CORRIGÉ DE L'EXAMEN DE L2
ALGÈBRE BILINÉAIRE ET INTÉGRATION
DE JANVIER 2019

EMMANUEL HEBEY

Exercice 1: **(1)** La matrice est symétrique. Elle est donc diagonalisable. On calcule $\det(A) = 0$. On en déduit que 0 est valeur propre de A.

(2) Si P est le polynôme caractéristique de A, alors

$$P(X) = \det \begin{pmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{pmatrix}$$

On trouve

$$P(X) = X^2(3-X) \ .$$

Les valeurs propres de A sont 0 (valeur propre double) et 3 (valeur propre simple).

(3) Si E_0 est l'espace propre associé à la valeur propre 0, alors

$$\begin{aligned} E_0 &= \{(x,y,z) \ / \ x+y+z=0\} \\ &= \{(x,y,-x-y), x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,-1) + y(0,1,-1), x,y \in \mathbb{R}\} \ . \end{aligned}$$

Soit $e_1 = (1,0,-1)$ et $e_2 = (0,1-1)$. Alors (e_1,e_2) est génératrice pour E_0. Comme elle est aussi libre (vérification facile), on en déduit que (e_1,e_2) est une base de E_0. On utilise Gram-Schmidt pour l'orthonormaliser. Soit $\langle \cdot,\cdot \rangle$ le produit scalaire euclmidien de $\mathbb{R}^3$ et $\| \cdot \|$ la norme associée. On trouve $\|e_1\| = 2$. On pose

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \ .$$

On calcule $\langle \tilde{e}_1, e_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On pose

$$u = e_2 - \langle \tilde{e}_1, e_2 \rangle \tilde{e}_1 = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} \right) \ .$$

Alors $\|u\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$. On pose

$$\tilde{e}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} u = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

Date: Le 4 Janvier 2019.

et alors $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est une base orhonormée de E_0. Soit maintenant E_3 l'espace propre associé à la valeur propre 3. On a

$$\begin{cases} 2x = y + z \\ 2y = x + z \\ 2z = x + Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y + z \\ 2y = x + z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$$

On en déduit que

$$E_3 = \{x(1,1,1)\ ,\ x \in \mathbb{R}\}$$

et E_3 est donc la droite vectorielle de base $e_3 = (1,1,1)$. On a $\|e_3\| = \sqrt{3}$. On pose

$$\tilde{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) .$$

La famille $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est alors une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ qui diagonalise A. La matrice

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

répond à la question. On a

$${}^tP \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Exercice 2: (1) On procède en développant l'expression donnée dans la question.

(2) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve $\det\left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi)\right) = 24$ et $24 \neq 0$. Donc Φ est bien un isomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

(3) On a bien l'égalité en vertue de la question (1). Les formes quadratiques Q et $\tilde{Q}$ sont donc équivalentes et elles ont ainsi même signature. La signature de $\tilde{Q}$ est $(3,0)$. La signature de Q est donc aussi $(3,0)$.

(4) Les vecteurs isotropes de Q sont les $X = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ qui vérifient $Q(X) = 0$. Avec la question (1) on trouve

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + 2z = 3t \\ z + 2t = 0 \end{cases}$$

et donc, si Δ est l'ensemble des vecteurs isotropes de Q, alors

$$\Delta = \{(0, 7t, -2t, t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\} .$$

Ici Δ est la droite vectorielle de base $(0,7,-2,1)$.

Exercices 3: (1) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{3x^2+2}{x^7+1} \ .$$

La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$. L'intégrale I_1 est généralisée en $+\infty$. On a

$$\lim_{x\to+\infty} x^5 f(x) = 3 \ .$$

Comme $5 > 1$, le critère de Riemann donne que I_1 est convergente.

(2) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{3x+5}{2x^2+7} \ .$$

La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$. L'intégrale I_2 est généralisée en $+\infty$. On a

$$\lim_{x\to+\infty} x f(x) = \frac{3}{2} \ .$$

Comme $1 \leq 1$, le critère de Riemann donne que I_2 est divergente.

(3) Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} \ .$$

La fonction f est continue et positive sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. L'intégrale I_3 est généralisée en 0. On a

$$\lim_{x\to 0^+} x f(x) = 1 \ .$$

Comme $1 \geq 1$, le critère de Riemann donne que I_3 est divergente.

(4) Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{3x+5}{\sqrt{x}(2x^3+7)} \ .$$

La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}^{+\star} =]0, +\infty[$. L'intégrale I_4 est généralisée en 0 et en $+\infty$. On a

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} f(x) = \frac{5}{7} \ .$$

Comme $\frac{1}{2} < 1$, le critère de Riemann donne que I_4 est convergente en 0. On a encore

$$\lim_{x\to+\infty} x^{5/2} f(x) = \frac{3}{2} \ .$$

Comme $\frac{5}{2} > 1$, le critère de Riemann donne que I_4 est convergente en $+\infty$. Comme I_4 est convergente à la fois en 0 et en $+\infty$ elle est convergente.

Exercices 4: (1) En vertue des théorèmes généraux, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + g(x)\cos(t)\right)$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$. On en déduit (théorème de cours) que F est continue sur $\mathbb{R}$.

(2) La fonction f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ en tout point de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = g'(x)\cos(t)\cos\left(\frac{\pi}{4} + g(x)\cos(t)\right)$$

pour tous $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. En vertue des théorèmes généraux, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. On en déduit que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$F'(x) = g'(x) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos\left(\frac{\pi}{4} + g(x)\cos(t)\right) dt$$

en tout point $x \in \mathbb{R}$. En particulier, puisque $g(0) = 0$ et $g'(0) = \sqrt{2}$,

$$F'(0) = g'(0) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \left[\sin(t)\right]_0^{\pi/2} = 1 \ .$$

Exercices 5: On applique Fubini pour calculer I. On obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (1 + x^3y^4) dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left[y + \frac{1}{5}x^3y^5\right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{5}x^3\right) dx \\ &= [x]_0^1 + \frac{1}{20}\left[x^4\right]_0^1 \\ &= 1 + \frac{1}{20} \\ &= \frac{21}{20} \ . \end{aligned}$$

On applique Fubini encore (Fubini pour les domaines en piles pour être précis) pour calculer J en écrivant que

$$J = \{(x,y) \in \mathbb{R} \ / \ 0 \le x \le 1 \text{ et } x \le y \le 1\} \ .$$

On obtient

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \left(\int_x^1 (1 + x^3y^4) dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left[y + \frac{1}{5}x^3y^5\right]_{y=x}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - x + \frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{5}x^8\right) dx \\ &= [x]_0^1 - \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^1 + \frac{1}{20}\left[x^4\right]_0^1 - \frac{1}{45}\left[x^9\right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{20} - \frac{1}{45} \\ &= \frac{19}{36} \ . \end{aligned}$$

Exercices 6: (1) Comme u est symétrique, u est diagonalisable (u est diagonalisable dans une base orthonormée de E). En particulier il existe $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ une base (orthonormée) qui diagonalise u. Si λ_i est la valeur propre associée à e_i alors

$$\langle u(e_i), e_i \rangle = \lambda_i \|e_i\|^2 \ .$$

Par hypothèse

$$\langle u(e_i), e_i \rangle = 0 \ ,$$

et puisque $\|e_i\| \neq 0$, on récupère $\lambda_i = 0$. Comme i est quelconque, $\lambda_i = 0$ pour tout i, et il suit que $M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(u)$ est la matrice nulle. En particulier u est l'endomorphisme nul.

(2) Par définition, A est orthogonale si et seulement si A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$. Il suffit donc de calculer le produit ${}^tAA$ et de chercher sous quelle condition nécessaire et suffisante on retrouve la matrice identité Id_3. Notons $D = a^2 + b^2 + c^2$. On a

$$\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & P & P \\ P & D & P \\ P & P & D \end{pmatrix} \ .$$

Par suite A est orthogonale si et seulement si $D = 1$ et $P = 0$. Comme $D = S^2 - 2P$ cela revient encore à dire que A est orthogonale si et seulement si $S = \pm 1$ et $P = 0$.

Exercices 7: On veut une condition nécessaire et suffisante sur k pour que Φ soit définie positive. Il suffit pour cela de trouver une condition nécessaire et suffisante sur k pour que $\Phi(x, x) > 0$ pour tout $x \in E\backslash\{0\}$. On commence par chercher une condition nécessaire. On note $\| \cdot \|$ la norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On calcule

$$\Phi(a, a) = \|a\|^2 + k\|a\|^4 = 1 + k$$

puisque $\|a\| = 1$. Il est donc nécessaire que $1 + k > 0$ et donc que $k > -1$. On montre maintenant que la condition $k > -1$ est aussi suffisante. Pour cela, on distingue deux cas. D'une part, si $k \geq 0$, alors pour tout $x \in E$, $x \neq 0$,

$$\Phi(x, x) \geq \|x\|^2 > 0 \ .$$

D'autre part, si $k \in]-1, 0[$, alors pour $x \in E$, $x \neq 0$,

$$\Phi(x, x) = \|x\|^2 - |k|\langle x, a \rangle^2$$

tandis que par Cauchy-Schwarz, puisque $\|a\| = 1$,

$$\langle x, a \rangle^2 \leq \|x\|^2 \ .$$

Donc

$$\Phi(x, x) \geq (1 - |k|) \, \|x\|^2 > 0 \ .$$

Dans les deux cas, on a montré que $\Phi(x, x) > 0$ pour tout $x \in E\backslash\{0\}$. Par suite, Φ est un produit scalaire si et seulement si $k > -1$.