Université de Cergy-Pontoise **Janvier 2019**
Mathématiques L2
Algèbre Bilinéaire et Intégration

Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1: Soit A la matrice réelle
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$
(1) Cette matrice est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Calculer $\det(A)$. Qu'en déduit-on en termes de valeurs propres de A ?
(2) Calculer le polynôme caractéristique de A et trouver les valeurs propres de A.
(3) Trouver une matrice orthogonale P pour laquelle ${}^tPAP$ est diagonale (ou encore, ce qui revient au même, trouver une base orthonormée de vecteurs propres de A).

Exercice 2: Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie pour tout $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par
$$Q(X) = 4x^2 + 9y^2 + 52z^2 + 145t^2 + 36yz - 44zt - 54yt$$
(1) Montrer que
$$Q(X) = 4x^2 + 9\left(y + 2z - 3t\right)^2 + 16\left(z + 2t\right)^2$$
pour tout $X = (x, y, z, t)$.
(2) Soit $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ donné par
$$\Phi(x, y, z, t) = (2x, 3(y + 2z - 3t), 4(z + 2t), t)$$
Montrer que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^4$.
(3) Soit $\tilde{Q}$ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par
$$\tilde{Q}(X) = x^2 + y^2 + z^2$$
Montrer que $Q(X) = \tilde{Q}\left(\Phi(X)\right)$ pour tout X. En déduire la signature de Q.
(4) Trouver les vecteurs isotropes de Q.

Exercice 3: Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes:
$$(1pt)\ I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{3x^2 + 2}{x^7 + 1} dx \ , \ (1pt)\ I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{3x + 5}{2x^2 + 7} dx \ ,$$
$$(1pt)\ I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{x^2} dx \ , \ (1pt)\ I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{3x + 5}{\sqrt{x}(2x^3 + 7)} dx \ .$$
Justifier vos réponses. On précisera notamment en quelles bornes ces intégrales sont généralisées.

Exercice 4: On considère, pour tout x réel, l'intégrale
$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + g(x)\cos(t)\right) dt \ ,$$
où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée par $g(x) = x^2 + \sqrt{2}x$.
(1) Montrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.
(2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(0)$ la dérivée de F en 0.

Exercice 5: Calculer les intégrales multiples

$$I = \int\int_{D_1} \left(1 + x^3y^4\right) dxdy \text{ et } J = \int\int_{D_2} \left(1 + x^3y^4\right) dxdy$$

où D_1 et D_2 sont donnés par $D_1 = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le 1\Big\}$ et $D_2 = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \le x \le y \le 1\Big\}$.

Exercice 6: Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.
(1) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $u \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme de E. On suppose que u est symétrique et que

$$\langle u(x), x \rangle = 0$$

pour tout $x \in E$. Montrer que u est l'endomorphisme nul.
(2) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ des réels. On pose $S = a + b + c$ et $P = ab + ac + bc$. Soit A la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} .$$

Montrer que A est une matrice orthogonale si et seulement si $S = \pm 1$ et $P = 0$ simultanément.

Exercice 7 (question bonus): Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $a \in E$ un vecteur de norme 1 et $k \in \mathbb{R}$ un réel. On définit la forme bilinéaire symétrique $\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$\Phi(x, y) = \langle x, y \rangle + k \langle x, a \rangle \langle y, a \rangle \ .$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur k pour que Φ soit un produit scalaire.