Algèbre bilinéaire et Intégration

par
Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise
Année 2019-2020

Exercice 1 : Soit A la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

(1) Cette matrice est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Calculer $\det(A)$. Qu'en déduit-on en termes de valeurs propres de A ?
(2) Calculer le polynôme caractéristique de A et trouver les valeurs propres de A.
(3) Trouver une matrice orthogonale P pour laquelle ${}^tPAP$ est diagonale (ou encore, ce qui revient au même, trouver une base orthonormée de vecteurs propres de A).

Corrigé : (1) La matrice est symétrique. Elle est donc diagonalisable. On calcule $\det(A) = 0$. On en déduit que 0 est valeur propre de A.

(2) Si P est le polynôme caractéristique de A, alors

$$P(X) = \det \begin{pmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{pmatrix} .$$

On trouve

$$\begin{aligned} P(X) &= (1-X)^3 + 2 - 3(1-X) \\ &= -(X-1)^3 - 1 + 3X \\ &= -X^3 + 3X^2 \\ &= -X^2(X-3) . \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont 0 (valeur propre double) et 3 (valeur propre simple).

(3) Si E_0 est l'espace propre associé à la valeur propre 0, alors

$$\begin{aligned} E_0 &= \{(x, y, z) \ / \ x + y + z = 0\} \\ &= \{(x, y, -x-y), x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1), x, y \in \mathbb{R}\} \ . \end{aligned}$$

Soit $e_1 = (1, 0, -1)$ et $e_2 = (0, 1 - 1)$. Alors (e_1, e_2) est génératrice pour E_0. Comme elle est aussi libre (vérification facile), on en déduit que (e_1, e_2) est une base de E_0. On utilise Gram-Schmidt pour l'orthonormaliser. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^3$ et $\| \cdot \|$ la norme associée. On trouve $\|e_1\| = 2$. On pose

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \ .$$

On calcule $\langle \tilde{e}_1, e_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On pose

$$u = e_2 - \langle \tilde{e}_1, e_2 \rangle \tilde{e}_1 = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} \right) \ .$$

Alors $\|u\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$. On pose

$$\tilde{e}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}u = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

et alors $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est une base orhonormée de E_0. Soit maintenant E_3 l'espace propre associé à la valeur propre 3. On a

$$\begin{cases} 2x = y + z \\ 2y = x + z \\ 2z = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y + z \\ 2y = x + z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z \ .$$

On en déduit que

$$E_3 = \{x(1,1,1) \ , \ x \in \mathbb{R}\}$$

et E_3 est donc la droite vectorielle de base $e_3 = (1,1,1)$. On a $\|e_3\| = \sqrt{3}$. On pose

$$\tilde{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ .$$

La famille $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est alors une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ qui diagonalise A. La matrice

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

répond à la question. On a

$${}^{t}P \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

Exercice 2 : Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie pour tout $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par

$$Q(X) = 4x^2 + 9y^2 + 52z^2 + 145t^2 + 36yz - 44zt - 54yt$$

(1) Montrer que

$$Q(X) = 4x^2 + 9\,(y + 2z - 3t)^2 + 16\,(z + 2t)^2$$

pour tout $X = (x, y, z, t)$.
(2) Soit $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ donné par

$$\Phi(x, y, z, t) = (2x, 3(y + 2z - 3t), 4(z + 2t), t)$$

Montrer que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^4$.
(3) Soit $\tilde{Q}$ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par

$$\tilde{Q}(X) = x^2 + y^2 + z^2$$

Montrer que $Q(X) = \tilde{Q}\,(\Phi(X))$ pour tout X. En déduire la signature de Q.
(4) Trouver les vecteurs isotropes de Q.

Corrigé : (1) On procède en développant l'expression donnée dans la question.

(2) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

On trouve $\det\left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi)\right) = 24$ et $24 \neq 0$. Donc Φ est bien un isomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

(3) On a bien l'égalité en vertue de la question (1). Les formes quadratiques Q et $\tilde{Q}$ sont donc équivalentes et elles ont ainsi même signature. La signature de $\tilde{Q}$ est $(3, 0)$. La signature de Q est donc aussi $(3, 0)$.

(4) Les vecteurs isotropes de Q sont les $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ qui vérifient $Q(X) = 0$. Avec la question (1) on trouve

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + 2z = 3t \\ z + 2t = 0 \end{cases}$$

et donc, si Δ est l'ensemble des vecteurs isotropes de Q, alors

$$\Delta = \{(0, 7t, -2t, t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}\ .$$

Ici Δ est la droite vectorielle de base $(0, 7, -2, 1)$.

Exercice 3 : On considère, pour tout x réel, l'intégrale

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + g(x)\cos(t)\right) dt \ ,$$

où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée par $g(x) = x^2 + \sqrt{2}x$.
(1) Montrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.
(2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(0)$ la dérivée de F en 0

Corrigé : (1) La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,t) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + g(x)\cos(t)\right)$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$ en vertue des théorèmes généraux. On en déduit (théorème de cours) que F est continue sur $\mathbb{R}$.

(2) La fonction f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ en tout point de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = g'(x)\cos(t)\cos\left(\frac{\pi}{4} + g(x)\cos(t)\right)$$

pour tous $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. En vertue des théorèmes généraux, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. On en déduit que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$F'(x) = g'(x)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos\left(\frac{\pi}{4} + g(x)\cos(t)\right) dt$$

en tout point $x \in \mathbb{R}$. Puisque $g(0) = 0$ et $g'(0) = \sqrt{2}$,

$$F'(0) = g'(0)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin(t)\right]_0^{\pi/2} = 1 \ .$$

Exercice 4 : Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ des réels. On pose $S = a + b + c$ et $P = ab + ac + bc$. Soit A la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} .$$

Montrer que A est une matrice orthogonale si et seulement si $S = \pm 1$ et $P = 0$ simultanément.

Corrigé : Par définition, A est orthogonale si et seulement si A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$. Il suffit donc de calculer le produit ${}^tAA$ et de chercher sous quelle condition nécessaire et suffisante on retrouve la matrice identité Id_3. Notons $D = a^2 + b^2 + c^2$. On a

$$\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & P & P \\ P & D & P \\ P & P & D \end{pmatrix} .$$

Par suite A est orthogonale si et seulement si $D = 1$ et $P = 0$. On a

$$\begin{aligned} D &= a^2 + b^2 + c^2 \\ &= (a+b+c)^2 - 2(ab + ac + bc) \\ &= S^2 - 2P \ . \end{aligned}$$

Donc A est orthogonale si et seulement si $S = \pm 1$ et $P = 0$.

Exercice 5 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $a \in E$ un vecteur de norme 1 et $k \in \mathbb{R}$ un réel. On définit la forme bilinéaire symétrique $\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$\Phi(x, y) = \langle x, y \rangle + k \langle x, a \rangle \langle y, a \rangle \ .$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur k pour que Φ soit un produit scalaire.

Corrigé : On veut une condition nécessaire et suffisante sur k pour que Φ soit définie positive. Il suffit pour cela de trouver une condition nécessaire et suffisante sur k pour que $\Phi(x,x) > 0$ pour tout $x \in E\backslash\{0\}$. On commence par chercher une condition nécessaire. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On calcule

$$\Phi(a,a) = \|a\|^2 + k\|a\|^4 = 1 + k$$

puisque $\|a\| = 1$. Il est donc nécessaire que $1 + k > 0$ et donc que $k > -1$. On montre maintenant que la condition $k > -1$ est aussi suffisante. Pour cela, on distingue deux cas. D'une part, si $k \geq 0$, alors pour tout $x \in E$, $x \neq 0$,

$$\Phi(x,x) \geq \|x\|^2 > 0 \ .$$

D'autre part, si $k \in]-1,0[$, alors pour $x \in E$, $x \neq 0$,

$$\Phi(x,x) = \|x\|^2 - |k|\langle x,a\rangle^2$$

tandis que par Cauchy-Schwarz, puisque $\|a\| = 1$,

$$\langle x,a\rangle^2 \leq \|x\|^2 \ .$$

Donc

$$\Phi(x,x) \geq (1-|k|)\,\|x\|^2 > 0 \ .$$

Dans les deux cas considérés, on a montré que

$$\Phi(x,x) > 0$$

pour tout $x \in E\backslash\{0\}$. Par suite, Φ est un produit scalaire si et seulement si $k > -1$.

Fin des exercices