Petit précis de Calcul Tensoriel

par
Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise
CY Cergy-Paris Université

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $E^\star$ son espace dual, i.e $E^\star = L(E,\mathbb{R})$. Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, on définit pour tout $i=1,\dots,n$ l'élément $e^{i\star}$ de $E^\star$ par : $\forall j=1,\dots,n$,

$$e^{i\star}(e_j) = \delta^i_j \ .$$

Alors $(e^{1\star},\dots,e^{n\star})$ est une base de $E^\star$, appelée base duale de la base $(e_1,\dots,e_n)$. La preuve de cette assertion est ici identique à celle que nous avons effectuée pour montrer que les dx^i_x formaient une base de $T_x(M)^\star$.

Proposition

L'application φ de E dans $E^{\star\star} = L(E^\star,\mathbb{R})$ définie par : $\forall u \in E$, $\forall \theta \in E^\star$,

$$\varphi(u).(\theta) = \theta(u)$$

est un isomorphisme de E sur $E^{\star\star}$. En particulier, $E^{\star\star}$ s'assimile naturellement à E.

Preuve : Il est clair que φ est linéaire. Comme par ailleurs $dimE = dimE^{\star\star}$, il nous suffit de montrer que φ est injective. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si pour deux vecteurs u et v de E, $\varphi(u) = \varphi(v)$, alors en particulier, pour tout i,

$$e^{i\star}(u) = e^{i\star}(v) \ .$$

Or, on le constate facilement, les $e^{i\star}(u)$ et $e^{i\star}(v)$ sont les coordonnées de u et v dans $(e_1, \ldots, e_n)$. Il s'ensuit que si $\varphi(u) = \varphi(v)$, alors $u = v$. D'où le résultat. CQFD.

Concrètement, l'assimilation de $E^{\star\star}$ avec E consiste à regarder un vecteur u de E comme l'élément de $E^{\star\star}$ défini par : $u(\eta) = \eta(u)$ pour tout $\eta \in E^{\star}$.

Définition (Produit tensoriel 1)

Soient $(E_i)_{i=1,\ldots,N}$ N $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels de dimensions finies, et soient* $\theta_i \in E_i^\star$*,* $i = 1, \ldots, N$*,* N *formes linéaires. Alors* $\theta_1 \otimes \cdots \otimes \theta_N$ *est la forme* N*-linéaire sur* $E_1 \times \cdots \times E_N$ *définie par :* $\forall (u_1, \ldots, u_N) \in E_1 \times \cdots \times E_N$*,*

$$(\theta_1 \otimes \cdots \otimes \theta_N).(u_1, \ldots, u_N) = \prod_{i=1}^{N} \theta_i(u_i) \ .$$

Ici, $\theta_1 \otimes \theta_2$ *se lit* θ_1 *"tensoriel"* θ_2*.*

Etant donnés des entiers p et q, on appelle variance de type (p, q) tout $(p+q)$-uplet v composé de p symboles $\star$ et q symboles $-$. La longueur de la variance est alors l'entier $|v| = p + q$.

Par exemple $v = (\star \star - \star)$ est une variance de type $(3, 1)$, tandis que $v = (- \star \star - \star \star -)$ est une variance de type $(4, 3)$.

Définition (Définition des tenseurs)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Un tenseur sur E de variance $v = (- \star - \star \star - \star \dots)$ est une forme $|v|$-linéaire sur

$$E^\star \times E \times E^\star \times E \times E \times E^\star \times E \times \dots$$

(Les $-$ deviennent des $\star$, les $\star$ deviennent des $-$). Si v est de type (p,q), un tel tenseur est dit p-fois covariant, q-fois contravariant, et ordonné suivant la variance v. L'espace de ces tenseurs est noté $\overset{(v)}{\otimes}(E)$. Par convention, cet espace vaut $\mathbb{R}$ si la variance v est vide.

A titre d'exemples : (1) Une forme linéaire sur E est un tenseur 1-fois covariant et 0-fois contravariant, i.e de variance $v = (\star)$.

(2) Un vecteur sur E (via l'assimilation de E à $E^{\star\star}$) est un tenseur 1-fois contravariant et 0-fois covariant, i.e de variance $v = (-)$.

Définition (Produit tensoriel 2)

Si T et $\tilde{T}$ sont deux tenseurs sur E de variances respectives $v = (- \star - \star\star - \star \dots)$ et $\tilde{v} = (\star - \star - \star \dots)$, alors $T \otimes \tilde{T}$ (lire T "tensoriel $\tilde{T}$) est le tenseur sur E de variance

$$v\tilde{v} = (- \star - \star\star - \star \cdots \star - \star - \star \dots)$$

défini par : pour tout $X \in E^\star \times E \times E^\star \times E \times E \times E^\star \times E \times \dots$ et tout $Y \in E \times E^\star \times E \times E^\star \times E \times \dots$,

$$(T \otimes \tilde{T}).(X, Y) = T(X)\tilde{T}(Y) .$$

On vérifie facilement ici que le produit tensoriel $\otimes$ est :

(1) associatif : $T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3) = (T_1 \otimes T_2) \otimes T_3$,

(2) distributif (sur $+$) : $T_1 \otimes (T_2 + T_3) = T_1 \otimes T_2 + T_1 \otimes T_3$,

où dans (2), T_2 et T_3 sont deux tenseurs de même variance.

Théorème

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et soit $v = (- \star - \star \star \dots)$ une variance. Alors $\overset{(v)}{\otimes}(E)$ admet pour base les

$$e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k \otimes e^{l\star} \otimes e^{m\star} \otimes \dots$$

pour $i, j, k, l, m, \dots = 1, \dots, n$, où E est assimilé à $E^{\star\star}$ de sorte que pour tout $i = 1, \dots, n$ et tout $\theta \in E^\star$, $e_i(\theta) = \theta(e_i)$. Les coordonnées ${T^i}_j{}^k{}_{lm} \dots$ d'un tenseur $T \in \overset{(v)}{\otimes}(E)$ dans cette base sont appelées composantes de T dans $(e_1, \dots, e_n)$.

Preuve : Supposons pour simplifier que $v = (- \star -)$. On veut montrer que les $(e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k)_{i,j,k=1,\dots,n}$ forment une base de $\overset{(v)}{\otimes}(E)$. On commence par montrer que cette famille est libre. Si pour des réels ${\lambda^i}_j{}^k$,

$${\lambda^i}_j{}^k e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k = 0$$

Preuve suite et fin : alors pour tout i_0, tout j_0, et tout k_0,

$$\left(\lambda^i{}_j{}^k e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k\right).\left(e^{i_0\star}, e_{j_0}, e^{k_0\star}\right) = 0 \ .$$

Or

$$\left(\lambda^i{}_j{}^k e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k\right).\left(e^{i_0\star}, e_{j_0}, e^{k_0\star}\right) = \lambda^{i_0}{}_{j_0}{}^{k_0} \ .$$

D'où le caractère libre de la famille.

On montre maintenant que la famille est génératrice. Soit donc T un tenseur de $\overset{(v)}{\otimes}(E)$. On pose

$$T^i{}_j{}^k = T\left(e^{i\star}, e_j, e^{k\star}\right) \ .$$

Alors pour tout $\theta = \theta_i e^{i\star} \in E^\star$, tout $u = u^i e_i \in E$, et tout $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_i e^{i\star} \in E^\star$,

$$\begin{aligned} T\left(\theta, u, \tilde{\theta}\right) &= \theta_i u^j \tilde{\theta}_k T\left(e^{i\star}, e_j, e^{k\star}\right) \\ &= T^i{}_j{}^k \theta_i u^j \tilde{\theta}_k \\ &= \left(T^i{}_j{}^k e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k\right).(\theta, u, \tilde{\theta}) \ . \end{aligned}$$

D'où le théorème. CQFD.

Proposition

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soient T et $\tilde{T}$ deux tenseurs sur E. Alors les composantes de $T \otimes \tilde{T}$ dans $(e_1, \ldots, e_n)$ sont le produit des composantes de T dans $(e_1, \ldots, e_n)$ et des composantes de $\tilde{T}$ dans $(e_1, \ldots, e_n)$.

La preuve de cette proposition est immédiate. A titre d'exemple, si $T = T^i{}_j{}^k e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k$ et $\tilde{T} = \tilde{T}^l{}_m e_l \otimes e^{m\star}$, alors

$$T \otimes \tilde{T} = T^i{}_j{}^k \tilde{T}^l{}_m e_i \otimes e^{l\star} \otimes e_k \otimes e_l \otimes e^{m\star} \ .$$

On énonce maintenant quelques conventions importantes.

Convention 1 : Une variance est dite ordonnée si elle est du type $(\star \cdots \star - \cdots -)$, i.e si les symboles $\star$ sont placés en tête de la variance, et les symboles $-$ en queue de la variance. Par tenseur p-fois covariant et q-fois contravariant (sans précision de variance) on entend un tenseur dont la variance est ordonnée.

Convention 2 : Dans l'écriture des composantes d'un tenseur dans une base, et afin de pouvoir appliquer la convention d'Einstein, on place toujours les **indices de covariance en bas** et les **indices de contravariance en haut**.

Les indices de covariance sont les indices des formes (i.e. les η_i) tandis que les indices contravariants sont les indices des vecteurs (i.e. les X^i).

Dans une expression du type $T_i{}^j{}_k{}^{lm}$, les indices i, k sont les indices de covariance tandis que les indices j, l, m sont les indices de contravariance. Le tenseur T qui a les $T_i{}^j{}_k{}^{lm}$ comme composantes est un tenseur 2-fois covariant et 3-fois contravariant, et ordonné suivant la variance $v = (\star - \star - -)$.

Théorème (Changement de base)

Soient $(e_1, \dots, e_n)$ *et* $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ *deux bases de* E*. On note* (a_i^j) *et* (b_j^i) *les matrices de passage définies pour tout* $i = 1, \dots, n$ *par*

$$e_i = a_i^j \tilde{e}_j \quad \text{et} \quad e^{i\star} = b_j^i \tilde{e}^{j\star} .$$

(Pour tous $i, j = 1, \dots, n$, $a_i^k b_k^j = \delta_i^j$ *de sorte que l'une est l'inverse de l'autre). Soit* $v = (- \star - \star \star \dots)$ *une variance, soit* $T \in \overset{(v)}{\otimes}(E)$*, et soient*

$$T^i{}_j{}^k{}_{lm}\dots \quad \text{et} \quad \tilde{T}^i{}_j{}^k{}_{lm}\dots$$

les composantes de T *dans* $(e_1, \dots, e_n)$ *et* $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$*. Alors*

$$\tilde{T}^i{}_j{}^k{}_{lm}\dots = T^\alpha{}_\beta{}^\gamma{}_{\delta\epsilon}\dots a_\alpha^i b_j^\beta a_\gamma^k b_l^\delta b_m^\epsilon \dots \qquad (\star)$$

pour tous $i, j, k, l, m, \dots$.

Preuve : Supposons pour simplifier que $v = (- \star -)$. Par définition,

$$\tilde{T}^i{}_j{}^k = T\left(\tilde{e}^{i\star}, \tilde{e}_j, \tilde{e}^{k\star}\right) \ .$$

Or

$$\tilde{e}^{i\star} = a^i_\alpha e^{\alpha\star} \quad , \quad \tilde{e}_j = b^\beta_j e_\beta \quad , \quad \tilde{e}^{k\star} = a^k_\gamma e^{\gamma\star} \ .$$

Par suite,

$$\tilde{T}^i{}_j{}^k = a^i_\alpha b^\beta_j a^k_\gamma T\left(e^{\alpha\star}, e_\beta, e^{\gamma\star}\right) = T^\alpha{}_\beta{}^\gamma a^i_\alpha b^\beta_j a^k_\gamma \ .$$

D'où le résultat. CQFD.

La formule $(\star)$ fut pendant longtemps utilisée comme définition des tenseurs. Par tenseur on entendait un objet géométrique dont on ne précise pas la nature concrète, mais qui possède par rapport à toute base de E des composantes qui sont assujetties à varier par changement de base selon la formule $(\star)$.

Remarque : On retrouve facilement la formule $(\star)$ en remarquant que les indices covariants changent comme ceux des formes, tandis que les indices contravariants changent comme ceux des vecteurs. Pour un vecteur on a en effet que $\tilde{X}^i = a^i_\alpha X^\alpha$, tandis que pour une forme, $\tilde{\eta}_i = b^\alpha_i \eta_\alpha$. Reste alors à "recoller" $|v|$-fois ces relations pour obtenir $(\star)$.

On termine ces éléments de calcul tensoriel par la définition de la contraction. On veut ici donner du sens à des expressions du type ${T_i}^\alpha{}_j {R_k}^l{}_\alpha$, sommées en α part convention d'Einstein, qui proviennent d'un tenseur plus général ${T_i}^\alpha{}_j {R_k}^l{}_\beta$ mais où le 1er indice contravariant (le α) et le 4ème indice covariant (le β) sont égalisés puis sommés.

Définition (Définition de la contraction)

Soit T un tenseur sur E p-fois covariant, q-fois contravariant, et ordonné suivant une variance v. Pour $1 \leq k_1 \leq p$ et $1 \leq k_2 \leq q$ deux entiers, on appelle contraction de T d'ordre (k_1, k_2), et on note $C_{k_1}^{k_2} T$, le tenseur sur E défini par

(1) $C_{k_1}^{k_2} T$ est $(p-1)$-fois covariant et $(q-1)$-fois contravariant de variance v où l'on a supprimé le $k_1$ième symbole $\star$ et le $k_2$ième symbole $-$,

(2) Dans une base de E, les composantes de $C_{k_1}^{k_2} T$ sont les composantes de T où le $k_1$ième indice covariant et le $k_2$ième indice contravariant sont égalisés puis sommés.

A titre d'exemple : si $T = T^{i}{}_{j}{}^{k}{}_{m} e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k \otimes e^{m\star}$, alors

$$C_1^2 T = T^{i}{}_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{m} e_i \otimes e^{m\star} .$$

On montre sans difficulté à partir du théorème de changement de base que cette définition ne dépend pas du choix de la base.

Preuve : Pour simplifier traitons du cas $v = (- \star - \star)$ de l'exemple ci-dessus. Avec les notations du théorème de changement de base, la formule $(\star)$ s'écrit ici

$$\tilde{T}^{i}{}_{j}{}^{k}{}_{l} = T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta} a^{i}_{\alpha} b^{\beta}_{j} a^{k}_{\gamma} b^{\delta}_{l} \ . \qquad (\star)$$

Par suite,

$$\tilde{T}^{i}{}_{\varepsilon}{}^{\varepsilon}{}_{l} = T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta} a^{i}_{\alpha} b^{\beta}_{\varepsilon} a^{\varepsilon}_{\gamma} b^{\delta}_{l} \ .$$

Or les matrices (a^{j}_{i}) et (b^{j}_{i}) sont l'inverse l'une de l'autre. Donc

$$a^{\varepsilon}_{\gamma} b^{\beta}_{\varepsilon} = \delta^{\beta}_{\gamma} \ ,$$

et on trouve ainsi que

$$\tilde{T}^{i}{}_{\varepsilon}{}^{\varepsilon}{}_{l} = T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\beta}{}_{\delta} a^{i}_{\alpha} b^{\delta}_{l} \ .$$

Donc

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{i}{}_{\varepsilon}{}^{\varepsilon}{}_{l} \tilde{e}_{i} \otimes \tilde{e}^{l\star} &= T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\beta}{}_{\delta} a^{i}_{\alpha} b^{\delta}_{l} \tilde{e}_{i} \otimes \tilde{e}^{l\star} \\ &= T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\beta}{}_{\delta} e_{\alpha} \otimes e^{\delta\star} \end{aligned}$$

car $e_{\alpha} = a^{i}_{\alpha} \tilde{e}_{i}$ et $e^{\delta\star} = b^{\delta}_{l} \tilde{e}^{l\star}$. CQFD.