Nous disons ici quelques mots sur l'existence et l'unicité des structures lisses. On s'intéresse donc aux deux questions suivantes:

Question 1 (existence): Une variété topologique possède-t-elle toujours une structure de variété lisse ?

Question 2 (unicité): Une structure de variété lisse est-elle unique ?

Pour ce qui est de la question 2 il convient déjà de remarquer que la terminologie doit être précisée. Etant donnée une structure lisse sur M définie par un atlas saturé $\mathcal{A}$ de classe C^∞ sur M, par unicité on peut vouloir dire que $\mathcal{A}$ est le seul atlas saturé de classe C^∞ sur M. Avec cette définition (naïve) la réponse à la question 2 est trop facilement négative. Nous en avons déjà parlé.

Par unicité, on entendra la chose suivante: *étant donnée une structure de variété lisse sur M définie par un atlas saturé $\mathcal{A}$ de classe C^∞ sur M, cette structure est unique si pour tout atlas saturé $\mathcal{A}'$ de classe C^∞ sur M, les variétés $(M, \mathcal{A})$ et $(M, \mathcal{A}')$ sont difféomorphes.*

La terminologie maintenant précisée, parlons des reponses. Celles-ci sont pour le moins surprenantes … Plus précisément:

(i) jusqu'à la dimension 3 incluse, une variété topologique possède toujours une structure lisse, et celle-ci est unique (Moïse, 1950),

(ii) dès la dimension 4, certaines variétés topologiques ne possèdent pas de structure lisse (Freedman, 1981), d'autres en possèdent plusieurs.

L'historique de ce dernier point remonte à Milnor en 1956. A la surprise générale, Milnor montrait qu'il existe sur la sphère S^7 une structure de variété lisse qui est distincte de sa structure canonique définie plus haut. On sait maintenant (après que la question ait été reprise par Kervaire et Milnor) qu'il existe 28 structures lisses distinctes sur la sphère S^7, tandis qu'il en existe 992 sur la sphère S^{11} ! (On parle de sphères exotiques ...)

Indépendamment, et peut-être plus surprenantes encore sont les conséquences des travaux développés par Donaldson et Taubes: tandis que la structure canonique de variété lisse de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est unique pour $n \neq 4$, il existe sur $\mathbb{R}^4$ une infinité de structures lisses distinctes !!!

Tout cela illustre bien l'écart structurel existant entre la classe C^0 et la classe C^∞. On se trouvera par contre dans l'incapacité d'éxhiber une différence de même nature entre la classe C^1 et la classe C^∞. C'est l'objet du résultat suivant de Whitney et dont on trouvera une preuve accessible dans l'ouvrage de Hirsch sur la topologie différentielle (Théorème 2.9, Chapitre 2).

THÉORÈME 8.9. *Soit M une variété topologique paracompacte. Soit A une C^1-atlas saturé sur M. Alors A contient un sous atlas de classe C^∞ dont le saturé est unique (à C^∞-difféomorphismes près).*

En particulier, toute structure C^1 sur une variété possède une sous structure C^∞ et il n'y a en fait pas vraiment de saut conceptuel entre la classe C^1 et la classe C^∞. Un second théorème de Whitney stipule que deux variétés lisses paracompactes qui sont C^1-difféomorphes sont aussi C^∞-difféomorphes, l'existence d'un C^1-difféomorphisme entraînant donc l'existence d'un C^∞-difféomorphisme. En conclusion, et à hypothèse de paracompacité près: homéomorphes $\not\Rightarrow$ difféomorphes (sauf en dimension inférieure ou égale à 3) mais C^1-difféomorphes $\Rightarrow$ C^∞-difféomorphes.

CHAPITRE 9

L'espace tangent

On construit la différentielle et son lieu de vie dans ce chapitre.

1. Première définitions

Soient M une variété, et x un point de M. On note $\mathcal{F}_x$ l'espace vectoriel des fonctions $f : M \to \mathbb{R}$ qui sont différentiables au point x. Si $f \in \mathcal{F}_x$, on dit que f est plate au point x si pour toute carte (Ω, φ) de M au point x, $D\big(f \circ \varphi^{-1}\big)_{\varphi(x)} \equiv 0$. On montre facilement que la nullité de $D\big(f \circ \varphi^{-1}\big)_{\varphi(x)}$ pour une carte (Ω, φ) au point x, entraîne la nullité de $D\big(f \circ \psi^{-1}\big)_{\psi(x)}$ pour toute autre carte (Ω', ψ) au point x. Pour le voir, il suffit d'écrire que

$$f \circ \psi^{-1} = \big(f \circ \varphi^{-1}\big) \circ \big(\varphi \circ \psi^{-1}\big)$$

de sorte que

$$D\big(f \circ \psi^{-1}\big)_{\psi(x)} = D\big(f \circ \varphi^{-1}\big)_{\varphi(x)} \circ D\big(\varphi \circ \psi^{-1}\big)_{\psi(x)} \ .$$

On note $\mathcal{N}_x$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{F}_x$ constitué des fonctions qui sont plates au point x.

Définition 9.1. *Soient M une variété et x un point de M. On appelle vecteur tangent à M au point x toute forme linéaire $X : \mathcal{F}_x \to \mathbb{R}$ qui s'annule sur $\mathcal{N}_x$, i.e qui est telle que $\mathcal{N}_x \subset KerX$. L'espace tangent à M au point x, noté $T_x(M)$, est l'ensemble des vecteurs tangents à M au point x.*

Soit X un vecteur tangent à M au point x, et soit f une fonction réelle définie au voisinage de x et différentiable au point x. On peut encore définir $X(f)$, même si f n'est pas définie sur tout M. Pour cela on pose $X(f) = X(\tilde{f})$, où $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ est un prolongement quelconque de f, à savoir une fonction réelle définie sur tout M qui vérifie $\tilde{f} \equiv f$ au voisinage de x. L'existence de tels prolongements ne pose aucun problème. Par ailleurs, on vérifie facilement que cette définition ne dépend pas du prolongement choisi en remarquant que si $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ sont deux prolongements de f, alors $\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1 \in \mathcal{N}_x$ de sorte que $X(\tilde{f}_1) = X(\tilde{f}_2)$.

Soient M une variété de dimension n, et x un point de M. Alors $T_x(M)$ possède une structure naturelle d'espace vectoriel réel de dimension n donnée par: $\forall X, Y \in T_x(M)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall f \in \mathcal{F}_x$,

$$\big(X + Y\big)(f) = X(f) + Y(f) \ ,$$
$$\big(\lambda X\big)(f) = \lambda X(f) \ .$$

Par convention d'Einstein on entend la convention suivante:

Convention d'Einstein: lorsque dans un produit un même indice est répété en haut et en bas, alors il est sommé.

Par exemple, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel, au lieu d'écrire $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$ on pourra écrire $x = x^i e_i$. Ou encore, si B est une forme bilinéaire sur l'espace, alors au lieu d'écrire que $B(x,y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x^i y^j$ on écrira que $B(x,y) = b_{ij} x^i y^j$.

Théorème et Définition 9.1. *Soient M une variété de dimension n, et x un point de M. Soit (Ω, φ) est une carte de M au point x de coordonnées associées $(x_1, \dots, x_n)$, et soit pour tout $i = 1, \dots, n$, $(\frac{\partial}{\partial x_i})_x$ le vecteur de $T_x(M)$ défini par: $\forall f \in \mathcal{F}_x$,*

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})_x.(f) = D_i\big(f \circ \varphi^{-1}\big)_{\varphi(x)} .$$

Alors

$$\Big((\frac{\partial}{\partial x_1})_x, \dots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_x\Big)$$

est une base de $T_x(M)$. Ainsi, $T_x(M)$ est de dimension n et

$$\forall X \in T_x(M),\ \exists! X^1, \dots, X^n \in \mathbb{R}\ /\ X = X^i(\frac{\partial}{\partial x_i})_x$$

(avec la convention d'Einstein). Les X^i sont appelés composantes de X dans la carte (Ω, φ). Pour tout $i = 1, \dots, n$, $X^i = X(\varphi^i)$.

Pour qu'il n'y ait aucune confusion possible,

$$X^i(\frac{\partial}{\partial x_i})_x = \sum_{i=1}^n X^i(\frac{\partial}{\partial x_i})_x$$

lorsque la convention d'Einstein est appliquée. Par ailleurs, une relation importante à garder à l'ésprit est la suivante:

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})_x.(\varphi^j) = \delta_i^j$$

pour tous i, j, où les δ_i^j sont les symbôles de Kroenecker.

Démonstration. On démontre la partie théorème de l'énoncé précédent. La seule chose que l'on ait à montrer est que la famille

$$\Big((\frac{\partial}{\partial x_1})_x, \dots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_x\Big)$$

est tout à la fois une famille libre et génératrice pour $T_x(M)$. On commence par montrer qu'elle est libre. Supposons que pour des $\lambda^1, \dots, \lambda^n \in \mathbb{R}$,

$$\lambda^1(\frac{\partial}{\partial x_1})_x + \cdots + \lambda^n(\frac{\partial}{\partial x_n})_x = 0 .$$

Alors pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$\Big(\lambda^1(\frac{\partial}{\partial x_1})_x + \cdots + \lambda^n(\frac{\partial}{\partial x_n})_x\Big).(\varphi^i) = 0 ,$$

et comme

$$(\frac{\partial}{\partial x_j})_x.(\varphi^i) = \delta^i_j ,$$

on obtient que $\lambda^1 = \cdots = \lambda^n = 0$. D'où le caractère libre de la famille. On montre maintenant que la famille est aussi génératrice. Pour cela on remarque que si $f \in \mathcal{F}_x$, alors

$$f - (\frac{\partial}{\partial x_i})_x(f)\varphi^i \in \mathcal{N}_x .$$

Par suite, pour tout $X \in T_x(M)$, et toute fonction $f \in \mathcal{F}_x$,

$$X(f) = (\frac{\partial}{\partial x_i})_x(f)X(\varphi^i) ,$$

de sorte que pour tout $X \in T_x(M)$,

$$X = X(\varphi^i)(\frac{\partial}{\partial x_i})_x .$$

D'où le résultat. □

Le résultat suivant donne les formules importantes de changement de cartes.

Théorème 9.1 (Changement de carte). *Soient M une variété, x un point de M, et (Ω, φ), (Ω', ψ) deux cartes de M en x de coordonnées associées $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$. Alors pour tout $i = 1, \ldots, n$,*

$$(\frac{\partial}{\partial y_i})_x = (\frac{\partial x^j}{\partial y_i})_x(\frac{\partial}{\partial x_j})_x ,$$

où $(\frac{\partial x^j}{\partial y_i})_x = (\frac{\partial}{\partial y_i})_x(\varphi^j) = D_i(\varphi^j \circ \psi^{-1})_{\psi(x)}$ et la convention d'Einstein est appliquée.

En particulier, on déduit de ce théorème, que si $X \in T_x(M)$ a pour composantes $(X^1, \ldots, X^n)$ dans la carte (Ω, φ), et $(\tilde{X}^1, \ldots, \tilde{X}^n)$ dans la carte (Ω', ψ), alors pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$X^i = (\frac{\partial x^i}{\partial y_j})_x\tilde{X}^j \text{ et } \tilde{X}^i = (\frac{\partial y^i}{\partial x_j})_x X^j ,$$

où, dans toutes ces relations, la convention d'Einstein est appliquée.

Démonstration. D'après le théorème et définition précédent,

$$(\frac{\partial}{\partial y_i})_x = \lambda^j(\frac{\partial}{\partial x_j})_x$$

avec

$$\lambda^j = (\frac{\partial}{\partial y_i})_x(\varphi^j) .$$

D'où le résultat. □

On déduit les relations suivantes en écrivant que

$$\begin{aligned} X &= \tilde{X}^j(\frac{\partial}{\partial y_j})_x \\ &= \tilde{X}^j(\frac{\partial x^i}{\partial y_j})_x(\frac{\partial}{\partial x_i})_x \\ &= X^i(\frac{\partial}{\partial x_i})_x \end{aligned}$$

de sorte que $X^i = (\frac{\partial x^i}{\partial y_j})_x \tilde{X}^j$. Pour résumer:

$$(\frac{\partial}{\partial y_i})_x = (\frac{\partial x^j}{\partial y_i})_x (\frac{\partial}{\partial x_j})_x \ , \ (\frac{\partial}{\partial x_i})_x = (\frac{\partial y^j}{\partial x_i})_x (\frac{\partial}{\partial y_j})_x$$

$$X^i = (\frac{\partial x^i}{\partial y_j})_x \tilde{X}^j \ , \ \tilde{X}^i = (\frac{\partial y^i}{\partial x_j})_x X^j \ ,$$

où $(\frac{\partial x^j}{\partial y_i})_x = D_i\big(\varphi^j \circ \psi^{-1}\big)_{\psi(x)}$, $(\frac{\partial y^j}{\partial x_i})_x = D_i\big(\psi^j \circ \varphi^{-1}\big)_{\varphi(x)}$, les X^i sont les composantes de $X \in T_x(M)$ dans (Ω, φ) et les $\tilde{X}^i$ sont les composantes de X dans (Ω', ψ). Etant donné x un point quelconque de $\mathbb{R}^n$, $T_x(\mathbb{R}^n)$ s'assimile naturellement à $\mathbb{R}^n$ par

$$X^i(\frac{\partial}{\partial x_i})_x \longrightarrow \big(X^1, \dots, X^n\big) \ ,$$

où $(x_1, \dots, x_n)$ désigne la carte canonique de $\mathbb{R}^n$. C'est la raison pour laquelle on ne voit pas apparaître la notion d'espace tangent dans le calcul différentiel sur $\mathbb{R}^n$.

2. Culture: une autre construction de l'espace tangent

Il existe une définition plus intuitive de l'espace tangent qui généralise au cas d'une variété abstraite la notion intuitive de vecteur tangent à une surface de $\mathbb{R}^3$. De façon plus précise, étant donnés M une variété et x un point de M, on note $\mathcal{C}_x$ l'ensemble des chemins différentiables passant par x, à savoir

$$\mathcal{C}_x = \{\gamma :]-\epsilon, +\epsilon[\to M \ / \ \gamma \text{ est différentiable et } \gamma(0) = x\} \ .$$

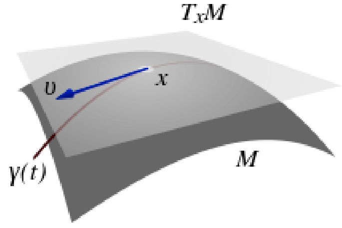
On définit alors la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{C}_x$ par: si (Ω, φ) est une carte de M en x, et si $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}_x$, alors $\gamma_1 \mathcal{R} \gamma_2$ si et seulement si

$$(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0) \ .$$

Là encore, on vérifie facilement que $\mathcal{R}$ ne dépend pas du choix de la carte.

On appelle alors vecteur tangent au point x toute classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$. Notons $\tilde{T}_x(M)$ l'espace tangent que l'on vient de définir.

On se retrouve donc avec deux espaces tangents au point x, à savoir l'espace $T_x(M)$ construit au paragraphe précédent, et l'espace $\tilde{T}_x(M)$ juste construit. En fait, on peut montrer que ces deux définitions de l'espace tangent sont équivalentes au sens où il existe une bijection canonique de $\tilde{T}_x(M)$ sur $T_x(M)$. Il s'agit de l'application $\Phi : \tilde{T}_x(M) \to T_x(M)$ qui à $[\gamma]$ associe $\Phi\big([\gamma]\big)$ défini pour tout $f \in \mathcal{F}_x$ par $\Phi\big([\gamma]\big).(f) = \big(f \circ \gamma\big)'(0)$.



Construction de l'espace tangent par les tangentes aux courbes sur la variété.

On remarquera que $\big(f \circ \gamma\big)'(0) = D\,(f \circ \varphi{-}1)_{\varphi(x)}\,.(\varphi \circ \gamma)'(0)$, ce qui permet de montrer que la construction de Φ est cohérente et que Φ ne dépend que de $[\gamma]$.

3. Le fibré tangent

Soit M une variété. Par définition, le fibré tangent de M, noté $T(M)$, est la réunion (disjointe) des espaces tangents $T_x(M)$, $x \in M$. On écrit

$$T(M) = \bigcup_{x \in M} T_x(M)\ .$$

Pour le moment, $T(M)$ n'a aucune topologie, et encore moins une structure de variété. L'objet de ce qui suit est de montrer que $T(M)$ possède une structure naturelle de variété de dimension $2n$, $n = dimM$.

Soit $\mathcal{A}$ le C^∞-atlas saturé de M. A toute carte (Ω, φ) de $\mathcal{A}$ on associe l'application

$$\Phi : \bigcup_{x \in \Omega} T_x(M) \longrightarrow \varphi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$$

qui est définie par: si $x \in \Omega$ a pour coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans (Ω, φ), et si $X \in T_x(M)$ a pour composantes $(X^1, \dots, X^n)$ dans (Ω, φ), alors

$$\Phi(X) = \big(x_1, \dots, x_n, X^1, \dots, X^n\big)\ .$$

On pourra encore écrire que pour tout $X \in T_x(M)$, avec $x \in \Omega$,

$$\Phi(X) = \big(\varphi^1(x), \dots, \varphi^n(x), X(\varphi^1), \dots, X(\varphi^n)\big)\ .$$

Il est clair que Φ réalise une bijection de

$$\bigcup_{x \in \Omega} T_x(M) \text{ sur } \varphi(\Omega) \times \mathbb{R}^n\ .$$

Par ailleurs, si (Ω, ψ) est une autre carte de M, et si

$$\Psi : \bigcup_{x \in \Omega} T_x(M) \longrightarrow \psi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$$

est l'application qui lui est associée suivant le procédé décrit ci-dessus, alors en raison du théorème de changement de base,

$$\Psi \circ \Phi^{-1}\big(x_1, \dots, x_n, X^1, \dots, X^n\big) = \big(A^1, \dots, A^n, B^1, \dots, B^n\big)\ ,$$

où pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} A^i &= \big(\psi^i \circ \varphi^{-1}\big)(x_1, \dots, x_n)\ , \\ B^i &= D_j\big(\psi^i \circ \varphi^{-1}\big)_{(x_1, \dots, x_n)} X^j\ . \end{aligned}$$

On pourra encore écrire que

$$\begin{aligned} &\Psi \circ \Phi^{-1}\left(x_1, \dots, x_n, X^1, \dots, X^n\right) \\ &= \Big(\big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)(x_1, \dots, x_n), D\big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)_{(x_1, \dots, x_n)}.\big(X^1, \dots, X^n\big)\Big)\ . \end{aligned}$$

On remarque alors que $\Psi \circ \Phi^{-1}$ réalise une bijection de $\varphi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$ sur $\psi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$ et que $\Psi \circ \Phi^{-1}$ est de classe C^∞ sur $\varphi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$. Donc $\Psi \circ \Phi^{-1}$ réalise ainsi un C^∞-difféomorphisme de $\varphi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$ sur $\psi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$. En particulier, il suit de ce qui précède, que $\Psi \circ \Phi^{-1}$ réalise un homéomorphisme de $\varphi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$ sur $\psi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$. Cela nous permet d'affirmer qu'il existe une et une seule topologie sur $T(M)$ qui est telle que:

(1) $\forall\Omega$ ouvert de M, $\displaystyle\bigcup_{x\in\Omega} T_x(M)$ est un ouvert de $T(M)$,

(2) $\forall(\Omega,\varphi)$ carte de M, $\Phi : \displaystyle\bigcup_{x\in\Omega} T_x(M) \to \varphi(\Omega)\times\mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme.

Il suffit ici de prendre pour base de topologie l'ensemble des $U \subset T(M)$ qui sont tels que:

(i) $\exists(\Omega,\varphi)$ carte de M avec $U \subset \displaystyle\bigcup_{x\in\Omega} T_x(M)$,

(ii) $\Phi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$.

Le fait que $\Psi \circ \Phi^{-1}$ soit un homéomorphisme pour (Ω,φ) et (Ω,ψ) deux cartes quelconques de M, rend cette construction cohérente. Si maintenant $T(M)$ est muni de cette topologie, on vérifie sans difficulté que

$$\left((\bigcup_{x\in\Omega} T_x(M), \Phi) \right)_{(\Omega,\varphi)\in\mathcal{A}}$$

est un atlas de classe C^∞ sur $T(M)$. Il confère à $T(M)$ la structure recherchée de variété de dimension $2n$. D'où le résultat suivant.

Théorème 9.2. *Soit M une variété de dimension n. Son fibré tangent $T(M)$ possède une structure naturelle de variété de dimension $2n$. Cette structure est déterminée par l'atlas formé des cartes*

$$(\bigcup_{x\in\Omega} T_x(M), \Phi)$$

construites ci-dessus.

C'est désormais à cette structure de variété que l'on fera référence. On notera

$$\Pi : T(M) \to M$$

la projection canonique qui à $X \in T_x(M)$ associe $\Pi(X) = x$. On remarque que Π est une submersion, puisque pour toute carte (Ω,φ) de M,

$$\varphi \circ \Pi \circ \Phi^{-1}(x_1,\ldots,x_n,X^1,\ldots,X^n) = (x_1,\ldots,x_n)\ ,$$

où $\left(\bigcup_{x\in\Omega} T_x(M), \Phi\right)$ est la carte de $T(M)$ associée à (Ω,φ). A titre de remarque: partant d'une variété M de classe C^k et de dimension n, $T(M)$ récupère une structure naturelle de variété de classe C^{k-1} et de dimension $2n$.

4. L'application linéaire tangente

On construit la différentielle dans ce chapitre.

Définition 9.2. *Soient M et N deux variétés, x un point de M, et $f : M \to N$ une application différentiable au point x. Par définition, l'application linéaire tangente de f au point x, notée $f_\star(x)$, est l'application linéaire*

$$f_\star(x) : T_x(M) \longrightarrow T_{f(x)}(N)$$

qui à $X \in T_x(M)$ associe $f_\star(x).X \in T_{f(x)}(N)$ défini par

$$(f_\star(x).X)\,.(g) = X\,(g \circ f)$$

pour toute fonction $g : N \to \mathbb{R}$ *qui est différentiable au point* $f(x)$*. Si maintenant* $f : M \to N$ *est supposée différentiable sur* M*, l'application linéaire tangente de* f*, notée* $f_\star$*, est l'application* $f_\star : T(M) \longrightarrow T(N)$ *qui à* $X \in T_x(M)$ *associe* $f_\star(x).X$*.*

Notons dans ce qui suit m la dimension de M, et n la dimension de N. Soit de plus $f : M \to N$ une application différentiable en un point x de M, et soient (Ω, φ), (Ω', ψ) deux cartes de M et N respectivement en x et $f(x)$, et telles que $f(\Omega) \subset \Omega'$. On note $(x_1, \dots, x_m)$ les coordonnées associées à (Ω, φ), et $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées associées à (Ω', ψ). La matrice de $f_\star(x)$ dans les bases

$$\left\{ (\frac{\partial}{\partial x_i})_x \right\}_{i=1,\dots,m} \text{ et } \left\{ (\frac{\partial}{\partial y_i})_{f(x)} \right\}_{i=1,\dots,n}$$

de $T_x(M)$ et $T_{f(x)}(N)$ s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} (\frac{\partial f^1}{\partial x_1})_x & \dots & (\frac{\partial f^1}{\partial x_m})_x \\ \vdots & & \vdots \\ (\frac{\partial f^n}{\partial x_1})_x & \dots & (\frac{\partial f^n}{\partial x_m})_x \end{pmatrix}$$

où

$$(\frac{\partial f^j}{\partial x_i})_x = D_i \left(\psi^j \circ f \circ \varphi^{-1} \right)_{\varphi(x)} \ .$$

Les colonnes de cette matrice sont en effet constituées des coordonnées des $f_\star(x).(\frac{\partial}{\partial x_i})_x$ dans la base des $\left\{ (\frac{\partial}{\partial y_i})_{f(x)} \right\}_{i=1,\dots,n}$, et donc des

$$\begin{aligned} \left(f_\star(x).(\frac{\partial}{\partial x_i})_x \right).(\psi^j) &= (\frac{\partial}{\partial x_i})_x.(\psi^j \circ f) \\ &= D_i \left(\psi^j \circ f \circ \varphi^{-1} \right)_{\varphi(x)} \ . \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la matrice jacobienne de la lecture de f dans les cartes (Ω, φ) et (Ω', ψ). En d'autres termes, $f_\star(x)$ tient, dans le contexte des variétés, le role qui était tenu par la différentielle au point x dans le contexte euclidien. Le résultat suivant est une conséquence immédiate de l'égalité des matrices dont on vient de parler.

PROPOSITION 9.1. *Si* $f : M \to N$ *est différentiable au point* x*,* $Rg(f)_x = Rg\,(f_\star(x))$*.*

On aborde maintenant le résultat suivant.

THÉORÈME 9.3. *Soient* M_1*,* M_2*,* M_3 *trois variétés,* x *un point de* M_1*,* $f : M_1 \to M_2$ *une application différentiable au point* x *et* $g : M_2 \to M_3$ *une application différentiable au point* $f(x)$*. On a alors que* $(g \circ f)_\star (x) = g_\star (f(x)) \circ f_\star(x)$*.*

DÉMONSTRATION. Pour tout $X \in T_x(M_1)$ et toute fonction $h : M_3 \to \mathbb{R}$ différentiable au point $g(f(x))$,

$$((g \circ f)_\star (x).X).(h) = X (h \circ g \circ f) \ ,$$

tandis que

$$((g_\star (f(x)) \circ f_\star(x)).X).(h) \ = \ (f_\star(x).X).(h \circ g) \ = \ X (h \circ g \circ f) \ .$$

D'où le résultat. ☐

Notations: (1) Si M est une variété, et si $f : M \to \mathbb{R}$ est différentiable en un point x de M, on note $df(x)$ la forme linéaire sur $T_x(M)$ qui à $X \in T_x(M)$ associe

$$df(x).X = X(f) \ .$$

C'est tout simplement l'application $f_\star(x)$ après assimilation de $T_{f(x)}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$.

(2) Si M est une variété de dimension n, si x est un point de M, si (Ω, φ) est une carte de M en x de coordonnées associées $(x_1, \ldots, x_n)$ et si $f : M \to \mathbb{R}$ est différentiable au point x, on note

$$(\frac{\partial f}{\partial x_i})_x = D_i \left(f \circ \varphi^{-1}\right)_{\varphi(x)}$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$.

5. Champs de vecteurs

On traite maintenant de la notion de champs de vecteurs.

Définition 9.3. *Soit M une variété. On note $\Pi : T(M) \to M$ la projection canonique qui à $X \in T_x(M)$ associe $\Pi(X) = x$. Un champ de vecteurs sur M est alors une application $X : M \to T(M)$ qui vérifie $\Pi \circ X = Id_M$. Le champ est dit de classe C^k si $X : M \to T(M)$ est de classe C^k en tant qu'application de la variété M dans la variété $T(M)$.*

Soient $X : M \to T(M)$ un champ de vecteurs sur M, et (Ω, φ) une carte de M. On appelle fonctions composantes (ou tout simplement composantes) de X dans (Ω, φ) les fonctions $X^i : \Omega \to \mathbb{R}$ définies en tout point $x \in \Omega$ par

$$X(x) = X^i(x)(\frac{\partial}{\partial x_i})_x \ ,$$

où les x_i sont les coordonnées associées à (Ω, φ). Donc, pour tout i, $X^i(x) = X(x).(\varphi^i)$.

Proposition 9.2. *Etant donnée (Ω, φ) une carte de M, X est de classe C^k sur Ω si et seulement si les fonctions composantes de X dans (Ω, φ) sont de classe C^k sur Ω.*

Pour démontrer la proposition il suffit de considérer la carte de $T(M)$ qui est associée à (Ω, φ), et de lire X dans cette carte.

Définition 9.4. *Soient M une variété de dimension n, et X, Y deux champs de vecteurs sur M de classe C^k. Le crochet des champs X et Y, noté $[X, Y]$, est le champ de vecteurs de clase C^{k-1} sur M dont l'expression dans une carte (Ω, φ) de M est donnée par:*

$$[X, Y](x) = \left(X^j(x)(\frac{\partial Y^i}{\partial x_j})_x - Y^j(x)(\frac{\partial X^i}{\partial x_j})_x\right) \ (\frac{\partial}{\partial x_i})_x \ ,$$

où les X^i et Y^i désignent les fonctions comoposantes de X et Y dans (Ω, φ), et où les x_i sont les coordonnées associées à (Ω, φ).

La construction fait sens en raison du résultat suivant.

Proposition 9.3. *La définition du crochet $[X, Y]$ ne dépend pas du choix de la carte.*

DÉMONSTRATION. Soient $x \in M$ et $(\Omega, \varphi), (\Omega', \psi)$ deux cartes de M en x. On note x_i les coordonnées associées à (Ω, φ) et y_i les coordonnées associées à (Ω', ψ). Soient aussi X^i, Y^i les composantes de X et Y dans (Ω, φ) et $\tilde{X}^i, \tilde{Y}^i$ les composantes de X et Y dans (Ω', ψ). On écrit que

$$(\frac{\partial \tilde{Y}^i}{\partial y_j})_x = (\frac{\partial x^\alpha}{\partial y_j})_x(\frac{\partial \tilde{Y}^i}{\partial x_\alpha})_x$$

puisque $(\frac{\partial}{\partial y_j})_x = (\frac{\partial x^\alpha}{\partial y_j})_x(\frac{\partial}{\partial x_\alpha})_x$. On écrit ensuite que

$$\tilde{Y}^i = Y^\beta(\frac{\partial y^i}{\partial x_\beta}) \ ,$$

et nous avons là une égalité entre fonctions. Par suite

$$(\frac{\partial \tilde{Y}^i}{\partial x_\alpha})_x = (\frac{\partial Y^\beta}{\partial x_\alpha})_x(\frac{\partial y^i}{\partial x_\beta})_x + Y^\beta(x)(\frac{\partial^2 y^i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta})_x \ ,$$

où

$$(\frac{\partial^2 y^i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta})_x = D^2_{\alpha\beta}\left(\psi^i \circ \varphi^{-1}\right)_{\varphi(x)} \ .$$

Ainsi, puisque $\tilde{X}^j(x) = (\frac{\partial y^j}{\partial x_\gamma})_x X^\gamma(x)$,

$$\begin{aligned}&\tilde{X}^j(x)(\frac{\partial \tilde{Y}^i}{\partial y_j})_x\\ &= (\frac{\partial y^j}{\partial x_\gamma})_x X^\gamma(x)(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y_j})_x\left((\frac{\partial Y^\beta}{\partial x_\alpha})_x(\frac{\partial y^i}{\partial x_\beta})_x + Y^\beta(x)(\frac{\partial^2 y^i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta})_x\right)\end{aligned}$$

Or

$$(\frac{\partial y^j}{\partial x_\gamma})_x(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y_j})_x = (\frac{\partial x^\alpha}{\partial x_\gamma})_x = \delta^\alpha_\gamma \ ,$$

et donc

$$\begin{aligned}&\tilde{X}^j(x)(\frac{\partial \tilde{Y}^i}{\partial y_j})_x\\ &= X^\alpha(x)(\frac{\partial Y^\beta}{\partial x_\alpha})_x(\frac{\partial y^i}{\partial x_\beta})_x + (\frac{\partial^2 y^i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta})_x X^\alpha(x)Y^\beta(x)\end{aligned}$$

Par symétrie en X et Y, et puisque les $(\frac{\partial^2 y^i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta})_x$ sont symétriques en α et β, on en déduit que

$$\begin{aligned}&\tilde{X}^j(x)(\frac{\partial \tilde{Y}^i}{\partial y_j})_x - \tilde{Y}^j(x)(\frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial y_j})_x\\ &= X^\alpha(x)(\frac{\partial Y^\beta}{\partial x_\alpha})_x(\frac{\partial y^i}{\partial x_\beta})_x + (\frac{\partial^2 y^i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta})_x X^\alpha(x)Y^\beta(x)\\ &- Y^\alpha(x)(\frac{\partial X^\beta}{\partial x_\alpha})_x(\frac{\partial y^i}{\partial x_\beta})_x - (\frac{\partial^2 y^i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta})_x Y^\alpha(x)X^\beta(x)\\ &= \left(X^\alpha(x)(\frac{\partial Y^\beta}{\partial x_\alpha})_x - Y^\alpha(x)(\frac{\partial X^\beta}{\partial x_\alpha})_x\right)(\frac{\partial y^i}{\partial x_\beta})_x\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
&\left(\tilde{X}^j(x)(\frac{\partial \tilde{Y}^i}{\partial y_j})_x - \tilde{Y}^j(x)(\frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial y_j})_x\right)(\frac{\partial}{\partial y_i})_x \\
&= \left(\left(X^\alpha(x)(\frac{\partial Y^\beta}{\partial x_\alpha})_x - Y^\alpha(x)(\frac{\partial X^\beta}{\partial x_\alpha})_x\right)(\frac{\partial y^i}{\partial x_\beta})_x\right)(\frac{\partial x^\gamma}{\partial y_i})_x(\frac{\partial}{\partial x_\gamma})_x \\
&= \left(X^\alpha(x)(\frac{\partial Y^\beta}{\partial x_\alpha})_x - Y^\alpha(x)(\frac{\partial X^\beta}{\partial x_\alpha})_x\right)(\frac{\partial}{\partial x_\beta})_x
\end{aligned}$$

puisque

$$(\frac{\partial y^i}{\partial x_\beta})_x(\frac{\partial x^\gamma}{\partial y_i})_x = (\frac{\partial x^\gamma}{\partial x_\beta})_x = \delta_\beta^\gamma \ .$$

D'où la proposition. □

Le calcul ci-dessus s'évite, et la preuve se simplifie, en remarquant que pour toute fonction $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^2, et tout $x \in M$,

$$[X, Y](x).(f) = X(x).\big(Y(f)\big) - Y(x).\big(X(f)\big) \ ,$$

où $X(f)$ et $Y(f)$ désignent les fonctions de M dans $\mathbb{R}$ qui sont définies par les équations $\big(X(f)\big)(x) = X(x).(f)$ et $\big(Y(f)\big)(x) = Y(x).(f)$ pour tout $x \in M$.

6. L'espace tangent d'une sous variété

Soient M une variété de dimension n, N une sous variété de M de dimension q, et $i : N \to M$ l'injection canonique définie par $i(x) = x$. On vérifie facilement que pour tout x de N, $i_\star(x)$ réalise un isomorphisme de $T_x(N)$ sur un sous espace vectoriel de dimension q de $T_x(M)$. Pour le voir, on sait que i est un plongement, et on utilise le fait que

$$\mathrm{Rg}\big(i\big)_x = \mathrm{Rg}\big(i_\star(x)\big) \ .$$

Donc $i_\star(x)$ est une application linéaire injective. Elle devient un isomorphisme de $T_x(N)$ sur son image $i_\star(x).\big(T_x(N)\big)$. Par suite, $T_x(N)$ s'assimile canoniquement à un sous espace vectoriel de $T_x(M)$, à savoir $i_\star(x).\big(T_x(N)\big)$. On vérifie facilement que si (Ω, φ) est une carte de M en x adaptée à N, de coordonnées associées $(x_1, \dots, x_n)$, alors $T_x(N)$, après assimilation à un sous espace de $T_x(M)$, est le sous espace de $T_x(M)$ de base les $\{(\frac{\partial}{\partial x_i})_x\}_{i=1,\dots,q}$. On démontre ici le résultat suivant.

Théorème 9.4. *Soient M, M' deux variétés, $f : M \to M'$ une application de classe C^∞, et y_0 un point de $f(M)$. On suppose que $\forall x \in f^{-1}(y_0)$, $Rg(f)_x = dim M'$. Alors $N = f^{-1}(y_0)$ est une sous variété de M, et pour tout x de N,*

$$T_x(N) = Ker f_\star(x)$$

après assimilation de $T_x(N)$ à un sous espace de $T_x(M)$.

Démonstration. Soit $i : N \to M$ l'injection canonique. On veut montrer que pour tout x de N,

$$i_\star(x).\big(T_x(N)\big) = Ker f_\star(x) \ .$$

Sachant que pour tout x de N, $\mathrm{Rg}\big(f\big)_x = \mathrm{Rg}\big(f_\star(x)\big) = \dim M'$, on tire du théorème du rang que

$$dim Ker f_\star(x) = \dim M - \dim M' \ .$$

Par ailleurs, on sait que $\dim N = \dim M - \dim M'$, et donc

$$\dim\Big(i_\star(x).\big(T_x(N)\big)\Big) = \dim Ker f_\star(x)$$

pour tout x de N. Reste donc à montrer que pour tout $x \in N$,

$$i_\star(x).\big(T_x(N)\big) \subset Ker f_\star(x)\ .$$

Soit x un point de N. Pour tout $X \in T_x(N)$, et toute fonction $h : M' \to \mathbb{R}$ différentiable au point $y_0 = f(x)$, on a

$$\Big(f_\star(x).\big(i_\star(x).X\big)\Big).(h) = X\big(h \circ f \circ i\big)\ .$$

Or, pour tout $\tilde{x} \in N$, $h \circ f \circ i(\tilde{x}) = h(y_0) = \text{Cte}$, et donc

$$\Big(f_\star(x).\big(i_\star(x).X\big)\Big).(h) = 0$$

pour tout $X \in T_x(N)$ et toute fonction $h : M' \to \mathbb{R}$ différentiable au point y_0. Il s'ensuit que

$$i_\star(x).\big(T_x(N)\big) \subset Ker f_\star(x)\ .$$

D'où le résultat. □

CHAPITRE 10

Calcul tensoriel et connexions linéaires

La calcul trensoriel et la notion de dérivation covariante, attachée à la notion de connexion linéaire, permettent de retrouver une chaine de dérivation pour les dérivées d'ordre supérieur.

1. Le fibré cotangent

Soit M une variété de dimension n, x un point de M, et (Ω, φ) une carte de M au point x de coordonnées associées $(x_1, \ldots, x_n)$. On note $T_x(M)^\star$ l'espace dual de $T_x(M)$, à savoir

$$T_x(M)^\star = L\big(T_x(M), \mathbb{R}\big) \ ,$$

et pour tout $i = 1, \ldots, n$, on note dx_x^i la forme de $T_x(M)^\star$ définie par: $\forall j = 1, \ldots, n$,

$$dx_x^i.\big(\frac{\partial}{\partial x_j}\big)_x = \delta_i^j \ ,$$

où $\delta_i^j = 1$ si $i = j$, et $\delta_i^j = 0$ sinon.

Proposition 10.1. *La famille* $\big\{dx_x^i\big\}_{i=1,\ldots,n}$ *est une base de* $T_x(M)^\star$.

Démonstration. On montre que la famille est libre. Si pour λ_i, $i = 1, \ldots, n$, des réels, $\lambda_i dx_x^i = 0$, alors pour tout $j = 1, \ldots, n$,

$$\big(\lambda_i dx_x^i\big).\big(\frac{\partial}{\partial x_j}\big)_x = 0$$

et ainsi $\lambda_j = 0$ pour tout j. D'où le caractère libre de la famille. On montre maintenant que la famille est génératrice. Pour cela, il suffit de vérifier que pour tout $\eta \in T_x(M)^\star$,

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} \eta\big((\frac{\partial}{\partial x_i})_x\big) dx_x^i$$

ce qui se fait facilement (le membre de gauche et le membre de droite sont deux formes linéaires qui coïncident sur la base des $(\frac{\partial}{\partial x_i})_x$, donc partout). D'où la proposition. $\square$

On remarquera que pour tout i, $dx_x^i = d\varphi^i(x)$ où $d\varphi^i(x)$ est la différentielle de φ^i au point x. D'après cette proposition, tout $\eta \in T_x(M)^\star$ s'écrit $\eta = \eta_i dx_x^i$. Les η_i sont appelés composantes de η dans la carte (Ω, φ). On notera la "symétrie" des formules ci-dessous avec celles correspondantes pour les vecteurs.

Théorème 10.1 (Changement de carte). *Soient M une variété de dimension n, x un point de M, et (Ω, φ), (Ω', ψ) deux cartes de M en x de coordonnées* *associées* $(x_1,\dots,x_n)$ *et* $(y_1,\dots,y_n)$*. Alors pour tout* $i=1,\dots,n$,

$$dy^i_x = \big(\frac{\partial y^i}{\partial x_j}\big)_x dx^j_x \text{ et } dx^i_x = \big(\frac{\partial x^i}{\partial y_j}\big)_x dy^j_x \ .$$

En particulier, si η *a pour composantes* $(\eta_1,\dots,\eta_n)$ *dans la carte* (Ω,φ)*, et* $(\tilde\eta_1,\dots,\tilde\eta_n)$ *dans la carte* (Ω',ψ)*, alors*

$$\eta_i = \big(\frac{\partial y^j}{\partial x_i}\big)_x \tilde\eta_j \text{ et } \tilde\eta_i = \big(\frac{\partial x^j}{\partial y_i}\big)_x \eta_j$$

pour tout $i=1,\dots,n$.

Démonstration. On sait que pour tout $i=1,\dots,n$,

$$\big(\frac{\partial}{\partial y_i}\big)_x = \big(\frac{\partial x^j}{\partial y_i}\big)_x \big(\frac{\partial}{\partial x_j}\big)_x \ ,$$

tandis que d'après ce qui a été dit un peu plus tôt,

$$dx^i_x = \sum_{j=1}^n dx^i_x.\big(\frac{\partial}{\partial y_j}\big)_x dy^j_x \ .$$

De la première de ces relations, on tire que

$$\begin{aligned} dx^i_x.\big(\frac{\partial}{\partial y_j}\big)_x &= \big(\frac{\partial x^k}{\partial y_j}\big)_x dx^i_x.\big(\frac{\partial}{\partial x_k}\big)_x \\ &= \big(\frac{\partial x^i}{\partial y_j}\big)_x \ . \end{aligned}$$

Par suite, et pour tout $i=1,\dots,n$,

$$dx^i_x = \big(\frac{\partial x^i}{\partial y_j}\big)_x dy^j_x \ .$$

Par symétrie, il s'ensuit que pour tout $i=1,\dots,n$,

$$dy^i_x = \big(\frac{\partial y^i}{\partial x_j}\big)_x dx^j_x \ ,$$

et la première partie du théorème est démontrée. Pour ce qui est de la seconde, soit $\eta\in T_x(M)^\star$ de composantes $(\eta_1,\dots,\eta_n)$ dans la carte (Ω,φ), et $(\tilde\eta_1,\dots,\tilde\eta_n)$ dans la carte (Ω',ψ). On écrit que

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_i dx^i_x \\ &= \eta_i\big(\frac{\partial x^i}{\partial y_j}\big)_x dy^j_x \\ &= \tilde\eta_j dy^j_x \end{aligned}$$

de sorte que pour tout $j=1,\dots,n$,

$$\tilde\eta_j = \big(\frac{\partial x^i}{\partial y_j}\big)_x \eta_i \ ,$$

ce qui constitue une des relations qu'il nous fallait démontrer. Par symétrie, on obtient l'autre relation. D'où le théorème. $\square$

On définit maintenant le fibré cotangent $T^\star(M)$ de M. Par définition, il s'agit de la réunion (disjointe) des $T_x(M)^\star$, $x \in M$. On écrit que

$$T^\star(M) = \bigcup_{x\in M} T_x(M)^\star \ .$$

Si $\mathcal{A}$ désigne l'atlas saturé de M, à toute carte (Ω, φ) de $\mathcal{A}$ on associe l'application

$$\Phi : \bigcup_{x\in\Omega} T_x(M)^\star \longrightarrow \varphi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$$

qui à $\eta \in T_x(M)^\star$, $x \in \Omega$, associe

$$\Phi(\eta) = \big(x_1, \ldots, x_n, \eta_1, \ldots, \eta_n\big) \ ,$$

où les x_i sont les coordonnées de x dans (Ω, φ), et les η_i sont les composantes de η dans (Ω, φ). En procédant comme dans le cas du fibré tangent, on montre facilement:

(1) qu'il existe une et une seule topologie sur $T^\star(M)$ pour laquelle:

(i) pour tout ouvert Ω de M, $\displaystyle\bigcup_{x\in\Omega} T_x(M)^\star$ est un ouvert de $T^\star(M)$,

(ii) pour toute carte (Ω, φ) de $\mathcal{A}$, l'application Φ construite ci-dessus est un homéomorphisme de $\displaystyle\bigcup_{x\in\Omega} T_x(M)^\star$ sur $\varphi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$,

(2) que si $T^\star(M)$ est muni de cette topologie, l'ensemble des

$$\Big(\bigcup_{x\in\Omega} T_x(M)^\star, \Phi\Big)_{(\Omega,\varphi)\in\mathcal{A}}$$

est un atlas de classe C^∞ sur $T^\star(M)$ (formules de changement de cartes).

D'où le résultat suivant.

Théorème 10.2. *Soit M une variété de dimension n. Son fibré cotangent $T^\star(M)$ possède une structure naturelle de variété de dimension $2n$, donnée par les cartes construites ci-dessus.*

C'est désormais à cette structure que nous ferons référence. On note $\Pi : T^\star(M) \to M$ la projection canonique qui à $\eta \in T_x(M)^\star$ associe $\Pi(\eta) = x$. Comme dans le cas du fibré tangent il s'agit d'une submersion.

Les applications Φ du fibré tangent comme du fibré cotangent sont construites sur le même modèle:

$$\begin{aligned}&\Phi(\text{objet})\\ &= (\text{coordonnées de } x, \text{composantes de l'objet}) \ ,\end{aligned}$$

i.e. (coordonnées de x, composantes de X) pour le fibré tangent et, pour ce qui est du fibré cotangent, (coordonnées de x, composantes de η).

Etant donnée M une variété, on appelle 1-forme sur M toute application $\eta : M \to T^\star(M)$ qui vérifie $\Pi \circ \eta = Id_M$, i.e qui est telle que pour tout $x \in M$, $\eta(x) \in T_x(M)^\star$. On dira alors que η est de classe C^k si elle est de classe C^k en tant qu'application de la variété M dans la variété $T^\star(M)$. Si maintenant (Ω, φ) est une carte de M de coordonnées associées $(x_1, \ldots, x_n)$, et si η est une 1-forme sur M, on appelle fonctions composantes (ou tout simplement composantes) de η dans (Ω, φ) les fonctions $\eta_i : \Omega \to \mathbb{R}$ définies en tout point x de Ω par la relation

$$\eta(x) = \eta_i(x) dx_x^i \ .$$

Par suite, et pour tout i et tout x dans Ω, $\eta_i(x) = \eta(x).\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x$.

PROPOSITION 10.2. *Une 1-forme η est de classe C^k sur l'ouvert Ω d'une carte (Ω, φ) de M si et seulement si ses fonctions composantes dans (Ω, φ) sont de classe C^k sur Ω.*

La démonstration de cette proposition est immédiate en raison de la structure placée sur $T^\star(M)$.

2. Eléments de calcul tensoriel

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $E^\star$ son espace dual, i.e $E^\star = L(E, \mathbb{R})$. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, on définit pour tout $i = 1, \ldots, n$ l'élément $e^{i\star}$ de $E^\star$ par: $\forall j = 1, \ldots, n$,

$$e^{i\star}(e_j) = \delta^i_j \ .$$

Alors $(e^{1\star}, \ldots, e^{n\star})$ est une base de $E^\star$, appelée base duale de la base $(e_1, \ldots, e_n)$. La preuve de cette assertion est ici identique à celle que nous avons effectuée pour montrer que les dx_x^i formaient une base de $T_x(M)^\star$.

PROPOSITION 10.3. *L'application φ de E dans $E^{\star\star} = L(E^\star, \mathbb{R})$ définie par: $\forall u \in E$, $\forall \theta \in E^\star$,*

$$\varphi(u).(\theta) = \theta(u)$$

est un isomorphisme de E sur $E^{\star\star}$. En particulier, l'espace vectoriel $E^{\star\star}$ s'assimile naturellement à E.

DÉMONSTRATION. Il est clair que φ est linéaire. Comme par ailleurs $dimE = dimE^{\star\star}$, il nous suffit de montrer que φ est injective. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si pour deux vecteurs u et v de E, $\varphi(u) = \varphi(v)$, alors en particulier, pour tout i,

$$e^{i\star}(u) = e^{i\star}(v) \ .$$

Or, on le constate facilement, les $e^{i\star}(u)$ et $e^{i\star}(v)$ sont les coordonnées de u et v dans $(e_1, \ldots, e_n)$. Il s'ensuit que si $\varphi(u) = \varphi(v)$, alors $u = v$. D'où le résultat. $\square$

Concrètement, l'assimilation de $E^{\star\star}$ avec E consiste à regarder un vecteur u de E comme l'élément de $E^{\star\star}$ défini par: $u(\eta) = \eta(u)$ pour tout $\eta \in E^\star$.

DÉFINITION 10.1 (Produit tensoriel 1). *Soient $(E_i)_{i=1,\ldots,N}$ N $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et soient $\theta_i \in E_i^\star$, $i = 1, \ldots, N$, N formes linéaires. Alors $\theta_1 \otimes \cdots \otimes \theta_N$ est la forme N-linéaire sur $E_1 \times \cdots \times E_N$ définie par: $\forall (u_1, \ldots, u_N) \in E_1 \times \cdots \times E_N$,*

$$\big(\theta_1 \otimes \cdots \otimes \theta_N\big).(u_1, \ldots, u_N) = \prod_{i=1}^N \theta_i(u_i) \ .$$

Ici, $\theta_1 \otimes \theta_2$ se lit θ_1 "tensoriel" θ_2.

Etant donnés des entiers p et q, on appelle variance de type (p, q) tout $(p+q)$-uplet v composé de p symboles $\star$ et q symboles $-$. La longueur de la variance est alors l'entier $|v| = p + q$. Par exemple $v = (\star \star - \star)$ est une variance de type $(3, 1)$, tandis que $v = (- \star \star - \star \star -)$ est une variance de type $(4, 3)$.

Définition 10.2 (Définition des tenseurs). *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Un tenseur sur E de variance $v = (-\star-\star\star-\star\dots)$ est une forme $|v|$-linéaire sur*

$$E^\star \times E \times E^\star \times E \times E \times E^\star \times E \times \dots$$

(Les $-$ deviennent des $\star$, les $\star$ deviennent des $-$). Si v est de type (p,q), un tel tenseur est dit p-fois covariant, q-fois contravariant, et ordonné suivant la variance v. L'espace de ces tenseurs est noté $\overset{(v)}{\otimes}(E)$. Par convention, cet espace vaut $\mathbb{R}$ si la variance v est vide.

A titre d'exemples: (1) Une forme linéaire sur E est un tenseur 1-fois covariant et 0-fois contravariant, i.e de variance $v = (\star)$.

(2) Un vecteur sur E (via l'assimilation de E à $E^{\star\star}$) est un tenseur 1-fois contravariant et 0-fois covariant, i.e de variance $v = (-)$.

Définition 10.3 (Produit tensoriel 2). *Si T et $\tilde{T}$ sont deux tenseurs sur E de variances respectives $v = (-\star-\star\star-\star\dots)$ et $\tilde{v} = (\star-\star-\star\dots)$, alors $T \otimes \tilde{T}$ (lire T "tensoriel $\tilde{T}$) est le tenseur sur E de variance*

$$v\tilde{v} = (-\star-\star\star-\star\cdots\star-\star-\star\dots)$$

défini par: pour tout $X \in E^\star \times E \times E^\star \times E \times E \times E^\star \times E \times \dots$ et tout $Y \in E \times E^\star \times E \times E^\star \times E \times \dots$, $\big(T \otimes \tilde{T}\big).(X,Y) = T(X)\tilde{T}(Y)$.

On vérifie facilement ici que le produit tensoriel $\otimes$ est: **(1)** associatif: $T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3) = (T_1 \otimes T_2) \otimes T_3$, **(2)** distributif (sur $+$): $T_1 \otimes (T_2 + T_3) = T_1 \otimes T_2 + T_1 \otimes T_3$, où dans (2), T_2 et T_3 sont deux tenseurs de même variance.

Théorème 10.3. *Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et soit $v = (-\star-\star\star\dots)$ une variance. Alors $\overset{(v)}{\otimes}(E)$ admet pour base les*

$$e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k \otimes e^{l\star} \otimes e^{m\star} \otimes \dots$$

pour $i,j,k,l,m,\dots = 1,\dots,n$, où E est assimilé à $E^{\star\star}$ de sorte que pour tout $i = 1,\dots,n$ et tout $\theta \in E^\star$, $e_i(\theta) = \theta(e_i)$. Les coordonnées ${T^i}_j{}^k{}_{lm}\dots$ d'un tenseur $T \in \overset{(v)}{\otimes}(E)$ dans cette base sont appelées composantes de T dans $(e_1,\dots,e_n)$.

Démonstration. Supposons pour simplifier que $v = (-\star-)$. On veut montrer que les $(e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k)_{i,j,k=1,\dots,n}$ forment une base de $\overset{(v)}{\otimes}(E)$. On commence par montrer que cette famille est libre. Si pour des réels ${\lambda^i}_j{}^k$,

$${\lambda^i}_j{}^k e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k = 0$$

alors pour tout i_0, tout j_0, et tout k_0,

$$\Big({\lambda^i}_j{}^k e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k\Big).\big(e^{i_0\star}, e_{j_0}, e^{k_0\star}\big) = 0 \ .$$

Or

$$\Big({\lambda^i}_j{}^k e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k\Big).\big(e^{i_0\star}, e_{j_0}, e^{k_0\star}\big) = {\lambda^{i_0}}_{j_0}{}^{k_0} \ .$$

D'où le caractère libre de la famille. On montre maintenant que la famille est génératrice. Soit donc T un tenseur de $\overset{(v)}{\otimes}(E)$. On pose

$${T^i}_j{}^k = T\big(e^{i\star}, e_j, e^{k\star}\big) \ .$$

Alors pour tout $\theta = \theta_i e^{i\star} \in E^\star$, tout $u = u^i e_i \in E$, et tout $\tilde\theta = \tilde\theta_i e^{i\star} \in E^\star$,

$$\begin{aligned} T\big(\theta, u, \tilde\theta\big) &= \theta_i u^j \tilde\theta_k T\big(e^{i\star}, e_j, e^{k\star}\big) \\ &= T^i{}_j{}^k \theta_i u^j \tilde\theta_k \\ &= \big(T^i{}_j{}^k e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k\big).(\theta, u, \tilde\theta) \ . \end{aligned}$$

D'où le théorème. □

La proposition suivante a lieu. Sa preuve est immédiate.

PROPOSITION 10.4. *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soient T et $\tilde T$ deux tenseurs sur E. Alors les composantes de $T \otimes \tilde T$ dans $(e_1, \ldots, e_n)$ sont le produit des composantes de T dans $(e_1, \ldots, e_n)$ et des composantes de $\tilde T$ dans $(e_1, \ldots, e_n)$.*

A titre d'exemple, si $T = T^i{}_j{}^k e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k$ et $\tilde T = \tilde T^l{}_m e_l \otimes e^{m\star}$, alors

$$T \otimes \tilde T = T^i{}_j{}^k \tilde T^l{}_m e_i \otimes e^{l\star} \otimes e_k \otimes e_l \otimes e^{m\star} \ .$$

On énonce maintenant quelques conventions importantes.

Convention 1: Une variance est dite ordonnée si elle est du type $(\star \cdots \star - \cdots -)$, i.e si les symboles $\star$ sont placés en tête de la variance, et les symboles $-$ en queue de la variance. Par tenseur p-fois covariant et q-fois contravariant (sans précision de variance) on entend un tenseur dont la variance est ordonnée.

Convention 2: Dans l'écriture des composantes d'un tenseur dans une base, et afin de pouvoir appliquer la convention d'Einstein, on place toujours les **indices de covariance en bas** et les **indices de contravariance en haut**.

Les indices de covariance sont les indices des formes (i.e. les η_i) tandis que les indices contravariants sont les indices des vecteurs (i.e. les X^i).

Dans une expression du type $T_i{}^j{}_k{}^{lm}$, les indices i, k sont les indices de covariance tandis que les indices j, l, m sont les indices de contravariance. Le tenseur T qui a les $T_i{}^j{}_k{}^{lm}$ comme composantes est un tenseur 2-fois covariant et 3-fois contravariant, et ordonné suivant la variance $v = (\star - \star - -)$.

THÉORÈME 10.4 (Changement de base). *Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(\tilde e_1, \ldots, \tilde e_n)$ deux bases de E. On note (a_i^j) et (b_j^i) les matrices de passage définies pour tout $i = 1, \ldots, n$ par*

$$e_i = a_i^j \tilde e_j \ \text{ et } e^{i\star} = b_j^i \tilde e^{j\star} \ .$$

(Pour tous $i, j = 1, \ldots, n$, $a_i^k b_k^j = \delta_i^j$ de sorte que l'une est l'inverse de l'autre). Soit $v = (- \star - \star\star \ldots)$ une variance, soit $T \in \overset{(v)}{\otimes}(E)$, et soient

$$T^i{}_j{}^k{}_{lm} \cdots \ \text{ et } \tilde T^i{}_j{}^k{}_{lm} \cdots$$

les composantes de T dans $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(\tilde e_1, \ldots, \tilde e_n)$. Alors

$$\tilde T^i{}_j{}^k{}_{lm} \cdots = T^\alpha{}_\beta{}^\gamma{}_{\delta\epsilon} \ldots a_\alpha^i b_j^\beta a_\gamma^k b_l^\delta b_m^\epsilon \ldots \tag{$\star$}$$

pour tous $i, j, k, l, m, \ldots$.

DÉMONSTRATION. Supposons pour simplifier que $v = (- \star -)$. Par définition,

$$\tilde T^i{}_j{}^k = T\big(\tilde e^{i\star}, \tilde e_j, \tilde e^{k\star}\big) \ .$$

Or

$$\tilde e^{i\star} = a_\alpha^i e^{\alpha\star} \ , \ \tilde e_j = b_j^\beta e_\beta \ , \ \tilde e^{k\star} = a_\gamma^k e^{\gamma\star} \ .$$

Par suite,
$$\tilde{T}^i{}_j{}^k = a^i_\alpha b^\beta_j a^k_\gamma T\big(e^{\alpha\star}, e_\beta, e^{\gamma\star}\big) = T^\alpha{}_\beta{}^\gamma a^i_\alpha b^\beta_j a^k_\gamma \ .$$
D'où le résultat. $\square$

La formule $(\star)$ fut pendant longtemps utilisée comme définition des tenseurs. Par tenseur on entendait un objet géométrique dont on ne précise pas la nature concrète, mais qui possède par rapport à toute base de E des composantes qui sont assujetties à varier par changement de base selon la formule $(\star)$. On retrouve facilement la formule $(\star)$ en remarquant que les indices covariants changent comme ceux des formes, tandis que les indices contravariants changent comme ceux des vecteurs. Pour un vecteur on a en effet que $\tilde{X}^i = a^i_\alpha X^\alpha$, tandis que pour une forme, $\tilde{\eta}_i = b^\alpha_i \eta_\alpha$. Reste alors à “recoller” $|v|$-fois ces relations pour obtenir $(\star)$.

On termine ces éléments de calcul tensoriel par la définition de la contraction. On veut ici donner du sens à des expressions du type $T_i{}^\alpha{}_j R_k{}^l{}_\alpha$, sommées en α part convention d'Einstein, qui proviennent d'un tenseur plus général $T_i{}^\alpha{}_j R_k{}^l{}_\beta$ mais où le 1er indice contravariant (le α) et le 4ème indice covariant (le β) sont égalisés puis sommés.

Définition 10.4 (Définition de la contraction). *Soit T un tenseur sur E p-fois covariant, q-fois contravariant, et ordonné suivant une variance v. Pour $1 \le k_1 \le p$ et $1 \le k_2 \le q$ deux entiers, on appelle contraction de T d'ordre (k_1, k_2), et on note $C^{k_2}_{k_1}T$, le tenseur sur E défini par*

(1) $C^{k_2}_{k_1}T$ est $(p-1)$-fois covariant et $(q-1)$-fois contravariant de variance v où l'on a supprimé le $k_1$ième symbole $\star$ et le $k_2$ième symbole $-$,

(2) Dans une base de E, les composantes de $C^{k_2}_{k_1}T$ sont les composantes de T où le $k_1$ième indice covariant et le $k_2$ième indice contravariant sont égalisés puis sommés.

A titre d'exemple: si $T = T^i{}_j{}^k{}_m e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k \otimes e^{m\star}$, alors
$$C^2_1 T = T^i{}_\alpha{}^\alpha{}_m e_i \otimes e^{m\star} \ .$$
On montre sans difficulté à partir du théorème de changement de base que cette définition ne dépend pas du choix de la base.

Démonstration. Pour simplifier traitons du cas $v = (- \star - \star)$ de l'exemple ci-dessus. Avec les notations du théorème de changement de base, la formule $(\star)$ s'écrit ici
$$\tilde{T}^i{}_j{}^k{}_l = T^\alpha{}_\beta{}^\gamma{}_\delta a^i_\alpha b^\beta_j a^k_\gamma b^\delta_l \ . \qquad (\star)$$
Par suite,
$$\tilde{T}^i{}_\varepsilon{}^\varepsilon{}_l = T^\alpha{}_\beta{}^\gamma{}_\delta a^i_\alpha b^\beta_\varepsilon a^\varepsilon_\gamma b^\delta_l \ .$$
Or les matrices (a^j_i) et (b^j_i) sont l'inverse l'une de l'autre. Donc
$$a^\varepsilon_\gamma b^\beta_\varepsilon = \delta^\beta_\gamma \ ,$$
et on trouve ainsi que
$$\tilde{T}^i{}_\varepsilon{}^\varepsilon{}_l = T^\alpha{}_\beta{}^\beta{}_\delta a^i_\alpha b^\delta_l \ .$$
Donc
$$\begin{aligned}\tilde{T}^i{}_\varepsilon{}^\varepsilon{}_l \tilde{e}_i \otimes \tilde{e}^{l\star} &= T^\alpha{}_\beta{}^\beta{}_\delta a^i_\alpha b^\delta_l \tilde{e}_i \otimes \tilde{e}^{l\star} \\ &= T^\alpha{}_\beta{}^\beta{}_\delta e_\alpha \otimes e^{\delta\star}\end{aligned}$$

car $e_\alpha = a^i_\alpha \tilde{e}_i$ et $e^{\delta\star} = b^\delta_l \tilde{e}^{l\star}$. D'où le résultat. □

3. Le fibré vectoriel des tenseurs

Soient M une variété de dimension n, x un point de M, et v une variance. Si $T \in \overset{(v)}{\otimes}\big(T_x(M)\big)$, et si (Ω, φ) désigne une carte de M en x de coordonnées associées $(x_1, \dots, x_n)$, on appelle composantes de T dans (Ω, φ) les composantes de T dans la base $\big((\frac{\partial}{\partial x_i})_x, \dots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_x\big)$ de $T_x(M)$. Si maintenant (Ω, φ) et (Ω', ψ) sont deux cartes de M en x de coordonnées associées respectives $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$, si par exemple $v = (- \star - \star \dots)$, et si $T^i{}_j{}^k{}_l \dots$ et $\tilde{T}^i{}_j{}^k{}_l \dots$ sont les composantes de T dans (Ω, φ) et (Ω', ψ), alors en raison de ce qui a été dit au paragraphe précédent,

$$\tilde{T}^i{}_j{}^k{}_l \dots = T^\alpha{}_\beta{}^\gamma{}_\delta \dots (\frac{\partial y^i}{\partial x_\alpha})_x (\frac{\partial x^\beta}{\partial y_j})_x (\frac{\partial y^k}{\partial x_\gamma})_x (\frac{\partial x^\delta}{\partial y_l})_x \dots \tag{10.1}$$

Il suffit ici de se souvenir que pour $X \in T_x(M)$ et $\eta \in T_x(M)^\star$,

$$\tilde{X}^i = (\frac{\partial y^i}{\partial x_\alpha})_x X^\alpha \text{ et } \tilde{\eta}_i = (\frac{\partial x^\alpha}{\partial y_i})_x \eta_\alpha \ .$$

En particulier, sachant que pour toute base $(e_1, \dots, e_n)$ de $T_x(M)$ il existe une carte (Ω, φ) de M au point x telle que pour tout i, $(\frac{\partial}{\partial x_i})_x = e_i$, la relation (10.1) caractérise les tenseurs de $T_x(M)$. On note maintenant $\overset{(v)}{\otimes}(M)$ la réunion (disjointe) des $\overset{(v)}{\otimes}\big(T_x(M)\big)$. On écrit

$$\overset{(v)}{\otimes}(M) = \bigcup_{x \in M} \overset{(v)}{\otimes}\big(T_x(M)\big) \ .$$

Si $v = (-)$, on retrouve le fibré tangent. Si $v = (\star)$, on retrouve le fibré cotangent. Soit $\mathcal{A}$ l'atlas saturé de M. A toute carte (Ω, φ) de $\mathcal{A}$ on associe l'application

$$\Phi : \bigcup_{x \in \Omega} \overset{(v)}{\otimes}\big(T_x(M)\big) \longrightarrow \varphi(\Omega) \times \mathbf{R}^{n^{|v|}}$$

qui à $T \in \overset{(v)}{\otimes}\big(T_x(M)\big)$, $x \in \Omega$, fait correspondre les coordonnées de x dans (Ω, φ), suivies des composantes de T dans (Ω, φ). En procédant comme dans le cas des fibrés tangents et cotangents, on vérifie facilement que:

(1) il existe une et une seule topologie sur $\overset{(v)}{\otimes}(M)$ pour laquelle:

(1a) pour tout ouvert Ω de M, $\bigcup_{x \in \Omega} \overset{(v)}{\otimes}\big(T_x(M)\big)$ est un ouvert de $\overset{(v)}{\otimes}(M)$,

(1b) pour toute carte (Ω, φ) de $\mathcal{A}$, l'application Φ construite ci-dessus est un homéomorphisme,

(2) si $\overset{(v)}{\otimes}(M)$ est muni de cette topologie, l'ensemble des

$$\big(\bigcup_{x \in \Omega} \overset{(v)}{\otimes}\big(T_x(M)\big), \Phi\big)_{(\Omega, \varphi) \in \mathcal{A}}$$

est un atlas de classe C^∞ sur $\overset{(v)}{\otimes}(M)$.

D'où le résultat suivant.

Théorème 10.5. *Soient M un variété de dimension n, et v une variance. Le fibré $\overset{(v)}{\otimes}(M)$ possède une structure naturelle de variété de dimension $n\big(1+n^{|v|-1}\big)$. Cette structure est déterminée par l'atlas construit ci-dessus.*

On note

$$\Pi : \overset{(v)}{\otimes}(M) \longrightarrow M$$

la projection canonique qui à $T \in \overset{(v)}{\otimes}\big(T_x(M)\big)$ associe $\Pi(T) = x$. On vérifie facilement que Π est une submersion.

Là encore, on le constate facilement, l'application Φ des cartes du fibré des tenseurs est construite sur le modèle

$$\Phi(\text{objet}) = (\text{coordonnées de } x, \text{composantes de l'objet}) \ ,$$

i.e. $(\text{coordonnées de } x, \text{composantes de } X)$ pour le fibré tangent, ensuite on a vu $(\text{coordonnées de } x, \text{composantes de } \eta)$ pour le fibré cotangent et, pour finir, on vient de voir $(\text{coordonnées de } x, \text{composantes de } T)$ pour le fibré des tenseurs.

Etant données M une variété et v une variance, on appelle champ de v-tenseurs sur M toute application

$$T : M \longrightarrow \overset{(v)}{\otimes}(M)$$

qui vérifie la propriété que $\Pi \circ T = Id_M$, i.e qui est telle que pour tout $x \in M$, $T(x) \in \overset{(v)}{\otimes}\big(T_x(M)\big)$. On dira alors que T est de classe C^k s'il est de classe C^k en tant qu'application de la variété M dans la variété $\overset{(v)}{\otimes}(M)$. On vérifie là encore facilement que la proposition suivante a lieu.

Proposition 10.5. *Un champ de v-tenseurs sur M est de classe C^k sur l'ouvert Ω d'une carte (Ω, φ) de M si et seulement si les fonctions composantes de T dans (Ω, φ) sont de classe C^k sur Ω.*

4. Connexions linéaires

On aborde la notion de connexion linéaire qui est à la base de la dérivation tensorielle.

Définition 10.5. *Soit M une variété. On note $\Gamma(M)$ l'espace des champs de vecteurs différentiables sur M. Une connexion sur M est une application $D : T(M) \times \Gamma(M) \longrightarrow T(M)$ qui vérifie:*

(1) *$\forall x \in M$, si $X \in T_x(M)$ et $Y \in \Gamma(M)$, $D(X, Y) \in T_x(M)$,*

(2) *$\forall x \in M$, D réstreinte à $T_x(M) \times \Gamma(M)$ est bilinéaire,*

(3) *$\forall x \in M$, $\forall X \in T_x(M)$, $\forall Y \in \Gamma(M)$, si $f : M \to \mathbb{R}$ est différentiable, alors $D(X, fY) = X(f)Y(x) + f(x)D(X, Y)$,*

(4) *$\forall X, Y \in \Gamma(M)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, si X et Y sont respectivement de classe C^k et C^{k+1} sur M, alors $D(X, Y)$ est de classe C^k sur M, où $D(X, Y)$ est le champ $x \to D(X(x), Y)$.*

Etant donnée D une connexion sur M, on note le plus souvent $D_X Y$ au lieu de $D(X, Y)$. Par définition, $D_X Y$ s'appelle la dérivée covariante de Y par rapport à X.

Soient D une connexion sur M, et (Ω, φ) une carte de M de coordonnées associées $(x_1, \dots, x_n)$. Pour tout $i = 1, \dots, n$, on note

$$\nabla_i = D_{(\frac{\partial}{\partial x_i})} ,$$

de sorte que pour tout $x \in \Omega$, et tout $X \in \Gamma(M)$,

$$\big(\nabla_i X\big)(x) = D_{(\frac{\partial}{\partial x_i})_x} X .$$

Pour tous $i, j = 1, \dots, n$, $\nabla_i(\frac{\partial}{\partial x_j})$, défini en tout point x de Ω par

$$\nabla_i(\frac{\partial}{\partial x_j})(x) = D_{(\frac{\partial}{\partial x_i})_x}(\frac{\partial}{\partial x_j}) ,$$

est alors un C^∞-champ de vecteurs sur Ω. On note

$$\Gamma_{ij}^k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

ses fonctions coordonnées dans (Ω, φ). Elles sont de classe C^∞ et définies par le fait que pour tout $x \in \Omega$, et tous $i, j = 1, \dots, n$,

$$\nabla_i(\frac{\partial}{\partial x_j})(x) = \Gamma_{ij}^k(x)(\frac{\partial}{\partial x_k})_x .$$

Par définition, les Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel de la connexion D dans la carte (Ω, φ).

Théorème 10.6. *Les symboles de Christoffel d'une connexion D dans une carte (Ω, φ) de coordonnées associées $(x_1, \dots, x_n)$, définissent (caractérisent) l'expression locale de la connexion dans la carte en ce sens que pour tout $x \in \Omega$, tout $X = X^i(\frac{\partial}{\partial x_i})_x \in T_x(M)$, et tout $Y = Y^i(\frac{\partial}{\partial x_i}) \in \Gamma(M)$,*

$$D_X Y = X^i(\nabla_i Y)(x) ,$$

où

$$(\nabla_i Y)(x)^j = (\frac{\partial Y^j}{\partial x_i})_x + \Gamma_{i\alpha}^j(x) Y^\alpha(x)$$

pour tout $i = 1, \dots, n$, et tout $j = 1, \dots, n$.

Démonstration. Avec le point (2) de la définition d'une connexion,

$$D_X Y = X^i(\nabla_i Y)(x) .$$

Toujours d'après (2),

$$(\nabla_i Y)(x) = \sum_{j=1}^n D_{(\frac{\partial}{\partial x_i})_x}\big(Y^j(\frac{\partial}{\partial x_j})\big) .$$

Or, d'après (3),

$$\begin{aligned} D_{(\frac{\partial}{\partial x_i})_x}\big(Y^j(\frac{\partial}{\partial x_j})\big) &= (\frac{\partial}{\partial x_i})_x.(Y^j)(\frac{\partial}{\partial x_j})_x + Y^j(x) D_{(\frac{\partial}{\partial x_i})_x}(\frac{\partial}{\partial x_j}) \\ &= (\frac{\partial Y^j}{\partial x_i})_x(\frac{\partial}{\partial x_j})_x + Y^j(x)\Gamma_{ij}^k(x)(\frac{\partial}{\partial x_k})_x . \end{aligned}$$

D'où la relation

$$(\nabla_i Y)(x)^j = (\frac{\partial Y^j}{\partial x_i})_x + \Gamma_{i\alpha}^j(x) Y^\alpha(x)$$

et le résultat. □

Le changement de base pour les symboles de Christoffel sont donnés par le théorème suivant. Le résultat s'obtient facilement par calcul direct à partir des relations qui expriment les $(\frac{\partial}{\partial x_i})$ en fonction des $(\frac{\partial}{\partial y_i})$ (et réciproquement). On donne le théorème sans preuve.

THÉORÈME 10.7. *Soient M une variété et D une connexion sur M. Etant données (Ω, φ) et (Ω, ψ) deux cartes de M de coordonnées associées $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$, on note Γ_{ij}^k et $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ les symboles de Christoffel de D dans (Ω, φ) et (Ω, ψ). Alors pour tout $x \in \Omega$, et tous i, j, k,*

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k(x) = (\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y_i \partial y_j})_x (\frac{\partial y^k}{\partial x_\alpha})_x + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(x) (\frac{\partial x^\alpha}{\partial y_i})_x (\frac{\partial x^\beta}{\partial y_j})_x (\frac{\partial y^k}{\partial x_\gamma})_x \ ,$$

où

$$(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y_i \partial y_j})_x = D_{ij}^2 (\varphi^\alpha \circ \psi^{-1})_{\psi(x)} \ .$$

En particulier, les symboles de Christoffel ne sont pas les composantes d'un champ de tenseurs sur M.

Les symboles de Christoffel ne sont pas les composantes d'un champ de tenseurs sur M car ils ne vérifient pas une formule de type (10.1).

5. Géodésiques, torsion et courbure

Les géodésiques sont aux espaces courbes ce que les droites sont à l'espace euclidien.

DÉFINITION 10.6. *Soit M une variété, soit D une connexion sur M et soit $C : [0, \eta] \to M$ un chemin de classe C^∞. Etant donné $t_0 \in [0, \eta]$, et (Ω, φ) une carte de M en $C(t_0)$, on note $C^k(t) = \varphi^k\big(C(t)\big)$ les composantes de C dans la carte (elles sont définies au moins pour t proche de t_0). On dit que C est une géodésique sur M si dans toute carte (Ω, φ) de M,*

$$\frac{d^2 C^k}{dt^2}(t) + \Gamma_{ij}^k\big(C(t)\big) \frac{dC^i}{dt}(t) \frac{dC^j}{dt}(t) = 0$$

pour tout k et en tout point t tel que $C(t) \in \Omega$, où les Γ_{ij}^k désignent les symboles de Christoffel de la connexion dans la carte. La définition est intrinsèque au sens où elle ne dépend pas du choix de la carte.

Etant donnés $x \in M$ et $X \in T_x(M)$, on montre qu'il existe $C : [0, \eta] \to M$ une unique géodésique qui vérifie $C(0) = x$ et $(\frac{dC}{dt})_0 = X$, où $(\frac{dC}{dt})_{t=0}$ est le vecteur de $T_x(M)$ défini par $(\frac{dC}{dt})_0.(f) = (f \circ C)'(0)$.

DÉFINITION 10.7. *Soient M une variété et D une connexion sur M. La torsion T de D est le C^∞-champ de tenseurs 2-fois covariants et 1-fois contravariants dont les composantes dans une carte (Ω, φ) sont les*

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k \ ,$$

où les Γ_{ij}^k sont les symbôles de Christoffel de D dans (Ω, φ).

On vérifie facilement que les T_{ij}^k sont bien les composantes du champ de tenseurs à partir de la relation de changement des symbôles de Christoffel par changement de carte. Une connexion est dite sans torsion, ou à torsion nulle, si $T \equiv 0$. Cela revient à dire que dans toute carte (Ω, φ) de M, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ pour tous i, j, k.

Définition 10.8. *Soient M une variété et D une connexion sur M. La courbure R de D est le C^∞-champ de tenseurs 3-fois covariants et 1-fois contravariants dont les composantes dans une carte (Ω, φ) sont les*

$$R^l_{ijk}(x) = (\frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial x_j})_x - (\frac{\partial \Gamma^l_{ji}}{\partial x_k})_x + \Gamma^l_{j\alpha}(x)\Gamma^\alpha_{ki}(x) - \Gamma^l_{k\alpha}(x)\Gamma^\alpha_{ji}(x) \ ,$$

où les Γ^k_{ij} sont les symbôles de Christoffel de D dans (Ω, φ).

Le calcul pour démontrer que les R^l_{ijk} sont bien les composants d'un champ de tenseurs est plus compliqué que pour la torsion. Il reste néanmoins faisable. On pourra aussi interpréter torsion et courbure de façon intrinsèque pour quotienter ces calculs.

La courbure vérifie la symétrie première $R^l_{ijk} = -R^l_{ikj}$ en tout point d'une carte et pour tous i, j, k, l. Elle vérifie d'autres symétries plus avancées comme avec les identités de Bianchi de la Section 8.

6. Extension de la dérivation covariante aux champs de tenseurs

On montre que la dérivation covariante s'étend naturellement des champs de vecteurs aux champs de tenseurs.

Théorème 10.8. *La dérivation covariante par rapport à un vecteur X de $T_x(M)$ s'étend de façon unique des champs différentiables de vecteurs à la catégorie plus générale des champs différentiables de tenseurs. L'opérateur D_X est alors totalement caractérisé par les quatre propriétés suivantes:*

(1) *Si $f : M \to \mathbf{R}$ est différentiable, $D_X(f) = X(f)$,*

(2) *D_X conserve la variance,*

(3) *D_X est un opérateur de dérivation pour le produit tensoriel,*

(4) *D_X commute avec la contraction.*

Le point **(2)** signifie que si T est un champ différentiable de tenseurs de variance v, alors $D_X T$ est un tenseur de variance v sur $T_x(M)$. Le point **(3)** signifie que si T et $\tilde{T}$ sont deux champs différentiables de tenseurs, alors

$$D_X(T \otimes \tilde{T}) = (D_X T) \otimes \tilde{T}(x) + T(x) \otimes (D_X \tilde{T}) \ .$$

Le point **(4)** signifie que si T est un champ différentiable de tenseurs p-fois covariants et q-fois contravariants de variance v, alors pour tout $1 \leq k_1 \leq p$ et tout $1 \leq k_2 \leq q$,

$$D_X\big(C^{k_2}_{k_1} T\big) = C^{k_2}_{k_1} D_X T \ .$$

Pour simplifier l'écriture de ce qui va suivre, on suppose que les variances sont ordonnées. Soit (Ω, φ) une carte de M de coordonnées associées $(x_1, \ldots, x_n)$, et soient Γ^k_{ij} les symboles de Christoffel de la connexion D dans (Ω, φ). Si $X = X^i(\frac{\partial}{\partial x_i})_x$, $x \in \Omega$, et si T est un champ différentiable de tenseurs p-fois covariantes et q-fois contravariants de composantes $T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}$ dans (Ω, φ), alors

$$D_X T = X^i\big(\nabla_i T\big)(x) \ ,$$

où $\big(\nabla_i T\big)(x)$ est le tenseur p-fois covariant et q-fois contravariant de $T_x(M)$ dont les composantes dans (Ω, φ) sont données par la relation

$$\begin{aligned}\big(\nabla_i T\big)(x)^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} = \Big(&\frac{\partial T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}}{\partial x_i}\Big)_x \\ &- \sum_{k=1}^{p} \Gamma^{\alpha}_{i i_k}(x) T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_{k-1}\alpha i_{k+1}\ldots i_p}(x) \\ &+ \sum_{k=1}^{q} \Gamma^{j_k}_{i\alpha}(x) T^{j_1\ldots j_{k-1}\alpha j_{k+1}\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}(x)\ .\end{aligned} \tag{10.2}$$

Pour les champs de vecteurs X et les champs de 1-formes η on retrouve bien évidemment les formules

$$\big(\nabla_i X\big)(x)^j = \Big(\frac{\partial X^j}{\partial x_i}\Big)_x + \Gamma^j_{i\alpha}(x) X^\alpha(x)\ ,$$

$$\big(\nabla_i \eta\big)(x)_j = \Big(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i}\Big)_x - \Gamma^\alpha_{ij}(x)\eta_\alpha(x)\ .$$

Les symboles de Christoffel apparaissent avec le signe $+$ pour les indices contravariants, et avec le signe $-$ pour les indices covariants.

Définition 10.9. *Soient M une variété, et D une connexion sur M. Si T est un C^k-champ de tenseurs p-fois covariants et q-fois contravariants sur M, on note ∇T le C^{k-1}-champ de tenseurs $(p+1)$-fois covariants et q-fois contravariants sur M défini par: pour tout $x \in M$, tous $X_1, \ldots, X_{p+1} \in T_x(M)$, et tous $\eta_1, \ldots, \eta_q \in T_x(M)^\star$,*

$$\begin{aligned}&\big(\nabla T\big)(x).\big(X_1, \ldots, X_{p+1}, \eta_1, \ldots, \eta_q\big) \\ &\quad = \big(D_{X_1} T\big).\big(X_2, \ldots, X_{p+1}, \eta_1, \ldots, \eta_q\big)\ .\end{aligned}$$

Ses composantes dans une carte sont données par la formule

$$\big(\nabla T\big)^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_{p+1}} = \big(\nabla_{i_1} T\big)^{j_1\ldots j_q}_{i_2\ldots i_{p+1}}\ ,$$

où $\big(\nabla_{i_1} T\big)^{j_1\ldots j_q}_{i_2\ldots i_{p+1}}$ est comme dans la formule vue plus haut.

Par extension, et par récurrence, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose $\nabla^m T = \nabla\big(\nabla^{m-1} T\big)$, avec la convention que $\nabla^0 T = T$. On a ainsi établie une nouvelle chaine de dérivation.

7. Une connexion pour dériver autant qu'on le veut

Les connexions permettent de développer une théorie des différentielles d'ordres supérieures sans passer par les tangents des tangents des tangents. On suppose dans ce qui suit que la connexion est sans torsion (ce qui est le cas pour la connexion de Levi-Civita du cas riemannien). Les symboles de Christoffel Γ^k_{ij} sont donc symétriques en i, j. On peut alors regarder la "dérivée" d'ordre n d'une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ comme un tenseur n-fois covariant $\nabla^n f$ parfaitement défini. Pour l'interpréter comme une dérivée d'ordre n il faut juste admettre que la dérivée d'ordre n au sens classique euclidien va ici être perturbée par des dérivées d'ordres inférieurs. Et dans toute cette approche on garde la très précieuse hérédité $\nabla^n = \nabla(\nabla^{n-1})$.

La “dérivée” première de $f : M \to \mathbb{R}$ en un point $a \in M$ va donc être moralement la 1-forme (ou le tenseur 1-fois covariant) notée $\nabla f(a)$ et qui, dans une carte locale en a, a pour composantes

$$(\nabla f)(a)_i = \big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big)_a$$

pour tout $i = 1, \dots, n$. Ici, pas de perturbation par des termes d'ordres inférieurs. La “dérivée” seconde se regarde alors moralement comme le tenseur deux fois covariant, noté $\nabla^2 f(a)$, et aussi appelé hessien de f en a, dont les composantes dans une carte sont les

$$\big(\nabla^2 f\big)(a)_{ij} = \big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\big)_a - \Gamma_{ij}^k(a)\big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\big)_a ,$$

où les Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel de la connexion dans la carte et

$$\big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\big)_a = D^2_{ij}\big(f \circ \varphi^{-1}\big)_{\varphi(a)}$$

dans la carte (Ω, φ). La formule est symétrique en i, j puisqu'on a supposé la connexion sans torsion. Les “dérivées secondes” sont ici perturbées par des “dérivées premières”. On y gagne plus qu'on y perd car $\nabla^2 f(a)$ est un tenseur parfaitement défini et on sait donc, en un certain sens, “attraper” un objet que l'on peut regarder comme la “dérivée” seconde de f en a. Si on continue à dériver on atteint la “dérivée” troisième $\nabla^3 f = \nabla(\nabla^2 f)$. Avec la formule tensorielle

$$\big(\nabla_k T\big)_{ij} = \big(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}\big)_a - \Gamma_{ki}^\alpha(a) T_{\alpha j}(a) - \Gamma_{kj}^\alpha(a) T_{i\alpha}(a)$$

valable pour ∇T lorsque T est un tenseur deux fois covariant (c'est la formule (10.2) dans le contexte des champs de tenseurs deux fois covariants), appliquée à $T = \nabla^2 f$, on obtient $\nabla^3 f(a)$ dont les composantes dans une carte sont les

$$\begin{aligned}
(\nabla^3 f)_{ijk} = {} & \big(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\big)_a - \Gamma_{ij}^\alpha(a)\big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_k}\big)_a - \big(\frac{\partial \Gamma_{ij}^\alpha}{\partial x_k}\big)_a \big(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\big)_a \\
& - \Gamma_{ik}^\alpha(a)\big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_j}\big)_a + \Gamma_{ik}^\alpha(a)\Gamma_{\alpha j}^\beta(a)\big(\frac{\partial f}{\partial x_\beta}\big)_a \\
& - \Gamma_{jk}^\alpha(a)\big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_\alpha}\big)_a + \Gamma_{jk}^\alpha(a)\Gamma_{i\alpha}^\beta(a)\big(\frac{\partial f}{\partial x_\beta}\big)_a \\
= {} & \big(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\big)_a - \Gamma_{ij}^\alpha(a)\big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_k}\big)_a - \Gamma_{ik}^\alpha(a)\big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_j}\big)_a \\
& - \Gamma_{jk}^\alpha(a)\big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_\alpha}\big)_a - S_{ijk}^\beta(a)\big(\frac{\partial f}{\partial x_\beta}\big)_a
\end{aligned}$$

où

$$\big(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\big)_a = D^3_{ijk}\big(f \circ \varphi^{-1}\big)_{\varphi(a)}$$

dans la carte (Ω, φ) et où les S_{ijk}^β sont donnés par

$$S_{ijk}^\beta(a) = \big(\frac{\partial \Gamma_{ij}^\beta}{\partial x_k}\big)_a - \Gamma_{ik}^\alpha(a)\Gamma_{\alpha j}^\beta(a) - \Gamma_{jk}^\alpha(a)\Gamma_{i\alpha}^\beta(a) .$$

Les “dérivées” troisièmes sont donc perturbées par des “dérivées” secondes et premières, ce qui peut être gênant, mais on gagne néamnoins que $\nabla^3 f(a)$ est un tenseur parfaitement défini que l'on peut regarder moralement comme la “dérivée” troisième de f en a. Les perturbations en “dérivées” secondes sont invariantes par permutations de $\{i,j,k\}$. Ce n'est par contre plus le cas des perturbations premières. On a bien la symétrie $S_{ijk}^m = S_{ikj}^m$ pour tous i,j,k,m mais $S_{ijk}^m \neq S_{kji}^m$. En fait on constate avec la formule de la Définition 10.8 que

$$S_{ijk}^m - S_{kji}^m = R_{jki}^m$$

pour tous i,j,k,m. La courbure intervient donc dans le défaut de symétrie des perturbations premières. Rien de bien surprenant en géométrie différentielle si l'on pense aux relations établies par Bochner et de Rham.

8. Les identités de Bianchi

Les identités de Bianchi sont des identités qui sont toujours satisfaites par la courbure. N'importe quoi ne peut donc pas être courbure d'une connexion. Il y a des contraintes.

Théorème 10.9. *Soient M une variété, D une connexion sur M, et (Ω,φ) une carte de M. On suppose (pour simplifier) que D est sans torsion. Alors:*

(1) *Première identité de Bianchi: pour tout $x \in \Omega$, et tous i,j,k,l,*

$$\sum_{cycle\ \{i,j,k\}} R_{ijk}^l(x) = 0 \ ,$$

(2) *Seconde identité de Bianchi: pour tout $x \in \Omega$, et tous i,j,k,l,m,*

$$\sum_{cycle\ \{i,j,k\}} \big(\nabla_i R\big)(x)_{mjk}^l = 0 \ ,$$

où $\displaystyle\sum_{cycle\ \{i,j,k\}} a_{ijk} = a_{ijk} + a_{kij} + a_{jki}$.

9. La connexion de Levi-Civita du cas riemannien

Les variétés riemanniennes sont une catégorie importante de variétés. Elles sont munies de connexions naturelles dites de Levi-Civita.

Définition 10.10. *Une métrique riemannienne sur une variété M est un C^∞-champ de tenseurs deux fois covariants sur M qui définit en tout point x de M un produit scalaire sur $T_x(M)$. Une variété riemannienne est un couple (M,g) constitué d'une variété M et d'une métrique riemannienne g sur M.*

Puisque tout produit scalaire est symétrique, si les g_{ij} sont les composantes de g dans une carte de M, alors $g_{ij} = g_{ji}$. On montre “assez facilement” que toute variété paracompacte possède une métrique riemannienne. On peut procéder par recollements de métriques “euclidiennes” à partir de l'existence de partitions de l'unité.

On sait mesurer la longeur des courbes C^1 (par suite aussi des courbes C^1 par morceaux) sur une variété riemannienne. Si $\gamma : [a,b] \to M$ un chemin de classe C^1, on note $\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_t$ le vecteur tangent de $T_{\gamma(t)}(M)$ défini par: $\forall f : M \to \mathbb{R}$ différentiable au point $\gamma(t)$, $\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_t.(f) = \big(f\circ\gamma\big)'(t)$.

Définition 10.11. *Soient (M,g) une variété riemannienne et $\gamma : [a,b] \to M$ un chemin de classe C^1. La longueur de γ, notée $L(\gamma)$, est définie par*

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g\big(\gamma(t)\big).\big((\frac{d\gamma}{dt})_t, (\frac{d\gamma}{dt})_t\big)}\; dt\ .$$

Lorsque γ est seulement supposé de classe C^1 par morceaux, sa longueur est la somme des longueurs des chemins de classe C^1 dont il est composé.

Les géodésiques sont (en un sens à préciser) les chemins qui réalisent la longueur entre deux points d'une variété (les chemins de longueurs minimales). On donne le résultat suivant sans preuve (même si celle-ci n'est pas hors de portée).

Théorème 10.10. *Soient (M,g) une variété riemannienne, et x, y deux points de M. Si $\mathcal{C}_{xy}$ désigne l'ensemble des chemins C^1 par morceaux d'extrémités x et y, on pose*

$$d(x,y) = \inf_{\gamma\in\mathcal{C}_{xy}} L(\gamma)\ .$$

Alors $d : M\times M \to \mathbf{R}$ définit une distance sur M dont la topologie associée coïncide avec la topologie initiale de M.

Par suite, et puisque tout espace métrique est paracompact (théorème de Stone), on obtient qu'une variété possède une métrique riemannienne si et seulement si elle est paracompacte. On montre maintenant que toute variété riemannienne possède une connexion naturelle privilégiée. Cette connexion est appelée la connexion de Levi-Civita de g.

Théorème 10.11. *Soit (M,g) une variété riemannienne. Il existe une unique connexion sur M qui est sans torsion et pour laquelle la métrique g est à dérivée covariante nulle. C'est par définition la connexion de Levi-Civita de g. Etant donnés (Ω,φ) une carte de M de coordonnées associées $(x_1,\dots,x_n)$, les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita dans cette carte sont donnés par la relation*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m}\Big)g^{mk}\ ,$$

où les g_{ij} et g^{ij} désignent respectivement les composantes de g dans (Ω,φ), et les composantes de la matrice inverse des g_{ij} (i.e $g^{im}g_{mj} = \delta_j^i$ pour tous i et j).

Démonstration. On montre tout d'abord l'unicité de la connexion, puis ensuite son existence. Par définition,

$$\big(\nabla_k g\big)_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \Gamma_{ki}^m g_{mj} - \Gamma_{kj}^m g_{im}\ .$$

On écrit que pour tous i, j, et k,

$$\big(\nabla_i g\big)_{jk} + \big(\nabla_j g\big)_{ik} - \big(\nabla_k g\big)_{ij} = 0 \tag{10.3}$$

Sachant que

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_i g\right)_{jk} &= \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \Gamma_{ij}^m g_{mk} - \Gamma_{ik}^m g_{jm} \\
\left(\nabla_j g\right)_{ik} &= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \Gamma_{jk}^m g_{im} - \Gamma_{ji}^m g_{mk} \\
\left(\nabla_k g\right)_{ij} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \Gamma_{ki}^m g_{mj} - \Gamma_{kj}^m g_{im} \ ,
\end{aligned}$$

et sachant que la connexion est sans torsion, et donc que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ pour tous i, j, et k, on obtient à partir de (10.3) que

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = 2\Gamma_{ij}^m g_{mk} \ .$$

En contractant par g^{kl}, il suit que

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m}\Big)g^{ml} \ ,$$

ce qui est l'expression des Γ_{ij}^k du théorème. D'où l'unicité de la connexion de Levi-Civita. L'existence se prouve en partant de l'expression des Γ_{ij}^k, et en montrant qu'ils se transforment bien par changement de cartes selon la relation de changement des symbôles de Christoffel. A savoir

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \frac{\partial y^k}{\partial x_\alpha}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y_i \partial y_j} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial x^\alpha}{\partial y_i}\frac{\partial x^\beta}{\partial y_j}\frac{\partial y^k}{\partial x_\gamma} \ .$$

A partir de là, on voit que les Γ_{ij}^k définissent bien une connexion. Reste à vérifier que cette connexion est bien sans torsion, et telle que $\nabla g = 0$, ce qui ne pose aucun problème. □

Au passage, dans la partie 2 de la preuve, on aura eu besoin d'utiliser le résultat important suivant.

Lemme 10.1. *Les g^{ij} sont les composantes d'un C^∞-champ de tenseurs deux fois contravariants sur M. On note g^{-1} ce champ de tenseurs, désigné sous les termes d'inverse du tenseur métrique. Il est lui aussi à dérivée covariante nulle, au sens où tout comme pour g, $\nabla g^{-1} = 0$.*

Démonstration. On commence par montrer que les g^{ij} sont les composantes d'un C^∞-champ de tenseurs deux fois contravariants sur M. Pour cela on montre que les g^{ij} changent comme le font les tenseurs deux fois contravariants par changement de carte. Si (Ω, φ) et $(\tilde{\Omega}, \psi)$ sont deux cartes de M de coordonnées associées $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$, et si x est dans $\Omega \cap \tilde{\Omega}$, alors, avec les notations usuelles,

$$\tilde{g}_{ij}(x) = g_{\alpha\beta}(x)(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y_i})_x(\frac{\partial x^\beta}{\partial y_j})_x$$

Notons

$$T^{ij}(x) = g^{\gamma\delta}(x)(\frac{\partial y^i}{\partial x_\gamma})_x(\frac{\partial y^j}{\partial x_\delta})_x \ .$$

Par unicité de la matrice inverse, il nous suffit de montrer que pour tous i, j,

$$\tilde{g}_{im}(x)T^{mj}(x) = \delta_i^j \ ,$$

et on obtiendra que $\tilde{g}^{ij}(x) = T^{ij}(x)$, et donc la relation voulue. Or,

$$\tilde{g}_{im}(x)T^{mj}(x) = g_{\alpha\beta}(x)(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y_i})_x(\frac{\partial x^\beta}{\partial y_m})_x g^{\gamma\delta}(x)(\frac{\partial y^m}{\partial x_\gamma})_x(\frac{\partial y^j}{\partial x_\delta})_x \ ,$$

et on remarque que

$$(\frac{\partial x^\beta}{\partial y_m})_x(\frac{\partial y^m}{\partial x_\gamma})_x = \delta^\beta_\gamma \ ,$$

puis que $g_{\alpha\beta}(x)g^{\beta\delta}(x) = \delta^\delta_\alpha$, et enfin, pour finir, que

$$(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y_i})_x(\frac{\partial y^j}{\partial x_\alpha})_x = \delta^j_i \ .$$

On a donc bien que

$$\tilde{g}^{ij}(x) = g^{\gamma\delta}(x)(\frac{\partial y^i}{\partial x_\gamma})_x(\frac{\partial y^j}{\partial x_\delta})_x$$

et les g^{ij} sont bien les composantes d'un C^∞-champ de tenseurs g^{-1} deux fois contravariants sur M. Reste maintenant à montrer que $\nabla g^{-1} = 0$. Pour cela on fixe (Ω, φ) une carte (quelconque) de M de coordonnées associées $(x_1, \dots, x_n)$, et on note δ le champ de tenseur 1-fois covariants et 1-fois contravariants sur Ω de composantes les symbôles de Christoffel δ^j_i. Alors

$$\delta = C^1_2 g \otimes g^{-1} \ .$$

Une première remarque simple est que $\nabla\delta = 0$. En effet,

$$(\nabla_k\delta)^j_i(x) = (\frac{\partial \delta^j_i}{\partial x_k})_x - \Gamma^m_{ki}(x)\delta^j_m + \Gamma^j_{km}(x)\delta^m_i \ ,$$

ce qui donne $(\nabla_k\delta)^j_i(x) = 0$. Une seconde remarque est que, puisque la dérivation covariante commute avec la contraction et dérive par rapport au produit tensoriel, et puisque $\nabla g = 0$,

$$(\nabla_k C^1_2 g \otimes g^{-1})^j_i(x) = \big(C^1_2(g \otimes \nabla_k g^{-1})\big)^j_i(x)$$

de sorte que $g_{i\alpha}(x)\big(\nabla_k g^{-1}\big)^{\alpha j}(x) = 0$. En contractant par $g^{im}(x)$, on obtient que

$$\big(\nabla_k g^{-1}\big)^{mj}(x) = 0$$

et donc que $\nabla g^{-1} = 0$. D'où le lemme. □

La métrique riemannienne et la connexion de Levi-Civita permettent de construire le laplacien riemannien par contraction. Le laplacien riemannien $\Delta_g f$ d'une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur une variété riemannienne (encore appelé opérateur de Laplace-Beltrami) est défini par $\Delta_g = -C^1_1 C^2_2 \nabla^2 f \otimes g^{-1}$. Dans une carte

$$\begin{aligned} \Delta_g f &= -g^{ij}(\nabla^2 f)_{ij} \\ &= -g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) \ , \end{aligned} \tag{10.4}$$

où les Γ^k_{ij} sont les symbôles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita de g dans la carte. La convention de signe moins, qui assure que ses valeurs propres sont positives, est l'opposée de la convention classique dans $\mathbb{R}^n$.

CHAPITRE 11

Eléments de géométrie riemannienne

On traite dans ce dernier chapitre d'éléments de géométrie riemannienne sans prétention à l'exhaustivité. Pour pouvoir aborder plusieurs aspects du sujet nous renoncerons à démontrer la plupart des résultats présentés dans ce chapitre. Il s'agit essentiellement ici d'une introduction aux problématiques et outils principaux de la géométrie riemannienne.

1. Les différentes courbures d'une variété riemannienne

Soit (M, g) une variété riemannienne. La courbure R de la connexion de Levi-Civita, champ de tenseurs 3-fois covariants et 1-fois contravariant, se décline en différentes courbures avec le jeu des contractions. Pour la courbure de Riemann il s'agit de descendre l'indice contravariant en utilisant la métrique pour obtenir un champ de tenseurs 4-fois covariants. La courbure de Riemann Rm_g de g est alors le C^∞-champ de tenseurs 4-fois covariants défini par la relation

$$Rm_g = C_1^1(g \otimes R) ,$$

où C_1^1 est l'opérateur de contraction de la Définition 10.4. Dans une carte les composantes R_{ijkl} de Rm_g sont données par la relation

$$R_{ijkl} = g_{i\alpha} R_{jkl}^\alpha ,$$

où les R_{ijk}^l sont les composantes dans la carte de la courbure R de la Définition 10.8. La courbure de Riemann vérifie un certain nombre de symétries. Exprimées dans une carte: en tout point et pour tous i, j, k, l,

(i) (symétries premières) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$, $R_{ijkl} = -R_{jikl}$ et $R_{ijkl} = R_{klij}$,

(ii) (première identité de Bianchi) $R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0$,

et il y a bien sûr la seconde identité de Bianchi qui, puisque g^{-1} est à dérivée covariante nulle, s'écrit $(\nabla_i Rm_g)_{jklm} + (\nabla_m Rm_g)_{jkil} + (\nabla_l Rm_g)_{jkmi} = 0$.

Par contraction de la courbure de Riemann avec g^{-1} on obtient la courbure de Ricci Rc_g de g. La courbure de Ricci de g est ainsi le C^∞-champ de tenseurs 2-fois covariants défini par

$$Rc_g = C_1^1 C_3^2 Rm_g \otimes g^{-1}$$

ou, de façon équivalente, par $Rc_g = C_2^1 R$. Dans une carte les composantes R_{ij} de Rc_g sont données par la relation

$$R_{ij} = R_{\alpha i \beta j} g^{\alpha\beta} ,$$

où les R_{ijkl} sont les composantes de Rm_g dans la carte. La courbure de Ricci Rc_g est symétrique: $R_{ij} = R_{ji}$ en tout point et pour tous i, j dans une carte. Elle est donc de même nature que la métrique. Une métrique riemannienne est dite d'Einstein lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Rc_g = \lambda g$ sur M.

Une dernière contraction avec g^{-1} permet de définir la courbure scalaire. La courbure scalaire S_g de g est la fonction de classe C^∞ sur M donnée par

$$S_g = C_1^1 C_2^2 Rc_g \otimes g^{-1} \ .$$

Dans une carte, $S_g = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$.

Une dernière courbure, équivalente à la courbure de Riemann, est plus difficile à appréhender. La courbure sectionnelle K_g de (M, g) est l'application

$$K_g : \bigcup_{x \in M} G_x^2 M \to \mathbb{R}$$

définie pour tout $P \in G_x^2 M$ par

$$K_g(P) = \frac{Rm_g(X,Y,X,Y)}{g(x).(X,X)g(x).(Y,Y) - g(x).(xX,Y)^2} \ ,$$

où $G_x^2 M$ est l'ensemble des plans vectoriels de $T_x(M)$, donc l'ensemble des sous espaces vectoriels de dimensions 2 de $T_x(M)$, et (X,Y) est une base de P. On vérifie sans difficulté particulière que $K_g(P)$ ne dépend pas du choix de la base (X,Y) de P. En particulier, si (X,Y) est une base orthonormée de P pour $g(x)$ alors $K_g(P) = Rm_g(X,Y,X,Y)$. Les deux courbures Rm_g et K_g, bien que de différentes natures, sont équivalentes au sens où la connaissance de l'une entraîne la connaissance de l'autre.

D'autres courbures plus spécifiques, comme la courbure de Weyl, jouent un rôle important en géométrie riemannienne. Si H et K sont deux tenseurs 2-fois covariants et symétriques sur un espace vectoriel E, le produit de Kulkarni-Nomizu $H \odot K$ de H et K, symétrique en H et K, se définit comme étant le tenseur 4-fois covariant sur E donné par

$$\begin{aligned} H \odot K(X,Y,Z,T) &= H(X,Z)K(Y,T) + H(Y,T)K(X,Z) \\ &\quad - H(X,T)K(Y,Z) - H(Y,Z)K(X,T) \end{aligned}$$

pour tous $X,Y,Z,T \in E$. La courbure de Weyl W_g de g et la courbure concirculaire Z_g de g sont les C^∞-champs de tenseurs 4-fois covariant donnés en dimension $n \geq 3$ par

$$\begin{aligned} W_g &= Rm_g - \frac{1}{n-2} Rc_g \odot g + \frac{S_g}{2(n-1)(n-2)} g \odot g \ , \\ Z_g &= Rm_g - \frac{S_g}{2n(n-1)} g \odot g \ . \end{aligned}$$

Dans une carte, les composantes W_{ijkl} de W_g sont données par la formule

$$\begin{aligned} W_{ijkl} = R_{ijkl} &- \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il}) \\ &+ \frac{S_g}{(n-1)(n-2)} (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \ , \end{aligned}$$

et les composantes Z_{ijkl} de Z_g sont données par

$$Z_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{S_g}{n(n-1)} (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$$

pour tous i, j, k, l. A cette liste on peut rajouter le tenseur d'Einstein

$$E_g = Rc_g - \frac{S_g}{n} g \ .$$

Ces différentes courbure permettent de caractériser différents états de la variété. Une variété riemannienne (M, g) de dimension $n \geq 3$ est ainsi d'Einstein si et seulement si $E_g = 0$ en tout point (en tant que champ de tenseurs 2-fois covariants). Lorsque la variété est d'Einstein, S_g est constante. Dans le même ordre d'idée, une variété est conformément plate ($n \geq 4$) si et seulement si $W_g = 0$ en tout point (en tant que champ de tenseurs 4-fois covariants), où (M, g) est dite conformément plate (ou encore localement conformément plate) si pour tout $x \in M$ il existe Ω un voisinage ouvert de x dans M et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ strictement positive pour laquelle la métrique $\tilde{g} = fg$ est à courbure nulle sur Ω, à savoir telle que $Rm_{\tilde{g}} = 0$ sur Ω. Les métriques $\tilde{g}$ qui sécrivent sous la forme $\tilde{g} = fg$ sont dites conformes à g. et la courbure de Weyl est un invariant conforme au sens où si $\tilde{g} = fg$, alors $W_{\tilde{g}} = fW_g$. Enfin Z_g caractérise les variétés à courbure sectionnelle constante (voir la Section 2).

Il est facile de définir un produit scalaire sur les champs de tenseurs 4-fois covariants en posant $\langle T, \tilde{T} \rangle_g = C_1^1 \dots C_8^8 g^{-1} \otimes g^{-1} \otimes g^{-1} \otimes g^{-1} \otimes T \otimes \tilde{T}$. Dans une carte en un point x on a écrit $\langle T, \tilde{T} \rangle_g = g^{i_1 j_1} \dots g^{i_4 j_4} T_{i_1 \dots i_4} \tilde{T}_{j_1 \dots j_4}$ et si la carte est normale en x (voir la Section 3) on a tout simplement écrit que

$$\langle T, \tilde{T} \rangle_g = \sum_{i_1, \dots, i_4} T_{i_1 \dots i_4} \tilde{T}_{i_1 \dots i_4} \ ,$$

une écriture qui permet facilement de constater qu'on a bien là un produit scalaire sur les champs de tenseurs 4-fois covariants. On vérifie facilement à partir des définitions ci-dessus que

$$Rm_g = W_g + \frac{1}{n-2} E_g \odot g + \frac{S_g}{2n(n-1)} g \odot g \tag{11.1}$$

et que cette décomposition est orthogonale (deux à deux) dans l'espace des champs de tenseurs 4-fois covariants (pour le produit scalaire que associé à g que l'on vient de définir).

2. Courbures et topologie

Une des questions majeures de la géométrie riemannienne est d'obtenir des propriétés différentielles ou topologiques sur une variété à partir de propriétés sur ses courbures. La classification première concerne les variétés à courbure sectionnelle constante. Par définition une variété riemannienne (M, g) est dite à courbure sectionnelle constante $\lambda \in \mathbb{R}$ si pour tout $x \in M$ et tout $P \in G_x^2 M$, $K_g(P) = \lambda$. On montre que g est à courbure sectionnelle constante si et seulement si $Z_g = 0$ et dans ce cas g est aussi d'Einstein et $n(n-1)\lambda = S_g$ (qui est constante). En raison de la décomposition orthogonale (11.1) de la Section 1, g est à courbure sectionnelle constante si et seulement si g est à la fois d'Einstein et conformément plate (en dimension deux g est à courbure sectionnelle constante si et seulement si S_g est constante). Quitte à changer la métrique g par λg, avec $\lambda > 0$ un réel convenablement choisi, on peut toujours se ramener au cas où $K_g \in \{-1, 0, +1\}$. La complétude d'une variété riemannienne (M, g) fait référence à la complétude pour la distance d_g induite par g.

(i) L'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, \delta)$, avec donc la métrique euclidienne donnée par les symboles de Kroenecker dans les coordonnées euclidiennes, est une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure sectionnelle constante nulle. On a aussi $Rm_\delta = 0$.

(ii) La sphère (S^n, g_0) munie de sa métrique standard induite de la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^{n+1}$ via le plongement canonique $i : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, est une variété compacte simplement connexe à courbure sectionnelle constante $+1$. Lue dans une carte stéréographique la métrique g_0 est donnée par

$$g_0(x)_{ij} = \frac{4}{(1+|x|^2)^2}\delta_{ij}$$

pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, où $|\cdot|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

(iii) L'espace hyperbolique $(\mathbb{H}^n, g_0)$ peut se définir de différentes fa c cons. On choisit le modèle de la boule. Du point de vue différentiel on a alors $\mathbb{H}^n = B_0(1)$ la boule unité de $\mathbb{R}^n$, sa métrique g_0 étant donnée par

$$g_0(x)_{ij} = \frac{4}{(1-|x|^2)^2}\delta_{ij}$$

pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, où $|\cdot|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. La variété riemannienne $(\mathbb{H}^n, g_0)$ est alors une variété complète simplement connexe à courbure sectionnelle constante -1.

En fait, il s'agit des seules variétés complètes simoplement connexes à courbure sectionnelle constante $-1, 0$ ou $+1$. Deux variétés (M, g) et $(N, \hat{g})$ sont dites isométriques s'il existe un C^∞-difféomorphisme $\varphi : M \to N$ qui préèrve les métriques au sens de l'image réciproque de φ, et donc si

$$\hat{g}\left(\varphi(x)\right).\big(\varphi_\star(x).(X), \varphi_\star(x).(Y)\big) = g(x).(X, Y)$$

pour tout $x \in M$ et tous $X, Y \in T_x(M)$. Le membre de gauche dans cette relation se définit comme l'image réciproque de $\hat{g}$ par φ notée $\varphi^\star\hat{g}$. Avec le théorème de Myers-Steenrod, φ est une isométrie riemannienne si et seulement si φ est une isométrie pour les distances d_g et $d_{\hat{g}}$ associées à g et $\hat{g}$. Par ailleurs, la théorie du revêtement universel, que nous n'aborderons pas ici, nous dit que toutes variété est en un certain sens le quotient d'une variété simplement connexe. Classifier les variétés simplement connexes c'est donc, à quotient près, classifier toutes les variétés. La première classification (et essentiellement la seule qui soit complète si l'on excepte les théorèmes de rigidité) concerne les variétés à courbure sectionnelle constante.

Théorème 11.1 (Classification des variétés à courbure sectionnelle constante). *Soit (M, g) une variété riemannienne complète simplement connexe de dimension n à courbure sectionnelle constante $K_g \in \{-1, 0, +1\}$. Si $K_g = -1$, (M, g) est isométrique a l'espace hyperbolique $(\mathbb{H}^n, g_0)$. Si $K_g = 0$, (M, g) est isométrique a l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, \delta)$. Si $K_g = +1$, (M, g) est nécessairement compacte et est isométrique à la sphère standard (S^n, g_0).*

Le phénomène de compacité en courbure positive intervient plus vite, en fait dès la positivité de la courbure de Ricci. C'est l'objet du théorème de Myers. En un certain sens, la positivité de la courbure de Ricci oblige la variété à se recourber sur elle-même.

Théorème 11.2 (Théorème de Myers). *Soit (M, g) une variété riemannienne complète de dimension n. On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $Rc_g \geq (n-1)k^2 g$ au sens des formes bilinéaires. Alors M est compacte et son diamètre $D_g(M)$ vérifie $D_g(M) \leq \frac{\pi}{k}$.*

La positivité de la courbure de Ricci dans le théorème de Myers signifie que pour tout $x \in M$ et tout $X \in T_x(M)$, $Rc_g(x).(X, X) \leq (n-1)k^2 g(x).(X, X)$. Le diamètre $D_g(M)$ est par ailleurs naturellement défini comme le supremum sur les $x, y \in M$ des $d_g(x, y)$, où d_g est la distance induite par g. En dimension 3, la résolution de la conjecture de Poincaré par Perelman donne que la seule variété compacte simplement connexe de dimension 3 est, à homéomophisme près, la sphère S^3. Une des conséquences notables de la théorie des revêtements universels, du Théorème de Myers et du Théorème de Cartan-Hadamard tel qu'énoncé ci-dessous est qu'il ne peut coexister sur une variété compacte une métrique à courbure sectionnelle négative ou nulle et une métrique à courbre de Ricci strictement positive (au sens des formes bilinéaires).

D'autres théorèmes notables concernant l'influence de la courbure sur la topologie des variétés riemanniennes existent bien sûr. On en citera deux, le premier étant énoncé sous une forme plus faible que dans son énoncé premier.

Théorème 11.3 (Théorème de Cartan-Hadamard). *Si (M, g) complète de dimension n est simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle, alors M est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.*

Une variété complète simplement connexe de dimension n à courbure sectionnelle négative ou nulle n'est donc rien d'autre que $\mathbb{R}^n$ muni d'une métrique g complète à courbure négative ou nulle. Dans l'autre exemple que nous avons choisi de présenter, la conclusion renvoie à la sphère S^n.

Théorème 11.4 (Théorème de la sphère 1/4-pincée). *Si (M, g) compacte de dimension n est simplement connexe à courbure sectionnelle 1/4-pincée, à savoir telle que $\delta \leq K_g \leq \Delta$ avec $\delta > \frac{1}{4}\Delta > 0$, alors M est homéomorphe à la sphère S^n.*

Dans le théorème de la sphère 1/4-pincée la question de savoir si on peut remplacer l'homéomorphisme à S^n par un difféomorphisme a longtemps été étudiée. La question est rendue difficile par l'existence des structures exotiques dont on a parlé à la Section 9 du Chapitre 7. La question a de façon remarquable reçu une réponse positive par Brendle et Schoen en 2008 [*Classification of manifolds with weakly* 1/4*-pinched curvatures*, Acta Mathematica, 200(1) :1Ð13, 2008].

3. Cartes normales

Les cartes normales sont un outil très utile en géométrie riemannienne. Etant donnés (M, g) une variété riemannienne et $x \in M$ un point de M, une carte (Ω, φ) en x est dite normale en x si

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} \text{ et } \Gamma_{ij}^k(x) = 0$$

pour tous i, j, k. Puisque g est à dérivée covariante nulle, cela revient encore à demander que $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ et $\partial_k g_{ij}(x) = 0$ pour tous i, j, k (où $\partial_k g_{ij}(x)$ renvoie à l'écriture exacte $(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k})_x$). Le théorème suivant a lieu.

Théorème 11.5. *En tout point d'une variété riemannienne il existe une carte normale.*

Il est impossible par contre d'être plus exigeant sur les ordres de nullité en x sans condition supplémentaire. En effet la nullité des dérivées secondes de g en x entraîne de facto, comme on le voit avec les formules de la Définition 10.8, la nullité de Rm_g en x. Or Rm_g est un objet universel qui ne dépend pas de sa lecture dans une carte, donc impossible à annuler par une lecture dans une carte si $Rm_g(x) \neq 0$. En particulier il est impossible de demander l'existence d'une carte en x qui serait telle que $g_{ij} = \delta_{ij}$ en tout point de la carte si Rm_g n'est pas nulle au voisinage de x. De façon surprenante, c'est en fait la seule obstruction.

THÉORÈME 11.6. *Soit (M, g) une variété riemannienne et $x \in M$. Il existe une carte en x vérifiant $g_{ij} = \delta_{ij}$ en tout point de la carte, et pour tous i, j, si et seulement si $Rm_g = 0$ au voisinage de x.*

Le Théorème 11.5 se démontre sans grande difficulté avec le théorème d'inversion locale (Théorème 2.12). Le théorème 11.6, lui, aura besoin du théorème de Frobenius (Théorème 2.14) pour être démontré.

Sans rentrer dans les détails, l'application exponentielle en un point x_0 est un difféomorphisme local avec $\mathbb{R}^n$ qui redresse les géodésiques en ce point. Elle fournit (ou plutôt l'application inverse) une carte normale x_0. Etant construite de façon assez précise, elle possède plusieurs propriétés remarquables. Tout d'abord elle envoie les boules centrées en x_0 sur les boules centrées en 0 dans $\mathbb{R}^n$ et, par ailleurs, les coefficients du développement de Taylor en x_0 de la métrique dans cette carte deviennent des polynômes universels en les dérivées covariantes du tenseur de courbure en x_0. Le calcul des premiers termes donne le développement du théorème suivant.

THÉORÈME 11.7. *La carte exponentielle en un point x_0, qui redresse les géodésiques issues de x_0, envoie les boules $B_{x_0}(r)$ dans M sur les boules $B_0(r)$ dans $\mathbb{R}^n$ pour $r > 0$ petit et, dans cette carte exponentielle en x_0,*

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{i\alpha\beta j}(x_0) x^\alpha x^\beta + \frac{1}{6} R_{i\alpha\beta j,\gamma} x^\alpha x^\beta x^\gamma + O(r^4) \tag{11.2}$$

pour tout x dans la carte, où les g_{ij} et R_{ijkl} désignent respectivement les composantes de g et Rm_g dans la carte exponentielle en x_0, les x^i sont les coordonnées dans cette carte, n est la dimension de la variété, r est la distance euclidienne à 0 et, surtout, $R_{ijkl,m} = (\nabla_m Rm_g)_{ijkl}$.

Le Théorème 11.7 peut être utilisé tel quel, mais il est bien sûr un peu gênant de ne pas avoir construit l'application exponentielle auparavant. On trouvera une construction détaillée de l'application exponentielle dans la plupart des ouvrages de géométrie riemanienne. Le développement (11.2) de la métrique dans la carte exponentielle est par contre rarement discuté. Pour plus de détails sur ce développement (et le calcul des termes d'ordre 4) on renvoie à Lee et Parker [*The Yamabe Problem*, Bulletin of the American Mathematical Society, 17, 1, 1987].

4. L'intégrale riemannienne

Les variétés riemanniennes possèdent une mesure particulière au même titre que $\mathbb{R}^n$ possède sa mesure naturelle de Lebesgue. Soient donc M une variété et $\mathcal{A} = (\Omega_i, \varphi_i)_{i \in I}$ un atlas de M, à savoir donc un sous atlas du C^∞-atlas saturé de M. On dit qu'une famille $(\Omega_j, \varphi_j, \eta_j)_{j \in J}$ est une partition de l'unité subordonnée à l'atlas $\mathcal{A}$ si:

(i) $(\eta_j)_{j\in J}$ est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(\Omega_i)_{i\in I}$,
(ii) les η_j sont de classe C^∞,
(iii) $(\Omega_j, \varphi_j)_{j\in J}$ est un sous atlas de $\mathcal{A}$,
(iv) pour tout j, $\mathrm{Supp}(\eta_j) \subset \Omega_j$.

On montre sans difficulté que pour tout atlas $\mathcal{A}$ de M il existe une partition de l'unité qui lui est subordonnée. L'intégrale riemannienne se définit de la façon suivante et on récupère toute la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

DÉFINITION 11.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n et soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact dans M. Etant donné $\mathcal{A} = (\Omega_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un atlas de M, on pose*

$$\int_M f dv_g = \sum_{j\in J} \int_{\varphi_j(\Omega_j)} \left(\eta_j \sqrt{|g|} f\right) \circ \varphi_j^{-1} dx \tag{11.3}$$

où $(\Omega_j, \varphi_j, \eta_j)_{j\in J}$ est une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{A}$, $|g|$ désigne le déterminant de la matrice formée des composantes de g dans (Ω_j, φ_j) et dx désigne la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$. L'opération $f \to \int_M f dv_g$ définit alors une mesure de Radon positive qui ne dépend ni du choix de l'atlas $\mathcal{A}$ ni du choix de la partition de l'unité qui lui est subordonnée. L'intégrale et la mesure qui lui sont associée sont respectivement appelées intégrale et mesure riemanniennes de (M, g).

La fonction f étant à support compact, la somme dans (11.3) est en fait finie par définition des partitions de l'unité (Définition 6.18). En effet, si $K = \mathrm{Supp}(f)$, alors pour tout $x \in K$ il existe V_x un ouvert contenant x et tel que V_x n'intersecte qu'un nombre fini des supports $\mathrm{Supp}(\eta_j)$. Comme K est compact il existe par définition première des compacts (Définition 6.16) des $x_1, \dots, x_N \in K$ tels que $K \subset V_{x_1} \bigcup \cdots \bigcup V_{x_N}$. Donc K n'intersecte qu'un nombre fini des supports $\mathrm{Supp}(\eta_j)$ et ainsi $\eta_j f = 0$ en tout point de Ω_j sauf pour au plus un nombre fini de j.

L'affirmation la plus surprenante ici est tout de même que l'intégrale ne dépend ni du choix de l'atlas $\mathcal{A}$ ni du choix de la partition de l'unité qui lui est subordonnée. On la démontre comme suit. En tout premier lieu on remarque que si (Ω, φ) et $(\tilde{\Omega}, \psi)$ sont deux cartes de M et si $f : M \to \mathbb{R}$ est continue à support compact dans $\Omega \cap \tilde{\Omega}$ alors

$$\int_{\varphi(\Omega)} \left(\sqrt{|g|} f\right) \circ \varphi^{-1} dx = \int_{\psi(\tilde{\Omega})} \left(\sqrt{|g|} f\right) \circ \psi^{-1} dx \ , \tag{11.4}$$

où, dans le membre de gauche de (11.4), $|g|$ désigne le déterminant de la matrice formée des composantes de g dans (Ω, φ) et, dans le membre de droite de (11.4), $|g|$ désigne le déterminant de la matrice formée des composantes de g dans $(\tilde{\Omega}, \psi)$. Pour le voir on note qu'en vertue des formules tensorielles (10.1), en tout point $x \in \Omega \cap \tilde{\Omega}$,

$$\tilde{g}_{ij}(x) = g_{\alpha\beta}(x) \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y_i}\right)_x \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial y_i}\right)_x \ ,$$

où les g_{ij} sont les composantes de g dans (Ω, φ), les $\tilde{g}_{ij}$ sont les composantes de g dans $(\tilde{\Omega}, \psi)$, les x_i sont les coordonnées associées à (Ω, φ) et les y_i sont les coordonnées associées à $(\tilde{\Omega}, \psi)$. Par suite,

$$\det\left(\tilde{g}_{ij}(x)\right) = \mathrm{Jac}\left(\varphi \circ \psi^{-1}\right)\left(\psi(x)\right)^2 \times \det\left(g_{ij}\right) \ ,$$

où le jacobien est comme à la Définition 2.4. La relation (11.4) est alors une conséquence directe de la formule de changement de variables dans l'intégrale de

Lebesgue. Soient maintenant $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ deux atlas de M et $(\Omega_i, \varphi_i, \eta_i)_{i\in I}$ ainsi que $(\tilde{\Omega}_j, \psi_j, \hat{\eta}_j)_{j\in J}$ deux partitions de l'unité respectivement subordonnées aux atlas $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$. En vertue de (11.4),

$$\int_{\varphi(\Omega_i)} \big(\eta_i\hat{\eta}_j\sqrt{|g|}f\big)\circ\varphi_i^{-1}dx = \int_{\psi_j(\tilde{\Omega}_j)} \big(\eta_i\hat{\eta}_j\sqrt{|g|}f\big)\circ\psi_j^{-1}dx \ , \tag{11.5}$$

Comme $\sum_i \eta_i = \sum_j \hat{\eta}_j = 1$, on obtient avec (11.5) que

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}\int_{\varphi(\Omega_i)} \big(\eta_i\sqrt{|g|}f\big)\circ\varphi_i^{-1}dx &= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\int_{\varphi(\Omega_i)} \big(\eta_i\hat{\eta}_j\sqrt{|g|}f\big)\circ\varphi_i^{-1}dx \\ &= \sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\int_{\psi_j(\tilde{\Omega}_j)} \big(\eta_i\hat{\eta}_j\sqrt{|g|}f\big)\circ\psi_j^{-1}dx \\ &= \sum_{j\in J}\int_{\psi_j(\tilde{\Omega}_j)} \big(\hat{\eta}_j\sqrt{|g|}f\big)\circ\psi_j^{-1}dx\end{aligned} \tag{11.6}$$

et (11.6) traduit bien l'indépendance de la définition de l'intégrale riemannienne vis à vis du choix de l'atlas $\mathcal{A}$ et du choix de la partition de l'unité qui lui est subordonnée.

La formule de Stokes pour les formes donne une formule d'intégration par parties pour l'intégrale de Riemann.

Théorème 11.8 (Intégration par parties). *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n. Alors our toutes fonctions $u, v \in C^2(M)$,*

$$\begin{aligned}\int_M (\Delta_g u)v dv_g &= \int_M \big(\nabla u, \nabla v\big) dv_g \\ &= \int_M u(\Delta_g v) dv_g \ ,\end{aligned} \tag{11.7}$$

où Δ_g est le laplacien riemannien défini en (10.4), ∇u et ∇v sont les champs de tenseurs 1-fois covariants définis à la Section 7 du Chapitre 10 et $\big(\nabla u, \nabla v\big)$ est le produit scalaire ponctuel pour les tenseurs 1-fois covariants associé à g donné par $\big(\nabla u, \nabla v\big) = C_1^1 C_2^2 g^{-1}\otimes(\nabla u)\otimes(\nabla v)$.

Une des conséquences remarquables du Théorème 11.8 est que pour toute fonction u de classe C^2 sur M, variété compacte, $\int_M (\Delta_g u) dv_g = 0$. Ces résultats se situent dans le cas sans bord.

5. L'algèbre des formes extérieures

Une forme multilinéaire sur un espace vectoriel E, donc une application multilinéaire $\varphi : E^p \to \mathbb{R}$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^\star$, est dite alternée si pour toute permutation σ de $\{1, \dots, p\}$, et tous $u_1, \dots, u_p \in E$,

$$\varphi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(u_1, \dots, u_p) \ ,$$

où $\varepsilon(\sigma)$ est le signe de la permutation σ. La notion de 1-forme alternée n'apporte rien. Une 1-forme alternée est tout simplement une 1-forme. La spécificité des p-formes alternées commence avec $p \geq 2$. Pour $p = 2$, φ est alternée si pour tous $u_1, u_2 \in E$, $\varphi(u_1, u_2) = -\varphi(u_2, u_1)$. En particulier, $\varphi(u, u) = 0$ pour tout u. Plus généralement, si φ est une p-forme alternée, $p \geq 2$, alors $\varphi(u_1, \dots, u_p) = 0$ si pour un $i \neq j$, $u_i = u_j$ (car le signe d'une permutation qui échange deux éléments, on parle de transposition, est -1) et donc, en particulier, $\varphi(u_1, \dots, u_p) = 0$ si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est liée. On en déduit que si E est de dimension finie n et si $p > n$, alors la seule p-forme alternée sur E est la forme nulle.

L'espace $\Lambda^p E$ des p-formes sur E est clairement un sous espace vectoriel de l'espace $L(E^p; \mathbb{R})$ des formes multilinéaires sur $E \times \cdots \times E$ (p fois). Si $\Phi \in L(E^p; \mathbb{R})$ est une forme multilinéaire sur $E \times \cdots \times E$ (p fois) on définit l'antisymétrisé de Φ comme étant la p-forme alternée sur E donnée par

$$AS(\Phi).(u_1, \dots, u_p) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_p} \varepsilon(\sigma) \Phi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)})$$

pour tous $u_1, \dots, u_p \in E$, où $\mathcal{P}_p$ est l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, p\}$ et $\varepsilon(\sigma)$ est le signe de σ. Sachant que $\varepsilon(\tau \circ \sigma) = \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)$ (et que $\tau \circ \mathcal{P}_p = \mathcal{P}_p$) il est facile de vérifier que $AS(\Phi)$ est bien alternée.

L'antisymétrisé permet de définir le produit extérieur d'une p-forme avec une q-forme. Si $\hat{\eta}$ est une p-forme sur E et si $\tilde{\eta}$ est une q-forme sur E on définit $\hat{\eta} \wedge \tilde{\eta}$ comme étant la $(p+q)$-forme sur E donnée par

$$\hat{\eta} \wedge \tilde{\eta} = \frac{(p+q)!}{p!q!} AS\big(\hat{\eta} \otimes \tilde{\eta}\big) \ , \tag{11.8}$$

où, dans le membre de droite, on regarde $\hat{\eta}$ et $\tilde{\eta}$ comme des tenseurs p-fois et q-fois covariants sur E (donc des formes multilinéaires sur E, ce qu'elles sont). Le produit extérieur $\wedge$ est alors bilinéaire, donc en particulier distributif sur l'addition, associatif et il vérifie que $\hat{\eta} \wedge \tilde{\eta} = (-1)^{pq} \tilde{\eta} \wedge \hat{\eta}$ pour toute p-forme $\hat{\eta}$ sur E et toute q-forme $\tilde{\eta}$ sur E.

Si maintenant $\eta_1, \dots, \eta_p$ sont des 1-formes sur E, on définit $\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_p$ comme étant la p-forme sur E donnée par

$$\big(\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_p\big).(u_1, \dots, u_p) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_p} \varepsilon(\sigma) \eta_1\big(u_{\sigma(1)}\big) \dots \eta_p\big(u_{\sigma(p)}\big) \ , \tag{11.9}$$

où, comme ci-dessus, $\mathcal{P}_p$ est l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, p\}$ et $\varepsilon(\sigma)$ est le signe de σ. Supposons maintenant que E est de dimension finie n et soit $1 \le p \le n$. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, et $(e_1^\star, \dots, e_n^\star)$ est la base duale définie à la Section 2 du Chapitre 9, on vérifie facilement que

$$\begin{cases} e_{i_1}^\star \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^\star.(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = 1 \text{ si } (i_1, \dots, i_p) = (j_1, \dots, j_p) \\ e_{i_1}^\star \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^\star.(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

pour tous $I_1, \dots, i_p$ et tous $j_1, \dots, j_p$ ordonnés dans $\{1, \dots, n\}$, à savoir tels que $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$ et $1 \le j_1 < \cdots < j_p \le n$. La famille des $e_{i_1}^\star \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^\star$ pour $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$ est donc une famille libre dans l'espace des p-formes. Par multilinéarité elle est aussi génératrice. Et donc la famille des $e_{i_1}^\star \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^\star$ pour $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$ est une base de $\Lambda^p E$. En particulier, l'espace $\Lambda^p E$ des p-formes alternées sur E est de dimension $\binom{n}{p}$ si $1 \le p \le n$ et n est la dimension de E.

6. Formes différentielles extérieures

Etant donnés une variété M de dimension n, $x \in M$ et $p \in \{1, \dots, n\}$, on note $\Lambda^p T_x(M)$ l'espace des p-formes alternées sur $T_x(M)$, puis

$$\Lambda^p M = \bigcup_{x \in M} \Lambda^p T_x(M)$$

la réunion disjointe des $\Lambda^p T_x(M)$ pour $x \in M$. Si (Ω, φ) est une carte en x de coordonnées associées x_i, l'espace $\Lambda^p T_x(M)$ a pour base les $dx_x^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_x^{i_p}$ où $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$, où les $dx_x^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_x^{i_p}$ sont définis comme en (11.9).

La construction maintenant classique des fibrés au dessus d'une variété donne que $\Lambda^p M$ a une structure naturelle de variété de dimension $n + \binom{n}{p}$, l'atlas a partir duquel cette structure est construite étant l'atlas des $\left(\bigcup_{x \in \Omega} \Lambda^p T_x(M), \Phi\right)$ où $\Phi(\eta)$ est constitué des coordonnées de x dans (Ω, φ) suivies des coordonnées de η dans la base des $dx_x^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_x^{i_p}$, $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$. Si $\Pi : \Lambda^p M \to M$ est la projection canonique qui à $\eta \in \Lambda^p T_x(M)$ associe $\Pi(\eta) = x$, on appelle p-forme différentielle extérieure de classe C^k sur M toute application $\eta : M \to \Lambda^p M$ de classe C^k qui véfifie $\Pi \circ \eta = \mathrm{Id}_M$ (l'identité de M). On parle souvent de p-forme de classe C^k pour alléger la terminologie.

Soit $\Omega^p M$ l'espace des p-formes qui sont de classe C^∞ sur M. L'opération de différentiation extérieure, noté d, agit de $\Omega^p M$ dans $\Omega^{p+1} M$ avec la convention que $\Omega^0 M$ est l'espace des fonctions de classe C^∞ sur M. Il est entiérement défini par le fait que si $f \in C^\infty(M)$ alors df est tel que défini à la Section 4 du Chapitre 8, par le fait que pour toute fonction f de classe C^∞ sur M, $d(df) = 0$ et enfin par le fait que

$$d\big(\hat\eta \wedge \tilde\eta\big) = d\hat\eta \wedge \tilde\eta + (-1)^p \hat\eta \wedge d\tilde\eta$$

pour tout $\hat\eta \in \Omega^p M$ et tout $\tilde\eta \in \Omega^q M$, où les $\hat\eta(x) \wedge \tilde\eta(x)$ pour $x \in M$ sont définis comme en (11.8). Par suite, si

$$\eta = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \eta_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

alors

$$d\eta = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} d\eta_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \ . \tag{11.10}$$

On en déduit que pour tout $\eta \in \Omega^p M$, et tout p, $d(d\eta) = 0$. Donc $d^2 = 0$ où $d^2 = dd$. Une p-forme $\eta \in \Omega^p M$ est dite fermée si $d\eta = 0$ et exacte s'il existe $\tilde\eta \in \Omega^{p-1} M$ telle que $\eta = d\tilde\eta$. Le lemme de Poincaré stipule que toute forme fermée est localement exacte.

Théorème 11.9 (Lemme de Poincaré). *Soit M une variété et $\eta \in \Omega^p M$ telle que $d\eta = 0$. Pour tout $x \in M$ il existe un voisinage ouvert U de x dans M et $\tilde\eta \in \Omega^{p-1} U$ une $(p-1)$-forme de classe C^∞ sur U tels que $\eta = d\tilde\eta$ sur U.*

Les variétés orientables de dimension n sont des variétés paracompactes pour lesquelles il existe un sous atlas de l'atlas saturé dont tous les changements de cartes ont des jacobiens positifs. Cela revient encore à dire que M possède une n-forme ω qui ne s'annule jamais (on parle de forme volume). Toutes les variétés ne sont pas orientables, c'est par exemple le cas de l'espace projectif en dimension paire, mais lorsqu'une variété n'est pas orientable elle est le quotient à deux feuillets d'une variété qui l'est (son revêtement orientable à deux feuillets), ce qui permet de passer nombres de résultats démontrés dans le cas orientable sur le cas général. Le revêtement orientable à deux feuillets de l'espace projectif de dimension paire est par exemple la sphère de même dimension. Quand on a une orientation on peut intégrer les n-formes à support compact. La formule de Stokes est une formule d'intégration par parties importante qui, dans le cas sans bord que l'on considère ici, stipule que si M est compacte de dimension n et orientable, alors l'intégrale de toute n-forme exacte sur M est nulle. C'est cette formule, avec la théorie des revêtements orientables à deux feuillets, qui permet d'obtenir la formule d'intégration par parties du Théorème 11.8.

On se place maintenant dans le cadre riemannien pour définir la co-différentielle. Etant donnée une variété riemannienne (M,g) l'opérateur de co-différentiation δ agit sur les champs différentiables de tenseurs covariants, et donc aussi sur les p-formes. Si T est un champs différentiables de tenseurs p-fois covariants sur M, avec $p\geq 1$, on définit δT comme état le champs de tenseurs $(p-1)$-fois covariant sur M donné par

$$\delta T = -C_1^1C_2^2\big(g^{-1}\otimes(\nabla T)\big)\ , \tag{11.11}$$

où ∇T est comme à la Définition 10.9 et les C_i^j sont les opérateurs de contraction tels que dans la Définition 10.4. Dans une carte, avec les notations usuelles pour les composantes, on a donc

$$\big(\delta T\big)_{i_1\cdots_{p-1}} = -g^{\alpha\beta}\big(\nabla_\alpha T\big)_{\beta i_1\cdots_{p-1}}$$

pour tous $i_, \dots, i_{p-1}$ dans $\{1,\dots,n\}$. En particulier, δT est de classe C^{k-1} si T est de classe C^k. Pour $p=1$, donc si T est une 1-forme, alors δT est une fonction dont l'expression dans une carte est $\delta T = -g^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha T)_\beta$. Considérons maintenant le cas des p-formes η avec $p\geq 2$. Une p-forme étant aussi un champ de tenseurs p-fois covariants (une application multilinéaire alternée est une application multilinéaire) on peut considérer $\delta\eta$. Pour $x\in M$, et dans une carte normale en x,

$$\big(\delta\eta\big)(x)_{i_1\dots i_{p-1}} = -\sum_{\alpha=1}^n\big(\frac{\partial\eta_{\alpha i_1\dots i_{p_1}}}{\partial x_\alpha}\big)_x$$

pour tous $i_, \dots, i_{p-1}$ dans $\{1,\dots,n\}$. Par suite $\delta\eta(x)$ est elle aussi alternée et donc, si η est une p-forme, alors $\delta\eta$ est une $(p-1)$-forme. En conclusion, si η est une p-forme de classe C^k, $p\geq 1$, alors $\delta\eta$ est une $(p-1)$-forme de classe C^{k-1}. Les 0-formes sont ici des fonctions, et par convention on pose que $\delta f=0$ si f est une fonction.

Toujours dans le cadre riemannien on peut définir le laplacien $\Delta_g\eta$ des p-formes deux fois différentiables. On pose

$$\Delta_g\eta = (d\delta+\delta d)\eta\ , \tag{11.12}$$

où d est l'opérateur de différentiation extérieure (11.10) et δ est la co-différentielle (11.11). Le laplacien $\Delta_g\eta$ d'une p-forme η est une p-forme (qui a perdu deux degrés de régularité). Pour les fonctions, $\Delta_g f = \delta df$ et on retrouve la formule (10.4).

Si T est un champ de tenseurs p-fois covariants sur M, on note $T^\sharp$ le champ de tenseurs p-fois contravariants sur M donné par la série de contractions

$$T^\sharp = C_1^1C_2^3\dots C_p^{2p-1}(g^{-1}\otimes\cdots\otimes g^{-1}\otimes T)\ .$$

Dans une carte $\big(T^\sharp\big)^{j_1\dots j_p} = g^{i_1j_1}\dots g^{i_pj_p}T_{i_1\dots i_p}$. On parle souvent d'isomorphisme musical pour l'opérateur $T \to T^\sharp$. Supposons maintenant que M est orientée et donc que l'on s'est donné une n-forme ω_g sur M qui ne s'annule jamais (en tant que n-forme). Donc ici n est la dimension de M. Si η est une p-forme sur M, l'adjoint $\star\eta$ de η est la $(n-p)$-forme sur M définie par

$$\star\eta = \frac{1}{p!}C_1^1\dots C_p^p\big(\omega_g \times \eta^\sharp\big)\ , \tag{11.13}$$

où ω_g et η sont regardées comme des champs de tenseurs. Dans une carte

$$\big(\star\eta\big)_{i_{p+1}\dots i_n} = \frac{1}{p!}\omega_{\alpha_1\dots\alpha_p i_{p+1}\dots i_n}\eta^{\alpha_1\dots\alpha_p}\ ,$$

où les $\omega_{i_1\dots i_n}$ sont les composantes de ω_g dans la carte et où les $\eta^{i_1\dots i_p}$ sont les composantes de $\eta^\sharp$ dans la carte. On en déduit que $\star\eta$ est bien une $(n-p)$-forme. Clairement $\star\eta$ est de classe C^k si η est de classe C^k. Si f est une fonction (donc une 0-forme), $\star f = f\omega_g$.

L'espace des p-formes sur M possède un produit scalaire naturel en riemannien. Si α et β sont deux p-formes sur M on définit le produit scalaire ponctuel (α,β) de α et β par

$$\big(\alpha,\beta\big)(x) = \frac{1}{p!}C_1^1\dots C_p^p\alpha(x)\otimes\beta^\sharp(x) \tag{11.14}$$

pour tout $x \in M$. Dans une carte normale en x, $\big(\alpha,\beta\big)(x) = \alpha(x)_{i_1\dots i_p}\beta(x)^{i_1\dots i_p}$ où les $\alpha(x)_{i_1\dots i_p}$ sont les composantes de $\alpha(x)$ dans la carte et où les $\beta(x)^{i_1\dots i_p}$ sont les composantes de $\beta^\sharp(x)$ dans la carte.

Lemme 11.1. *Soit (M,g) une variété riemannienne orientée de dimension n et soit ω_g la forme volume définissant son orientation. Alors*
(i) pour tout p-forme α sur M, $\star\star\alpha = (-1)^{p(n-p)}\alpha$,
(ii) pour toutes p-formes α et β sur M, $\alpha\wedge(\star\beta) = (\alpha,\beta)\omega_g$,
(iii) pour toute p-forme différentiable α sur M, $\delta\alpha = (-1)^{k(n,p)}(\star d\star)\alpha$,
où $k(n,p) = p + (p-1)(n-p+1)$, d est la différentielle (11.10)*, δ est la codifférentielle* (11.11)*, $(\cdot,\cdot)$ est le produit scalaire ponctuel* (11.14)*, $\wedge$ est le produit extérieur* (11.8) *et $\star$ est l'adjoint* (11.13)*. En particulier, $\star$ réalise un isomorphisme de Ω^pM sur $\Omega^{n-p}M$ et $\delta^2 = 0$ où $\delta^2 = \delta\delta$.*

Le lemme fournit des relations structurelles importantes entre les différents objets de cette section. Les relations (i)-(iii) se démontrent sans grandes difficultés. Pour (i) on pourra par exemple fixer $x \in M$, travailler dans une carte en x dans laquelle $\omega_{1\dots n} = 1$ puis remarquer que la permutation qui envoie le n-uplet $(i_{p+1},\dots,i_n,i_1,\dots,i_p)$ sur $(i_1,\dots,i_n)$ s'obtient en effectuant p permutations circulaires successives. Le signe d'une permutation circulaire de $\mathcal{P}_n$ est $(-1)^{n+1}$. On trouve donc comme signe $(-1)^{(n+1)p}$ et il reste à remarquer $(n+1)p$ est congru à $p(n-p)$ modulo 2 puisque le produit $p(p+1)$ est forcément pair. La bijection $\star : \Omega^pM \to \Omega^{n-p}\Omega$ est donnée par (i) avec $\star^{-1} = \star$ si $p(n-p)$ est pair et $\star^{-1} = -\star$ si $p(n-p)$ est impair. L'identité $\delta^2 = 0$ suit de l'identité $d^2 = 0$ avec (i) et (iii) qui permettent d'écrire que

$$\delta\alpha = (-1)^p(\star^{-1}d\star)\alpha$$

pour toute p-forme différentiable α. Avec cette dernière relation on obtient la commutation relative $\star\delta = (-1)^pd\star$ sur les p-formes. Avec (i) et (iii) on obtient aussi que $\delta\star = (-1)^{p+1}\star d$ sur les p-formes puisque $k(n, n-p) + p(n-p)$ est congru à $p+1$ modulo 2. On en déduit que le laplacien Δ_g défini en (11.12) commute avec $\star$ au sens où pour toute p-forme deux fois différentiable α, $\Delta_g(\star\alpha) = \star(\Delta_g\alpha)$.

La formule de Stokes dont nous avons brièvement parlé un peu plus haut dans cette section, dans le cas des variétés compactes orientées (sans bord), donne que pour toute p-forme α de classe C^1 et toute $(p+1)$-forme β de classe C^1 sur M,

$$\int_M (d\alpha, \beta)\omega_g = \int_M (\alpha, \delta\beta)\omega_g \ , \tag{11.15}$$

où ω_g est la n-forme volume qui donne l'orientation de M, n est la dimension de M, $(\cdot,\cdot)$ est le produit scalaire ponctuel (11.14), d est la différentielle (11.10) et δ est la co-différentielle (11.11). C'est cette formule qui donne dirèctement (11.7).

7. Théorie de de Rham

La théorie de de Rham développe un calcul différentiel sur les p-formes. Etant donnée (M, g) une variété riemannienne compacte on dira qu'une p-forme α est harmonique si $\Delta_g\alpha = 0$, fermée si $d\alpha = 0$ et co-fermée si $\delta\alpha = 0$, où d, δ et Δ_g ont été définis en (11.10), (11.11) et (11.12).

Théorème 11.10. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte. Une p-forme de classe C^2 est harmonique si et seulement si elle est tout à la fois fermée et co-fermée.*

Le théorème est une conséquence simple de la formule (11.15) d'intégration par parties dans le cas orientable et il se déduit par passage au revêtement orientable à deux feuillets dans le cas non orientable. Si (M, g) est orientée de dimension n et ω_g est la n-forme volume qui donne l'orientation de M, on écrit avec (11.15) et la définition (11.12) du laplacien sur les formes que pour toute p-forme α de classe C^2 sur M,

$$\begin{aligned}\int_M \big(\Delta_g\alpha, \alpha\big)\omega_g &= \int_M \big(d\delta\alpha, \alpha\big)\omega_g + \int_M \big(\delta d\alpha, \alpha\big)\omega_g \\ &= \int_M \big(\delta\alpha, \delta\alpha\big)\omega_g + \int_M \big(d\alpha, d\alpha\big)\omega_g\end{aligned}$$

et on voit donc que $\Delta_g\alpha = 0$ si et seulement si $d\alpha = 0$ et $\delta\alpha = 0$. Une p-forme de classe C^2 sur une variété riemannienne compacte est donc harmonique si et seulement si elle est tout à la fois fermée et co-fermée. On définit maintenant

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ker}(\Delta_g^p) = \{\eta \in \Omega^p M \ / \ \Delta_g\eta = 0\} \ , \\ &\mathrm{Im}(d^{p-1}) = \big\{\eta \in \Omega^p M \ / \ \exists\hat\eta \in \Omega^{p-1}M, d\hat\eta = \eta\big\} \ , \\ &\mathrm{Im}(\delta^{p+1}) = \big\{\eta \in \Omega^p M \ / \ \exists\hat\eta \in \Omega^{p+1}M, \delta\hat\eta = \eta\big\}\end{aligned} \tag{11.16}$$

avec la convention $\mathrm{Im}(d^{p-1}) = \{0\}$ si $p = 0$, de sorte que $\mathrm{Ker}(\Delta_g^p)$ est l'espace des p-formes harmoniques, $\mathrm{Im}(d^{p-1})$ est l'espace des p-formes exactes (qui sécrivent $d\hat\eta$ pour un $\hat\eta$ convenable) et $\mathrm{Im}(\delta^{p+1})$ est l'espace des p-formes co-exactes (qui sécrivent $\delta\hat\eta$ pour un $\hat\eta$ convenable). Le théorème de de Rham, aussi parfois appelé de Hodge-de Rham, s'énonce de la façon suivante. On en trouvera une preuve dans l'ouvrage de de Rham [*Differentiable manifolds*, Springer, 1984].

THÉORÈME 11.11 (Théorème de de Rham). *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension n et $1 \leq p \leq n$ un entier. On a alors la décomposition*

$$\Omega^p M = Ker(\Delta_g^p) \oplus Im(d^{p-1}) \oplus Im(\delta^{p+1}) \tag{11.17}$$

et toute p-forme η de classe C^∞ sur M se décompose ainsi en $\eta = \alpha + d\beta + \delta\gamma$, où $\alpha \in \Omega^p M$ est harmonique, $\beta \in \Omega^{p-1}M$ et $\gamma \in \Omega^{p+1}M$.

Pour $p = 0$ on a encore une décomposition de de Rham, mais un peu plus précise, toute fonction f de classe C^∞ sur M s'écrivant sous la forme $f = C + \delta du$ où C est une constante convenable (donc harmonique) et u est une fonction C^∞ convenable (en particulier δdu est co-exacte). Le caractère directe de la somme (11.17) dans le Théorème de de Rham 11.11 s'obtient facilement dans le cas orientable en remarquant que la décomposition (11.17) est orthogonale pour le produit scalaire global

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M (\alpha, \beta)\omega_g \ .$$

Avec (11.15) et le Théorème 11.10 on a en effet que si $\alpha \in \Omega^p M$ est harmonique, $\beta \in \Omega^{p-1}M$ et $\gamma \in \Omega^{p+1}M$ alors

$$\begin{aligned} \langle \alpha, d\beta \rangle &= \int_M (\alpha, d\beta)\omega_g \\ &= \int_M (\delta\alpha, \beta)\omega_g \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque α étant harmonique elle est aussi co-fermée. Avec les mêmes arguments $\langle \alpha, \delta\gamma \rangle = 0$. Enfin, toujours en utilisant (11.15), $\langle d\beta, \delta\gamma \rangle = 0$ puisque, au choix, $d^2 = 0$ ou $\delta^2 = 0$.

8. L'approche de Bochner

Soit (M,g) une variété riemannienne et T un champ de tenseurs p-fois covariants et q-fois contravariants sur M. On suppose que T est deux fois différentiable sur M. On peut alors définir le laplacien brut $\overline{\Delta}_g T$ comme étant le champ de tenseur p-fois covariants et q-fois contravariants dont les composantes dans une carte sont données par

$$\big(\overline{\Delta}_g T\big)_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} = -g^{\alpha\beta}\big(\nabla^2 T\big)_{\alpha\beta i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} \tag{11.18}$$

pour tous $i_1, \ldots, i_p$, tous $j_1, \ldots, j_q$, en tout point de la carte et où $\nabla^2 T = \nabla(\nabla T)$ et le gradient ∇ d'un champ de tenseur est donné à la Définition 10.9. En écriture intrinsèque, qui montre donc l'indépendance de (11.18) par rapport au choix de la carte, $\big(\overline{\Delta}_g T\big) = -C_1^1 C_2^2 g^{-1} \otimes \nabla^2 T$.

Le laplacien brut (11.18) agit en particulier sur les p-formes qui sont deux fois différentiables dès lors qu'on les regarde comme des champs différentiables de tenseurs p-fois covariants. Si $\eta \in \Omega^p M$ et si $x \in M$, on obtient avec (10.2) que dans une carte normale en x,

$$\big(\overline{\Delta}_g \eta\big)(x)_{i_1\ldots i_p} = -\sum_{\alpha=1}^n \Big[\Big(\frac{\partial^2 \eta_{i_1\ldots i_p}}{\partial x_\alpha^2}\Big)_x - \sum_{s=1}^p \Big(\frac{\partial \Gamma_{\alpha i_s}^\beta}{\partial x_\alpha}\Big)_x \eta(x)_{i_1\ldots i_{s-1}\beta i_{s+1}\ldots i_p}\Big] \ ,$$

où les Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel dans la carte de la connexion de Levi-Civita et les $\eta_{i_1\dots i_p}$ sont les composantes de η dans la carte. Lorsque $p=0$, donc lorsque le laplacien brut opère sur les fonctions, on récupère le laplacien de Laplace-Beltrami (10.4). Par contre, lorsque $p=1$, on récupère une formule de Weitzenböck non triviale reliant les deux laplaciens (11.18) et (11.12). Pour $\eta \in \Omega^1 M$ on note $Rc_g(\eta)$ la 1-forme de composantes dans une carte

$$Rc_g(\eta)_i = g^{\alpha\beta} R_{i\alpha}\eta_\beta \ , \tag{11.19}$$

où les R_ij sont les composantes de la courbure de Ricci dans la carte. En écriture intrinsèque, qui montre donc l'indépendance de (11.19) par rapport au choix de la carte, $Rc_g(\eta) = C_2^1 C_3^2 g^{-1} \otimes Rc_g \otimes \eta$.

Théorème 11.12 (Formule de Weitzenböck pour les 1-formes). *Soit* (M,g) *une variété riemannienne et* α *une* 1*-forme différentiable sur* M*. Alors* $\Delta_g\alpha = \overline{\Delta}_g\alpha + Rc_g(\alpha)$*, où* Δ_g *et* $\overline{\Delta}_g$ *sont donnés par* (11.12) *et* (11.18) *et* $Rc_g(\alpha)$ *est donné par* (11.19).

On démontre brièvement le Théorème 11.12 dans ce qui suit. On fixe $x \in M$ quelconque. Par définition,

$$\begin{aligned} d\alpha &= \Big(\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i} - \frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}\Big) dx^i \otimes dx^j \ , \\ \delta\alpha &= -g^{ij}\Big(\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i} - \Gamma_{ij}^k\alpha_k\Big) \ , \end{aligned} \tag{11.20}$$

et si on choisit une carte normale en x alors, avec (11.20), on obtient que

$$\begin{aligned} d\delta\alpha(x)_i &= -\sum_{m=1}^n \Big[\Big(\frac{\partial^2\alpha_m}{\partial x_i \partial x_m}\Big)_x - \Big(\frac{\partial\Gamma_{mm}^k}{\partial x_i}\Big)_x \alpha_k(x)\Big] \ , \\ \delta d\alpha(x)_i &= -\sum_{m=1}^n \Big[\Big(\frac{\partial^2\alpha_i}{\partial x_m^2}\Big)_x - \Big(\frac{\partial^2\alpha_m}{\partial x_m \partial x_i}\Big)_x\Big] \end{aligned} \tag{11.21}$$

pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, n la dimension de M, où les Γ_{ij}^k désignent les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita dans la carte. On a encore, toujours dans une carte normale en x,

$$\big(\overline{\Delta}_g\alpha\big)(x)_i = -\sum_{m=1}^n \Big[\Big(\frac{\partial^2\alpha_i}{\partial x_m^2}\Big)_x - \Big(\frac{\partial\Gamma_{mi}^k}{\partial x_m}\Big)_x \alpha_k(x)\Big] \tag{11.22}$$

pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$. On déduit des relations (11.21) et (11.22) que

$$\big(\Delta_g\alpha\big)(x)_i - \big(\overline{\Delta}_g\alpha\big)(x)_i = \sum_{m=1}^n \Big[\Big(\frac{\partial\Gamma_{mm}^k}{\partial x_i}\Big)_x - \Big(\frac{\partial\Gamma_{mi}^k}{\partial x_m}\Big)_x\Big]\alpha_k(x) \tag{11.23}$$

pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$. Par ailleurs, et pour tous i,j,k,l, toujours dans une carte normale en x,

$$R_{jkl}^i(x) = \Big(\frac{\partial\Gamma_{jl}^i}{\partial x_k}\Big)_x - \Big(\frac{\partial\Gamma_{jk}^i}{\partial x_l}\Big)_x \tag{11.24}$$

en vertue de la formule de la Définition 10.8, où les R_{jkl}^i sont les composantes de la courbure de la connexion de Levi-Civita de g dans la carte. Si les R_{ij} sont les composantes de la courbure de Ricci dans la carte (normale en x), en vertue des symétries premières de la courbure de Riemann vues à la Section 1, on peut écrire que $R(x)_{ij} = \sum_m R(x)^j_{mim}$, et donc

$$Rc_g(\alpha)(x)_i = \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{m=1}^{n} R(x)^k_{mim}\Big)\alpha(x)_k \ . \tag{11.25}$$

La formule de Weitzenböck du Théorème 11.12 suit des relations (11.23)-(11.25) et le Théorème 11.12 est démontré.

Une des conséquences de la formule de Weitzenböck du Théorème 11.12 est le théorème d'annulation suivant qui fut obtenu par Bochner au milieu des années 1940. La stratégie adoptée pour sa preuve illustre parfaitement ce que l'on appelle maintenant couramment la méthode de Bochner: étant donnée une solution d'un système différentiel d'origine géométrique, on cherche une identité de Weitzenböck adaptée au système afin d'imposer, sous certaines hypothèse de courbure, la nullité de la solution en question. Par courbure de Ricci strictement positive on entend en tout point et au sens des formes bilinéaires.

THÉORÈME 11.13. *Une variété riemannienne compacte à courbure de Ricci strictement positive ne possède pas de* 1*-forme harmonique non triviale. En d'autres termes, et si* (M,g) *désigne une variété riemannienne compacte à courbure de Ricci strictement positive, alors* $b_1(M) = 0$.

On démontre donc brièvement ce résultat dans ce qui suit. En tout premier lieu on vérifie facilement que pour toute 1-forme $\alpha \in \Omega^1 M$,

$$\frac{1}{2}\Delta_g(\alpha,\alpha) = \big(\overline{\Delta}_g\alpha,\alpha\big) - |\nabla\alpha|^2 \ , \tag{11.26}$$

où $(\cdot,\cdot)$ est le produit scalaire ponctuel (11.14) sur les formes, où $\nabla\alpha$ est donné par la Définition 10.9 et où $|\cdot|$ est la norme ponctuelle associée à g donnée ici dans une carte, pour les champs de tenseurs deux fois covariants, par $|T| = T_{ij}T^{ij}$ où les T^{ij} sont les composantes dans la carte du champs de tenseurs contravariants $T^\sharp$ construit via l'isomorphisme musical consistant à remonter les indices par contraction simple avec g^{-1} (sur chaque indice). Avec la formule de Weitzenböck du Théorème 11.12 et (11.26) on obtient alors que

$$\big(\Delta_g\alpha,\alpha\big) = \frac{1}{2}\Delta_g\big(\alpha,\alpha\big) + |\nabla\alpha|^2 + Rc_g(\alpha^\sharp,\alpha^\sharp) \ , \tag{11.27}$$

où $\alpha^\sharp$ est maintenant un champ de vecteurs par remontée de l'indice via l'isomorphisme musical. On a vu que l'intégrale du laplacien d'une fonction sur une variété riemannienne compacte est toujours nulle. Par ailleurs, par compacité de M, et puisque l'on suppose que Rc_g est strictement positive, il existe $K_0 > 0$ telle que $Rc_g \geq K_0 g$. Donc $Rc_g(\alpha^\sharp,\alpha^\sharp) \geq K_0|\alpha|^2$. En intégrant (11.27) sur M, et grâce à (11.15) et le Théorème 11.10, on obtient que

$$\int_M |\nabla\alpha|^2 dv_g + \int_M Rc_g(\alpha^\sharp,\alpha^\sharp)dv_g = 0$$

pour toute 1-forme harmonique sur M. Puisque les deux termes sont positif, et puisque $Rc_g \geq K_0 g$, on en déduit que $|\alpha|^2 = 0$. Donc $\alpha = 0$ si α est une 1-forme harmonique, et le théorème est démontré.

Une autre conséquence du Théorème 11.12 est la formule dite de Bochner-Lichnerowicz-Weitzenböck pour les fonctions. Là il n'y a rien à démontrer. Le Théorème 11.14 n'est rien d'autre que la formule (11.27) lorsque $\alpha = df$.

THÉORÈME 11.14 (Formule de Bochner-Lichnerowicz-Weitzenböck). *Soit* (M, g) *une variété riemannienne compacte et* $f : M \to \mathbb{R}$ *une fonction deux fois différentiable sur* M*. Alors*

$$\big(\Delta_g(df), df\big) = \frac{1}{2}\Delta_g\big(df, df\big) + |\nabla^2 f|^2 + Rc_g(df^\sharp, df^\sharp) \ ,$$

où $df^\sharp$ *est le champ de vecteurs sur* M *obtenu à partir de* df *via l'isomorphisme musical.*

9. Le théorème de Gauss-Bonnet

Soit M une variété de dimension n et soit $0 \le p \le n$ un entier. On note E_pM le sous espace vectoriel de Ω^pM constitué des p-formes fermées sur M. On sait que $d^2 = 0$. Donc $\mathrm{Im}(d^{p-1})$, défini en (11.16), est un sous espace vectoriel de E_pM. Le $p$ième groupe de cohomolgie de de Rham, noté $H^p_{DR}M$, se définit comme l'espace vectoriel quotient

$$H^p_{DR}M = E_pM/\mathrm{Im}(d^{p-1}) \ .$$

On trouvera une preuve du résultat suivant dans l'ouvrage de Karoubi-Leruste [*Algebraic topology via differential geometry*, London Mathematical Society, Cambridge University Press, 1987].

THÉORÈME 11.15. *Soit* M *une variété compacte de dimension* n*. Pour tout entier* $0 \le p \le n$*,* $H^p_{DR}M$ *est de dimension finie.*

Considérons maintenant le cas d'une variété riemannienne compacte (M, g) de dimension n. Soit $0 \le p \le n$ un entier et soit $\eta \in \Omega^pM$ une p-forme sur M . Le Théorème 11.11 de de Rham donne une décomposition $\eta = \alpha + d\beta + \delta\gamma$, où $\alpha \in \Omega^pM$ est harmonique, $\beta \in \Omega^{p-1}M$ et $\gamma \in \Omega^{p+1}M$. Si on suppose maintenant que η est fermée, et comme $d^2 = 0$, on obtient avec le Théorème 11.10 que $d\delta\gamma = 0$. Comme $\delta^2 = 0$ d'après le Lemme 11.1, et puisque $\Delta_g = d\delta + \delta d$, $\hat{\gamma} = \delta\gamma$ est harmonique. Par unicité de la décomposition de de Rham, $\delta\gamma = 0$. Par suite, à toute p-forme fermée η est associée une unique p-forme harmonique α et une unique p-forme exacte $\hat{\beta} = d\beta$ pour lesquelles $\eta = \alpha + \hat{\beta}$. En particulier, on a démontré le théorème suivant.

THÉORÈME 11.16. *Soit* (M, g) *une variété riemannienne compacte de dimension* n*. Pour tout entier* $0 \le p \le n$*,* $H^p_{DR}M$ *et* $Ker(\Delta^p_g)$*, défini en* (11.16)*, sont isomorphes.*

Soient (M, g) compacte de dimension n et $0 \le p \le n$ un entier. En vertue des Théorèmes 11.15 et 11.16, $\mathrm{Ker}(\Delta^p_g)$ est de dimension finie. Le $p$ième nombre de Betti $b_p(M)$ de (M, g) est alors défini comme étant la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\Delta^p_g)$ ou, ce qui revient ici au même, de l'espace $H^p_{DR}M$:

$$\begin{aligned} b_p(M) &= \dim\big(\mathrm{Ker}(\Delta^p_g)\big) \\ &= \dim\big(H^p_{DR}M\big) \ . \end{aligned} \tag{11.28}$$

Le $p$ième nombre de Betti de (M, g) ne dépend donc pas de la structure riemannienne de (M, g) mais a priori uniquement de la structure différentielle de M. En particulier, si M_1 et M_2 sont difféomorphes, $b_p(M_1) = b_p(M_2)$ pour tout p.

La caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(M)$ d'une variété riemannienne compacte (M,g) de dimension n est définie comme la somme altérnée des nombres de Betti de (M,g):

$$\chi(M) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p b_p(M) \ , \tag{11.29}$$

où les $b_P(M)$ sont donnés par (11.28). Les $b_p(M)$ sont des entiers dans $\mathbb{N}$, $\chi(M) \in \mathbb{Z}$. On sait déjà que $\chi(M)$ ne dépend que de la structure différentielle de M. En fait, tout comme les nombres de Betti d'ailleurs, $\chi(M)$ est un invariant topologique. On trouvera une preuve de théorème ci-dessous dans l'ouvrage de Bredon [*Topology and Geometry*, Springer-Verlag, 1993].

Théorème 11.17. *Soient (M_1,g_1) et (M_2,g_2) deux variétés riemanniennes compactes. Si M_1 et M_2 sont homéomorphes, alors $\chi(M_1) = \chi(M_2)$.*

En dimension impaire, la caractéristique d'Euler-Poincaré définie en (11.29) est toujours nulle. On le voit facilement dans le cas orientable avec le Lemme 11.1 puisque $\star$ réalise alors un isomorphisme de $\Omega^p M$ sur $\Omega^{n-p} M$. Comme de plus $\star$ commute avec Δ_g, l'adjoint $\star$ réalise en fait un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(\Delta_g^p)$ sur $\mathrm{Ker}(\Delta_g^{n-p})$. Donc, $b_p(M) = b_{n-p}(M)$. Il suit que, en dimension impaire, $\chi(M) = 0$.

En dimension paire la caractéristique d'Euler-Poincaré est par contre un outil particulièrement puissant de la géométrie riemannienne, la raison principale en étant le Théorème de Gauss-Bonnet. Sous sa forme actuelle il est essentiellement dû à Allendoerfer [*The Euler number of a Riemannian manifold*, American Journal of Mathematics, 1940], Allendoerfer-Weil [*The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra*, Transactions of the American Mathematical Society, 1943], Chern [*A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds*, Annals of Mathematics, 1944] et Fenchel [*On total curvatures of Riemannian manifolds*, Journal of the London Mathematical Society, 1940].

Théorème 11.18 (Théorème de Gauss-Bonnet). *La caractéristique d'Euler-Poincaré d'une variété riemannienne compacte (M,g) de dimension n, avec n pair, s'exprime comme l'intégrale d'un polynôme universel P en la courbure. Plus précisément,*

$$\chi(M) = \frac{1}{2^n (\frac{n}{2})! (2\pi)^{n/2}} \int_M P dv_g \ ,$$

où, dans une carte,

$$P = \sum_{\sigma,\tau \in \mathcal{P}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)}{|g|} \prod_{i=1,3,\dots,n-1} R_{\sigma(i)\sigma(i+1)\tau(i)\tau(i+1)} \ .$$

Dans cette expression, $\mathcal{P}_n$ est le groupe des permutations de $\{1,\dots,n\}$, $\varepsilon(\sigma)$ et $\varepsilon(\tau)$ sont les signes des permutations σ et τ, $|g|$ est le déterminant de la matrice des composantes de g dans la carte et les R_{ijkl} sont les composantes de la courbure de Riemann Rm_g dans la carte.

En d'autres termes, l'intégrale de P sur (M,g) est en fait un invariant topologique, ce qui est remarquable. Dans la pratique on aimerait bien avoir une expression exacte de P dans le Théorème 11.18. Elle existe en dimension 2, 4 et même 6. Le calcul de P en dimension 4 est dû à Avez [*Applications de la formule de Gauss-Bonnet-Chern aux variétés à quatre dimensions*, Compte Rendu de l'Académie des Sciences de Paris, 1963] et, en dimension 6, il fut obtenu par Sakai [*On eigen-values of laplacian and curvature of Riemannian manifolds*, Tohoku Mathematical Journal, 1971] et Tanno [*Euler characteristic of some six-dimensional Riemannian manifolds*, Kodai Mathematical Journal, 1984]. On se borne ici à donner les formules explicites pour les dimensions 2 et 4.

THÉORÈME 11.19 (Théorème de Gauss-Bonnet en dimensions 2 et 4). *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n. Si $n = 2$ alors*

$$\chi(M) = \frac{1}{4\pi} \int_M S_g dv_g$$

et si $n = 4$, alors

$$\chi(M) = \frac{1}{16\pi^2} \int_M \left[\frac{1}{2}|W_g|^2 + \frac{1}{12} S_g^2 - |E_g|^2 \right] ,$$

où S_g est la courbure scalaire, W_g est la courbure de Weyl, E_g est le tenseur d'Einstein tels que définis à la Section 1 et les normes $|\cdot|$ sont prises par rapport à g.

En ce qui concerne les normes ponctuelles $|\cdot|$ dans le Théorème 11.19, on a $|T| = T_{ijkl}T^{ijkl}$ dans une carte pour les champs de tenseurs 4-fois covariants et $|E| = E_{ij}E^{ij}$ pour les champs de tenseurs 2-fois covariantes, où les T^{ijkl} et E^{ij} sont les composantes dans la carte des champs contravariants $T^\sharp$ et $E^\sharp$ construits via l'isomorphisme musical consistant à remonter les indices par contraction simple avec g^{-1} (sur chaque indice).

Les deux intégrales du Théorème 11.19 sont donc remarquablement des invariants topologiques. En particulier, le résultat est particulièment marquant, quelque soit la métrique riemannienne placée sur M, elles donnent le même entier. Pour la sphère en dimension paire, $\chi(S^{2n}) = 2$. On pourra par ailleurs montrer que $\chi(M_1 \times M_2) = \chi(M_1)\chi(M_2)$ (en particulier pour toute variété de dimension paire obtenue comme produit de deux variétés de dimensions impaires, la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 0. Cette propriété, le Théorème 11.19, la classification des variétés à courbure sectionnelle constante et l'étude du passage au revêtement universel permettent de montrer que parmi toutes les métriques riemanniennes possibles sur $S^1 \times S^3$, il n'existe pas de métrique qui soit d'Einstein.

Biographie - Quelques Ouvrages

Marcel Berger - Bernard Gostiaux, *Differential Geometry: Manifolds, Curves, and Surfaces*, Springer-Verlag,1988.

Arthur L. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, 1987.

Glen E. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer-Verlag, 1993.

Henri Cartan, *Cours de Calcul Différentiel*, Hermann, 1982.

Isaac Chavel, *Riemannian geometry: a modern introduction*, Cambridge University Press, 1993.

Georges de Rham, *Differentiable manifolds*, Springer, 1984.

Sylvain Gallot - Dominique Hulin - Jacques Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, 1993.

Emmanuel Hebey, *Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés*, Diderot Editeur, 1997.

Morris W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer-Verlag, 1976.

Max Karoubi - Christian Leruste, *Algebraic topology via differential geometry*, London Mathematical Society, Cambridge University Press, 1987.

Shoshichi Kobayashi - Katsumi Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Vol. I et II, John Wiley & Sons, 1963.

Serge Lang, *Introduction aux variétés différentiables*, Dunod, 1962.

Charles-Michel Marle, *Mesure et probabilités*, Hermann, 1974.

R. Tyrrell Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1997.

Laurent Schwartz, *Analyse - Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, 1970.

Michael Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, Tomes I à V, Publish or Perish Inc., 1979.