Les fondamentaux de l'algèbre linéaire non matricielle

par

Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise
CYU

Année 2021-2022

Ces "slides" constituent un résumé du chapitre 0 du polycopié. Les preuves des résultats énoncés ici, et d'autres exercices, se trouvent dans ce même chapitre 0 du polycopié.

Table des matières

1 - Espaces et sous espaces vectoriels

Sauf mention du contraire on ne considère que des espaces vectoriels réels. On note $(E, +, \times)$ les espaces vectoriels, $+$ la loi interne (addition des vecteurs), $\times$ la loi externe (multiplication d'un vecteur par un réel).

Proposition (Caractérisation des sous espaces vectoriels :)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de deux lois $+$ et $\times$. Soit $F \neq \emptyset$ un sous ensemble de E. Alors F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si
(1) $\forall x, y \in F$, $x + y \in F$;
(2) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in F$, $tx \in F$.
Cela se caractérise encore par le fait que pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$, et tous $x, y \in F$, $tx + t'y \in F$.

Exercice : Montrer que le sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ donné par $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x + 2y - z = 0\right\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Solution : On vérifie que $F \neq \emptyset$, par exemple $(0,0,0) \in F$. On applique la proposition de caractérisation des sous espaces vectoriels. Soient $(x,y,z) \in F$ et $(x',y',z') \in F$ deux points quelconques de F et $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel quelconque. On a que

$$(x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z') \in F$$

car

$$x+x'+2(y+y')-(z+z') = (x+2y-z)+(x'+2y'-z') = 0+0 = 0\ .$$

De même, $\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in F$ car

$$(\lambda x) + 2(\lambda y) - (\lambda z) = \lambda(x+2y-z) = \lambda \times 0 = 0\ .$$

Donc F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. □

Exercice : Montrer que le sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ donné par $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+2y-z = 1\right\}$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Solution : Les vecteurs $(1,0,0)$ et $(0,0,-1)$ sont dans F. Pourtant $(1,0,0)+(0,0,-1) = (1,0,-1)$ n'est pas dans F. □

Proposition

L'intersection $F_1 \cap F_2$ de deux sous espaces vectoriels F_1 et F_2 est toujours un sous espace vectoriel.

Proposition

L'union $F_1 \cup F_2$ de deux sous espaces vectoriels F_1 et F_2 est un sous espace vectoriel si et seulement si $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.

Proposition

La somme

$$F_1 + F_2 = \{x + y, x \in F_1, y \in F_2\}$$

de deux sous espaces vectoriels F_1 et F_2 est toujours un sous espace vectoriel.

Par définition, on dit que la somme $F_1 + F_2$ est directe, et on écrit $F_1 \oplus F_2$, si

$$\forall z \in F_1 + F_2, \exists! x \in F_1, \exists! y \in F_2 \ / \ z = x + y \ .$$

En d'autres termes, la somme $F_1 + F_2$ est directe si les éléments de la somme $F_1 + F_2$ se décomposent de façon unique en somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2.

Proposition

La somme $F_1 + F_2$ de deux sous espaces vectoriels est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

Ce qui a été dit à propos de la somme de deux sous espaces vectoriels se généralise à la somme de k sous espaces vectoriels.

Définition

Si $F_1, \ldots, F_k$ sont k sous espaces vectoriels de E, on définit

$$F_1 + \cdots + F_k = \left\{ x_1 + \cdots + x_k, x_i \in F_i, i = 1, \ldots, k \right\} .$$

Comme lorsque $k = 2$, $F_1 + \cdots + F_k$ est un sous espace vectoriel de E.

Définition

La somme $F_1 + \cdots + F_k$ est directe, et on écrit $F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$, si la propriété suivante est vérifiée par la somme $F_1 + \cdots + F_k$:
$\forall z \in F_1 + \cdots + F_k$, $\exists! x_1 \in F_1$, ..., $\exists! x_k \in F_k$ *tels que* $z = x_1 + \cdots + x_k$.

En d'autres termes, la somme $F_1 + \cdots + F_k$ est directe si les éléments de la somme $F_1 + \cdots + F_k$ se décomposent de façon unique en somme d'un élément de F_1, ..., et d'un élément de F_k.

Proposition

La somme $F_1 + \cdots + F_k$ est directe si et seulement si pour tout $i = 2, \ldots, k$, $F_i \cap (\sum_{j<i} F_j) = \{0\}$.

Ainsi : · $F_1 + F_2$ est directe ssi

$$F_1 \cap F_2 = \{0\}\ .$$

· $F_1 + F_2 + F_3$ est directe ssi

$$F_1 \cap F_2 = \{0\} \text{ et } F_3 \cap (F_1 + F_2) = \{0\}\ .$$

· $F_1 + F_2 + F_3 + F_4$ est directe ssi

$$F_1 \cap F_2 = \{0\}\ ,\ F_3 \cap (F_1 + F_2) = \{0\} \text{ et } F_4 \cap (F_1 + F_2 + F_3) = \{0\}.$$

Exercice* : Soient A, B, C trois sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que la somme $A+B+C$ est directe si et seulement si $A \cap B = \{0\}$ et $(A+B) \cap C = \{0\}$.

Solution : Supposons $A+B+C$ directe. Soit $x \in A \cap B$. En écrivant que $x+0+0 = 0+x+0$ on a deux écritures dans $A+B+C$ d'un même vecteur de $A+B+C$. La somme étant directe c'est que $x=0$. Donc $A \cap B = \{0\}$. De même, soit $x \in (A+B) \cap C$. Comme $x \in A+B$ il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a+b$. On a $a+b+0 = 0+0+x$ qui fournit deux écritures d'un même vecteur dans $A+B+C$. La somme étant directe c'est que $a=0$, $b=0$ et $x=0$. Donc $(A+B) \cap C = \{0\}$.

Réciproquement, supposons que $A \cap B = \{0\}$ et que $(A+B) \cap C = \{0\}$. Soient $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ et $c, c' \in C$ tels que $a+b+c = a'+b'+c'$. Alors $(a-a')+(b-b') = c'-c$. Or $(a-a')+(b-b') \in A+B$ et $c'-c \in C$. Comme $(A+B) \cap C = \{0\}$, c'est que $c' = c$ et $(a-a')+(b-b') = 0$. En particulier, $a-a' = b'-b$. Or $a-a' \in A$ et $b'-b \in B$. Comme $A \cap B = \{0\}$, c'est que $a' = a$ et $b' = b$. $\square$

Définition

Soit E un espace vectoriel muni de deux lois $+$ et $\times$, et soit A une partie (i.e. un sous ensemble) de E. Le sous espace vectoriel de E engendré par A, noté $Vect(A)$, est par définition le plus petit sous espace vectoriel de E pour l'inclusion qui contient A.

Il est caractérisé par les propriétés suivantes :
(i) $Vect(A)$ est un sous espace vectoriel de E,
(ii) $A \subset Vect(A)$,
(iii) si F est un sous espace vectoriel de E et si $A \subset F$, alors $Vect(A) \subset F$.

Proposition

$Vect(A)$ est constitué des combinaisons linéaires des éléments de A. En d'autres termes :

$$Vect(A) = \left\{ t_1 x_1 + \cdots + t_k x_k, k \in \mathbb{N}^\star, t_i \in \mathbb{R}, x_i \in A \right\} .$$

Des propriétés simples à vérifier que satisfont les espaces $Vect(A)$ sont les suivantes :

(1) $Vect(A) = A$ ssi A sous espace vectoriel,
(2) $Vect(A \cup B) = Vect(A) + Vect(B)$.
(3) $Vect(A \cap B) \subset Vect(A) \cap Vect(B)$

Dans (3) il n'y a pas forcément égalité.

On rencontre souvent ces espaces lorsque A est fini. Lorsque A est fini. Lorsque $A = \{a_1, a_2\}$,

$$Vect(A) = \{t_1 a_1 + t_2 a_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} .$$

Lorsque $A = \{a_1, a_2, a_3\}$,

$$Vect(A) = \{t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\} .$$

Etc.

On note $Vect(a_1, a_2)$ au lieu de $Vect(\{a_1, a_2\})$, $Vect(a_1, a_2, a_3)$ au lieu de $Vect(\{a_1, a_2, a_3\})$ etc.

Exercice : On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u_1 = (1, 1, 3)$, $u_2 = (1, -1, -1)$, $v_1 = (1, 0, 1)$ et $v_2 = (2, -1, 0)$. Montrer que $Vect(u_1, u_2) = Vect(v_1, v_2)$.

Solution : On va montrer que $Vect(u_1, u_2) \subset Vect(v_1, v_2)$ et que $Vect(v_1, v_2) \subset Vect(u_1, u_2)$. Pour simplifier on ne démontre que la première inclusion. L'autre se démontre de la même manière. Pour démontrer que $Vect(u_1, u_2) \subset Vect(v_1, v_2)$ il suffit de montrer que $u_1 \in Vect(v_1, v_2)$ et que $u_2 \in Vect(v_1, v_2)$. L'équation

$$(1, 1, 3) = \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, -1, 0)$$

donne $\lambda + 2\mu = 1$, $-\mu = 1$ et $\lambda = 3$, un système dont la solution est bien donnée par $\lambda = 3$ et $\mu = -1$ (les deux dernières équations entraînent la première). On a donc $u_1 = 3v_1 - v_2$ et donc $u_1 \in Vect(v_1, v_2)$. De la même façon on vérifie que $u_2 = -v_1 + v_2$. Donc $u_2 \in Vect(v_1, v_2)$. Donc $Vect(u_1, u_2) \subset Vect(v_1, v_2)$. Comme déjà dit, l'autre inclusion se démontre de la même façon. On montre que $v_1 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2$ et que $v_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{3}{2}u_2$. $\square$

2 - Applications linéaires

Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et $f : E \to F$ une application. On dit que f est linéaire si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
(i) $\forall x, y \in E$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$,
(ii) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $f(tx) = tf(x)$.

Les deux propriétés se regroupent en une :
(iii) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$, $f(x+ty) = f(x) + tf(y)$.
On a donc (i)+(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Par récurrence, si f est linéaire, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, tous $t_i \in \mathbb{R}$, et tous $x_i \in E$, $i = 1, \ldots, k$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} t_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} t_i f(x_i) \ .$$

On a toujours $f(0) = 0$ car $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$. On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Lorsque $F = E$, on note aussi $End(E)$ au lieu de $L(E, E)$. Les

applications de $End(E)$ sont appelées endomorphismes de E. On vérifie facilement que si E, F, G sont trois espace vectoriels, et si $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, G)$, alors $g \circ f \in L(E, G)$.
Indépendamment, si E et F sont deux espaces vectoriels, on définit sur $L(E, F)$ la loi interne $+$ et la loi externe $\times$ par :
$\big(f + g\big)(x) = f(x) + g(x)$,
$\big(tf\big)(x) = tf(x)$.
Alors $L(E, F)$ muni de ces deux lois est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Lorsque $F = \mathbb{R}$ on parle de forme linéaire et on note souvent $E^\star$ au lieu de $L(E, \mathbb{R})$.

Donc :
· $L(E, F) =$ espace des applications linéaires de E dans F,
· $End(E) =$ espace des applications linéaires de E dans E (endomorphismes),
· $E^\star =$ espace des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$ (formes linéaires).

Exercice : Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ les applications définies par

$$f(x,y) = (x+y, x-2y, 0) \ \text{ et } \ g(x,y) = (x+y, x-2y, 1)$$

pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que f est linéaire mais que g ne l'est pas.

Solution : Pour montrer que f est linéaire il suffit de vérifier que pour tous $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(x+\lambda x', y+\lambda y') = f(x,y) + \lambda f(x',y') \ ,$$

et donc que

$$\begin{aligned}&\left(x+\lambda x' + y + \lambda y', x + \lambda x' - 2(y+\lambda y'), 0\right) \\ &= (x+y, x-2y, 0) + \lambda\left(x'+y', x'-2y', 0\right) \ .\end{aligned}$$

C'est immédiat. On montre par ailleurs que g n'est pas linéaire par exemple en remarquant que $(2,2) = 2 \times (1,1)$ tandis que

$$g(2,2) = (4,-2,1) \neq 2 \times (2,-1,1) = 2g(1,1) \ .$$

$\square$

Par définition :

· une application $f : E \to F$ est injective si les éléments de F ont au plus un antécédant par f. Donc f est injective si pour tous $x, y \in E$, si $f(x) = f(y)$, alors $x = y$.

· $f : E \to F$ est surjective si tout élément de F a au moins un antécédant. Donc f est surjective si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

· $f : E \to F$ est bijective si tout élément de F a précisément un et un seul antécédant. Par suite f est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.

Une application f est bijective si et seulement si il existe $f^{-1} : F \to E$ une application telle que $f^{-1} \circ f = Id_E$ et $f \circ f^{-1} = Id_F$.

Définition

Si E et F sont deux espaces vectoriels, et si $f \in L(E, F)$, on définit : le noyau de f, noté $Ker(f)$, par

$$Ker(f) = \left\{x \in E \ / \ f(x) = 0\right\} ,$$

et l'image de f, notée $Im(f)$, par $Im(f) = \left\{f(x) \ , \ x \text{ parcourt } E\right\}$.

On vérifie que $Ker(f)$ est un sous ensemble de E, et $Im(f)$ est un sous ensemble de F. Une application linéaire bijective de $L(E, F)$ est dite un isomorphisme de E sur F.

Théorème

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et $f \in L(E, F)$ une application linéaire de E dans F. Alors :
(i) $Ker(f)$ est un sous espace vectoriel de E et f est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0\}$;
(ii) $Im(f)$ est un sous espace vectoriel de F et f est surjective si et seulement si $Im(f) = F$.
Par suite, f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si $Ker(f) = \{0\}$ et $Im(f) = F$. Dans ce cas, l'application inverse f^{-1} est elle aussi linéaire.

Exercice : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in End(E)$ un endomorphisme de E. On note $E_1 = Ker(f)$, $E_2 = Ker(f - Id_E)$ et $E_3 = Ker(f + Id_E)$, où Id_E est l'application linéaire identité de E dans E (l'endomorphisme identité de E). Montrer que E_1, E_2 et E_3 sont en somme directe.

Solution : Il faut montrer (cf. cours précédents) que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et que $(E_1 + E_2) \cap E_3 = \{0\}$. Soit $x \in E_1 \cap E_2$. Alors $f(x) = 0$ et $(f - Id_E)(x) = f(x) - x = 0$ de sorte que $x = 0$. Donc $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Soit maintenant $x \in (E_1 + E_2) \cap E_3$. Comme $x \in E_1 + E_2$ il existe $y \in E_1$ et $z \in E_2$ tels que $x = y + z$. On a alors $f(y) = 0$, $f(z) - z = 0$ et $f(x) + x = 0$. Comme $f(x) = f(y) + f(z) = f(z)$, on a donc

$$0 = f(z) + x = f(z) - z + y + 2z = y + 2z \ .$$

Soit $y = -2z$. Comme $f(y) = 0$ on devrait aussi avoir $f(z) = 0$ par linéarité de f. Or $f(z) - z = 0$, donc $z = 0$. Puis ensuite, puisque $y = -2z$, on récupère que $y = 0$. Au final, $x = 0$ et donc on bien aussi que $(E_1 + E_2) \cap E_3 = \{0\}$. $\square$

3 - Familles libres, génératrices, et bases

Définition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille composée de n vecteurs de E.

(1) On dit que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre de E si la seule combinaison linéaire de la famille qui soit nulle est la combinaison linéaire nulle. Donc $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre si

$$\forall t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}, t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \cdots = t_n = 0 \ .$$

(2) On dit que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice si tout x de E s'écrit comme combinaison linéaire des $e_1, \ldots, e_n$. Donc $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice si

$$\forall x \in E, \exists t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R} \text{ tels que } x = t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n \ .$$

Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Une famille qui contient le vecteur nul est forcément liée.

(1) Toute sur famille d'une famille génératrice est génératrice.
(2) Toute sous famille d'une famille libre est libre.

Définition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille composée de n vecteurs de E. On dit que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E si tout x de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des $e_1, \ldots, e_n$. Donc $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E si

$$\forall x \in E, \exists! t_1 \in \mathbb{R}, \ldots, \exists! t_n \in \mathbb{R} \text{ tels que } x = t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n \ .$$

Théorème

Une famille est une base si et seulement si elle est à la fois libre et génératrice.

Théorème (Théorème fondamental de la théorie de la dimension.)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Si E possède une famille génératrice composée de k vecteurs, $k \in \mathbb{N}$, alors toute famille libre de E a au plus k vecteurs. En d'autres termes, une famille libre de E a forcément moins d'éléments qu'une famille génératrice de E.

Plusieurs propriétés importantes suivent de ce théorème fondamental de la théorie de la dimension. Il en va ainsi de la propriété suivante.

Théorème

Si un espace vectoriel E possède une base composée de n vecteurs, $n \in \mathbb{N}$, alors toute autre base de E est elle aussi composée d'exactement n vecteurs.

Cette propriété permet de définir la notion de dimension.

Définition

On dit d'un espace vectoriel E qu'il est de dimension finie n s'il possède une base composée de n vecteurs. Toute autre base de E est alors composée elle aussi de n vecteurs. On note parfois $\dim(E)$ la dimension de E.

Par exemple, $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2 car $\{(1,0);(0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Ou encore $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 car $\{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Etc. $\mathbb{R}^n$ est de dimension n.

L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n est de dimension $n+1$ car $\left\{1, X, X^2, \ldots, X^{n-1}, X^n\right\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. La famille est génératrice par définition des polynômes. Elle est libre car si un polynôme est nul sur $\mathbb{R}$ alors tous ses coefficients sont nuls (un polynôme de degré n a au plus n racines réelles, sauf s'il s'agit du polynôme nul).

Toute sur famille d'une famille génératrice est encore une famille génératrice et toute sous famille d'une famille libre est encore une famille libre. Le lemme qui suit va dans "l'autre sens".

Lemme

Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre mais non génératrice, alors il existe un vecteur $x_{n+1} \in E$ pour lequel $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ est encore une famille libre. A l'inverse si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille génératrice mais n'est pas libre, alors il existe un $i \in \{1, \ldots, n\}$ pour lequel $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ est encore génératrice. En d'autres termes, si une famille libre n'est pas génératrice, alors on peut lui rajouter un vecteur convenablement choisi de sorte que la famille ainsi augmentée reste libre. Et si une famille génératrice n'est pas libre, alors on peut lui enlever un vecteur convenablement choisi de sorte que la famille ainsi diminuée reste génératrice.

Une conséquence de ce résultat et du théorème fondamental de la théorie de la dimension est le résultat suivant.

Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n. Toute famille libre de E composée de n vecteurs est une base de E. Toute famille génératrice de E composée de n vecteurs est une base de E.

En d'autre termes, en dimension n, pour montrer qu'une famille composée de n vecteurs est une base de E il suffit de montrer soit qu'elle est libre, soit qu'elle est génératrice (et si elle n'est pas composée d'exactement n vecteurs elle n'a aucune chance d'être une base puisque les bases ont toujours autant de vecteurs que la dimension).

Une autre conséquence est donnée par le résultat suivant.

Théorème (Théorème de la base incomplète)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Si $(x_1, \ldots, x_k)$ est une famille libre de E, donc $k \leq n$, elle peut être complétée par $n - k$ vecteurs de E pour en faire une base de E. En d'autres termes, toute famille libre dans un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée en une base de l'espace par adjonction de vecteurs convenables.

Proposition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie, $dim(F) \leq dim(E)$ et $F = E$ si et seulement si $dim(F) = dim(E)$.

Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soient F_1, F_2 deux sous espaces vectoriels de E de dimensions finies. Alors $F_1 + F_2$ est encore de dimension finie, et

$$dim(F_1 + F_2) = dim(F_1) + dim(F_2) - dim(F_1 \cap F_2) \ .$$

En particulier, F_1 et F_2 sont en somme directe, à savoir on a $F1 \oplus F_2$, si et seulement si $dim(F_1 + F_2) = dim(F_1) + dim(F_2)$.

Exercice* **:** Soient F_1, F_2 deux hyperplans d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n (un hyperplan d'un espace vectoriel de dimension n est un sous espace vectoriel de dimension $n-1$, soit un de moins). Montrer que $F_1 \cap F_2 \neq \{0\}$ dès que $n \geq 3$. Que se passe-t-il lorsque $n = 2$?

Solution : Supposons $n \geq 3$. On a

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)\ .$$

On raisonne par contradiction et on suppose que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Alors $\dim(F_1 \cap F_2) = 0$. On aurait donc

$$\dim(F_1 + F_2) = n - 1 + n - 1 = 2(n-1)\ .$$

Comme $F_1 + F_2 \subset E$ on a $\dim(F_1 + F_2) \leq n$. Or $n < 2(n-1)$ dès que $n \geq 3$. D'où une contradiction et le résultat pour $n \geq 3$. Lorsque $n = 2$ le résultat cesse d'être vrai. Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ l'axe des x et l'axe des y sont deux hyperplans d'intersection réduite au vecteur nul. $\square$

5. Dimension finie et applications linéaires

On rappelle qu'un isomorphisme d'un espace vectoriel E sur un espace vectoriel F est une application linéaire bijective de E sur F.

Théorème

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f \in L(E, F)$ une application linéaire de E dans F. Si f est injective et si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre de E, alors $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est une famille libre de F. Si f est surjective et si $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice pour E, alors $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est génératrice pour F. En particulier, si f est un isomorphisme et si $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E, alors $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est une base de F.

En d'autres termes, une application linéaire injective envoie les familles libres sur des familles libres, une application linéaire surjective envoie les familles génératrices sur des familles génératrices et un isomorphisme envoie les bases sur des bases.

Corollaire

Si deux espaces vectoriels sont isomorphes, et l'un de ces espaces est de dimension finie, alors l'autre l'est aussi et les deux espaces ont même dimension.

Définition

On appelle rang d'une application linéaire f, et on note $Rg(f)$, la dimension de l'espace $Im(f)$.

Théorème (Théorème du rang)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, et soit $f \in L(E, F)$ une application linéaire de E dans F. Alors

$$dimKer(f) + Rg(f) = dim(E)$$

où $Ker(f)$ est le noyau de f, et $Rg(f) = dim\,(Im(f))$ son rang.

Un moyen mnémotechnique pour se souvenir qu'il s'agit bien de $\dim(E)$ à droite de l'équation, et non de $\dim(F)$, est qu'on peut toujours augmenter F (une application linéaire de E dans F est aussi une application linéaire de E dans F' si F' est un espace vectoriel qui contient F) alors qu'on ne peut pas a priori augmenter E.

Proposition

On a toujours $Rg(f) \leq \min(dim(E), dim(F))$. Par ailleurs f est surjective si et seulement si $Rg(f) = dim(F)$. Enfin f est injective si et seulement si $Rg(f) = dim(E)$.

Corollaire

Soit E un $\mathbb{R}$- espace vectoriel de dimension finie et $f \in End(E)$. Alors f est un isomorphisme de E sur E si et seulement si f est injective. De même, f est un isomorphisme de E sur E si et seulement si f est surjective.

Exercice* : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Montre qu'il existe un endomorphisme $f \in End(E)$ vérifiant $Ker(f) = Im(f)$ si et seulement si n est pair.

Solution : Si f existe alors avec le théorème du rang

$$n = \dim E = \dim Ker(f) + \dim Im(f) = 2\dim Ker(f)$$

et donc n est pair. Réciproquement si $n = 2k$, on considère $(e_1, \ldots, e_{2k})$ une base de E et l'endomorphisme $f \in End(E)$ défini par $f(e_i) = e_{k+i}$ pour tout $1 \leq i \leq k$ et $f(e_i) = 0$ pour tout $i = k+1, \ldots 2k$. Alors $Ker(f) = Im(f) = Vect(e_{k+1}, \ldots, e_{2k})$. $\square$

Fin du chapitre de rappels