Calcul Différentiel Avancé

par

Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise

Année 2017-2018

Chapitre 8
Calcul tensoriel et Connexions linéaires
1. Le fibré cotangent

Soit M une variété de dimension n, x un point de M, et (Ω, φ) une carte de M au point x de coordonnées associées $(x_1, \ldots, x_n)$. On note $T_x(M)^\star$ l'espace dual de $T_x(M)$, à savoir

$$T_x(M)^\star = L\big(T_x(M), \mathbb{R}\big) \ ,$$

et pour tout $i = 1, \ldots, n$, on note dx_x^i la forme de $T_x(M)^\star$ définie par : $\forall j = 1, \ldots, n$,

$$dx_x^i . \Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_x = \delta_i^j \ ,$$

où $\delta_i^j = 1$ si $i = j$, et $\delta_i^j = 0$ sinon.

Proposition

La famille $\big\{dx_x^i\big\}_{i=1,\ldots,n}$ *est une base de* $T_x(M)^\star$.

Preuve : On montre que la famille est libre. Si pour λ_i, $i = 1, \ldots, n$, des réels, $\lambda_i dx_x^i = 0$, alors pour tout $j = 1, \ldots, n$,

$$(\lambda_i dx_x^i).(\frac{\partial}{\partial x_j})_x = 0$$

et ainsi $\lambda_j = 0$ pour tout j. D'où le caractère libre de la famille. On montre maintenant que la famille est génératrice. Pour cela, il suffit de vérifier que pour tout $\eta \in T_x(M)^\star$,

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} \eta((\frac{\partial}{\partial x_i})_x) dx_x^i$$

ce qui se fait facilement (le LHS et le RHS sont deux formes linéaires qui coïncident sur la base des $(\frac{\partial}{\partial x_i})_x$, donc partout). CQFD.

Remarque : Pour tout i, $dx_x^i = d\varphi^i(x)$ où $d\varphi^i(x)$ est la différentielle de φ^i au point x.

D'après cette proposition, tout $\eta \in T_x(M)^\star$ s'écrit $\eta = \eta_i dx_x^i$. Les η_i sont appelés composantes de η dans la carte (Ω, φ).

Théorème (Changement de carte)

Soient M une variété de dimension n, x un point de M, et (Ω, φ), (Ω', ψ) deux cartes de M en x de coordonnées associées $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$. Alors pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$dy^i_x = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x_j}\right)_x dx^j_x \quad \text{et} \quad dx^i_x = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y_j}\right)_x dy^j_x \ .$$

En particulier, si η a pour composantes $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ dans la carte (Ω, φ), et $(\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_n)$ dans la carte (Ω', ψ), alors

$$\eta_i = \left(\frac{\partial y^j}{\partial x_i}\right)_x \tilde{\eta}_j \quad \text{et} \quad \tilde{\eta}_i = \left(\frac{\partial x^j}{\partial y_i}\right)_x \eta_j$$

pour tout $i = 1, \dots, n$.

Remarque : On notera la “symétrie” de ces formules avec celles correspondantes pour les vecteurs.

Preuve : On sait que pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$(\frac{\partial}{\partial y_i})_x = (\frac{\partial x^j}{\partial y_i})_x (\frac{\partial}{\partial x_j})_x ,$$

tandis que d'après ce qui a été dit un peu plus tôt,

$$dx_x^i = \sum_{j=1}^{n} dx_x^i . (\frac{\partial}{\partial y_j})_x dy_x^j .$$

De la première de ces relations, on tire que

$$\begin{aligned} dx_x^i . (\frac{\partial}{\partial y_j})_x &= (\frac{\partial x^k}{\partial y_j})_x dx_x^i . (\frac{\partial}{\partial x_k})_x \\ &= (\frac{\partial x^i}{\partial y_j})_x . \end{aligned}$$

Par suite, et pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$dx_x^i = (\frac{\partial x^i}{\partial y_j})_x dy_x^j .$$

Preuve suite : Par symétrie, il s'ensuit que pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$dy_x^i = (\frac{\partial y^i}{\partial x_j})_x dx_x^j \ ,$$

et la première partie du théorème est démontrée. Pour ce qui est de la seconde, soit $\eta \in T_x(M)^\star$ de composantes $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ dans la carte (Ω, φ), et $(\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_n)$ dans la carte (Ω', ψ). On écrit que

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_i dx_x^i \\ &= \eta_i (\frac{\partial x^i}{\partial y_j})_x dy_x^j \\ &= \tilde{\eta}_j dy_x^j \end{aligned}$$

de sorte que pour tout $j = 1, \ldots, n$,

$$\tilde{\eta}_j = (\frac{\partial x^i}{\partial y_j})_x \eta_i \ ,$$

ce qui constitue une des relations qu'il nous fallait démontrer. Par symétrie, on obtient l'autre relation. D'où le théorème. CQFD.

On définit maintenant le fibré cotangent $T^\star(M)$ de M. Par définition, il s'agit de la réunion (disjointe) des $T_x(M)^\star$, $x \in M$. On écrit que

$$T^\star(M) = \bigcup_{x \in M} T_x(M)^\star \ .$$

Si $\mathcal{A}$ désigne l'atlas saturé de M, à toute carte (Ω, φ) de $\mathcal{A}$ on associe l'application

$$\Phi : \bigcup_{x \in \Omega} T_x(M)^\star \longrightarrow \varphi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$$

qui à $\eta \in T_x(M)^\star$, $x \in \Omega$, associe

$$\Phi(\eta) = \big(x_1, \dots, x_n, \eta_1, \dots, \eta_n\big) \ ,$$

où les x_i sont les coordonnées de x dans (Ω, φ), et les η_i sont les composantes de η dans (Ω, φ).

En procédant comme dans le cas du fibré tangent, on montre facilement :

(1) qu'il existe une et une seule topologie sur $T^\star(M)$ pour laquelle :

(i) pour tout ouvert Ω de M, $\displaystyle\bigcup_{x\in\Omega} T_x(M)^\star$ est un ouvert de $T^\star(M)$,

(ii) pour toute carte (Ω,φ) de $\mathcal{A}$, l'application Φ construite ci-dessus est un homéomorphisme de $\displaystyle\bigcup_{x\in\Omega} T_x(M)^\star$ sur $\varphi(\Omega)\times\mathbb{R}^n$,

(2) que si $T^\star(M)$ est muni de cette topologie, l'ensemble des

$$\Big(\bigcup_{x\in\Omega} T_x(M)^\star, \Phi\Big)_{(\Omega,\varphi)\in\mathcal{A}}$$

est un atlas de classe C^∞ sur $T^\star(M)$ (formules de changement de cartes).

D'où le résultat suivant.

Théorème

Soit M une variété de dimension n. Son fibré cotangent $T^\star(M)$ possède une structure naturelle de variété de dimension $2n$, donnée par les cartes construites ci-dessus.

C'est désormais à cette structure que nous ferons référence. On note $\Pi : T^\star(M) \to M$ la projection canonique qui à $\eta \in T_x(M)^\star$ associe $\Pi(\eta) = x$. Comme dans le cas du fibré tangent il s'agit d'une submersion.

Remarque : Les applications Φ du fibré tangent comme du fibré cotangent sont construites sur le même modèle :

$$\Phi(\text{objet}) \\ = (\text{coordonnées de } x, \text{composantes de l'objet}) \ ,$$

i.e. $(\text{coordonnées de } x, \text{composantes de } X)$ pour le fibré tangent et $(\text{coordonnées de } x, \text{composantes de } \eta)$ pour le fibré cotangent.

Etant donnée M une variété, on appelle 1-forme sur M toute application $\eta : M \to T^\star(M)$ qui vérifie $\Pi \circ \eta = Id_M$, i.e qui est telle que pour tout $x \in M$, $\eta(x) \in T_x(M)^\star$. On dira alors que η est de classe C^k si elle est de classe C^k en tant qu'application de la variété M dans la variété $T^\star(M)$. Si maintenant (Ω, φ) est une carte de M de coordonnées associées $(x_1, \dots, x_n)$, et si η est une 1-forme sur M, on appelle fonctions composantes (ou tout simplement composantes) de η dans (Ω, φ) les fonctions $\eta_i : \Omega \to \mathbb{R}$ définies en tout point x de Ω par la relation

$$\eta(x) = \eta_i(x) dx_x^i \ .$$

Par suite, et pour tout i et tout x dans Ω, $\eta_i(x) = \eta(x).\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x$.

Proposition

Une 1-forme η est de classe C^k sur l'ouvert Ω d'une carte (Ω, φ) de M si et seulement si ses fonctions composantes dans (Ω, φ) sont de classe C^k sur Ω.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $E^\star$ son espace dual, i.e $E^\star = L(E,\mathbb{R})$. Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, on définit pour tout $i = 1,\dots,n$ l'élément $e^{i\star}$ de $E^\star$ par : $\forall j = 1,\dots,n$,

$$e^{i\star}(e_j) = \delta^i_j \ .$$

Alors $(e^{1\star},\dots,e^{n\star})$ est une base de $E^\star$, appelée base duale de la base $(e_1,\dots,e_n)$. La preuve de cette assertion est ici identique à celle que nous avons effectuée pour montrer que les dx^i_x formaient une base de $T_x(M)^\star$.

Proposition

L'application φ de E dans $E^{\star\star} = L(E^\star,\mathbb{R})$ définie par : $\forall u \in E$, $\forall \theta \in E^\star$,

$$\varphi(u).(\theta) = \theta(u)$$

est un isomorphisme de E sur $E^{\star\star}$. En particulier, $E^{\star\star}$ s'assimile naturellement à E.

Preuve : Il est clair que φ est linéaire. Comme par ailleurs $dimE = dimE^{\star\star}$, il nous suffit de montrer que φ est injective. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si pour deux vecteurs u et v de E, $\varphi(u) = \varphi(v)$, alors en particulier, pour tout i,

$$e^{i\star}(u) = e^{i\star}(v) \ .$$

Or, on le constate facilement, les $e^{i\star}(u)$ et $e^{i\star}(v)$ sont les coordonnées de u et v dans $(e_1, \ldots, e_n)$. Il s'ensuit que si $\varphi(u) = \varphi(v)$, alors $u = v$. D'où le résultat. CQFD.

Concrètement, l'assimilation de $E^{\star\star}$ avec E consiste à regarder un vecteur u de E comme l'élément de $E^{\star\star}$ défini par : $u(\eta) = \eta(u)$ pour tout $\eta \in E^{\star}$.

Définition (Produit tensoriel 1)

Soient $(E_i)_{i=1,\ldots,N}$ N $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et soient $\theta_i \in E_i^\star$, $i = 1, \ldots, N$, N formes linéaires. Alors $\theta_1 \otimes \cdots \otimes \theta_N$ est la forme N-linéaire sur $E_1 \times \cdots \times E_N$ définie par : $\forall (u_1, \ldots, u_N) \in E_1 \times \cdots \times E_N$,

$$(\theta_1 \otimes \cdots \otimes \theta_N).(u_1, \ldots, u_N) = \prod_{i=1}^{N} \theta_i(u_i) \; .$$

Ici, $\theta_1 \otimes \theta_2$ se lit θ_1 "tensoriel" θ_2.

Etant donnés des entiers p et q, on appelle variance de type (p, q) tout $(p+q)$-uplet v composé de p symboles $\star$ et q symboles $-$. La longueur de la variance est alors l'entier $|v| = p + q$.

Par exemple $v = (\star \star - \star)$ est une variance de type $(3, 1)$, tandis que $v = (- \star \star - \star \star -)$ est une variance de type $(4, 3)$.

Définition (Définition des tenseurs)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Un tenseur sur E de variance $v = (- \star - \star \star - \star \dots)$ est une forme $|v|$-linéaire sur

$$E^\star \times E \times E^\star \times E \times E \times E^\star \times E \times \dots$$

(Les $-$ deviennent des $\star$, les $\star$ deviennent des $-$). Si v est de type (p, q), un tel tenseur est dit p-fois covariant, q-fois contravariant, et ordonné suivant la variance v. L'espace de ces tenseurs est noté $\overset{(v)}{\otimes}(E)$. Par convention, cet espace vaut $\mathbb{R}$ si la variance v est vide.

A titre d'exemples : (1) Une forme linéaire sur E est un tenseur 1-fois covariant et 0-fois contravariant, i.e de variance $v = (\star)$.

(2) Un vecteur sur E (via l'assimilation de E à $E^{\star\star}$) est un tenseur 1-fois contravariant et 0-fois covariant, i.e de variance $v = (-)$.

Définition (Produit tensoriel 2)

Si T et $\tilde{T}$ sont deux tenseurs sur E de variances respectives $v = (- \star - \star \star - \star \dots)$ et $\tilde{v} = (\star - \star - \star \dots)$, alors $T \otimes \tilde{T}$ (lire T "tensoriel $\tilde{T}$) est le tenseur sur E de variance

$$v\tilde{v} = (- \star - \star \star - \star \cdots \star - \star - \star \dots)$$

défini par : pour tout $X \in E^\star \times E \times E^\star \times E \times E \times E^\star \times E \times \dots$ et tout $Y \in E \times E^\star \times E \times E^\star \times E \times \dots$,

$$(T \otimes \tilde{T}).(X, Y) = T(X)\tilde{T}(Y) \; .$$

On vérifie facilement ici que le produit tensoriel $\otimes$ est :

(1) associatif : $T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3) = (T_1 \otimes T_2) \otimes T_3$,

(2) distributif (sur $+$) : $T_1 \otimes (T_2 + T_3) = T_1 \otimes T_2 + T_1 \otimes T_3$,

où dans (2), T_2 et T_3 sont deux tenseurs de même variance.

Théorème

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et soit $v = (- \star - \star \star \dots)$ une variance. Alors $\overset{(v)}{\otimes}(E)$ admet pour base les

$$e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k \otimes e^{l\star} \otimes e^{m\star} \otimes \dots$$

pour $i, j, k, l, m, \dots = 1, \dots, n$, où E est assimilé à $E^{\star\star}$ de sorte que pour tout $i = 1, \dots, n$ et tout $\theta \in E^\star$, $e_i(\theta) = \theta(e_i)$. Les coordonnées ${T^i}_j{}^k{}_{lm}\dots$ d'un tenseur $T \in \overset{(v)}{\otimes}(E)$ dans cette base sont appelées composantes de T dans $(e_1, \dots, e_n)$.

Preuve : Supposons pour simplifier que $v = (- \star -)$. On veut montrer que les $(e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k)_{i,j,k=1,\dots,n}$ forment une base de $\overset{(v)}{\otimes}(E)$. On commence par montrer que cette famille est libre. Si pour des réels ${\lambda^i}_j{}^k$,

$${\lambda^i}_j{}^k e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k = 0$$

Preuve suite et fin : alors pour tout i_0, tout j_0, et tout k_0,

$$\left(\lambda^i{}_j{}^k e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k\right).\left(e^{i_0\star}, e_{j_0}, e^{k_0\star}\right) = 0 \ .$$

Or

$$\left(\lambda^i{}_j{}^k e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k\right).\left(e^{i_0\star}, e_{j_0}, e^{k_0\star}\right) = \lambda^{i_0}{}_{j_0}{}^{k_0} \ .$$

D'où le caractère libre de la famille.

On montre maintenant que la famille est génératrice. Soit donc T un tenseur de $\overset{(v)}{\otimes}(E)$. On pose

$$T^i{}_j{}^k = T\left(e^{i\star}, e_j, e^{k\star}\right) \ .$$

Alors pour tout $\theta = \theta_i e^{i\star} \in E^\star$, tout $u = u^i e_i \in E$, et tout $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_i e^{i\star} \in E^\star$,

$$\begin{aligned} T\left(\theta, u, \tilde{\theta}\right) &= \theta_i u^j \tilde{\theta}_k T\left(e^{i\star}, e_j, e^{k\star}\right) \\ &= T^i{}_j{}^k \theta_i u^j \tilde{\theta}_k \\ &= \left(T^i{}_j{}^k e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k\right).(\theta, u, \tilde{\theta}) \ . \end{aligned}$$

D'où le théorème. CQFD.

Proposition

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soient T et $\tilde{T}$ deux tenseurs sur E. Alors les composantes de $T \otimes \tilde{T}$ dans $(e_1, \ldots, e_n)$ sont le produit des composantes de T dans $(e_1, \ldots, e_n)$ et des composantes de $\tilde{T}$ dans $(e_1, \ldots, e_n)$.

La preuve de cette proposition est immédiate. A titre d'exemple, si $T = T^i{}_j{}^k e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k$ et $\tilde{T} = \tilde{T}^l{}_m e_l \otimes e^{m\star}$, alors

$$T \otimes \tilde{T} = T^i{}_j{}^k \tilde{T}^l{}_m e_i \otimes e^{l\star} \otimes e_k \otimes e_l \otimes e^{m\star} \ .$$

On énonce maintenant quelques conventions importantes.

Convention 1 : Une variance est dite ordonnée si elle est du type $(\star \cdots \star - \cdots -)$, i.e si les symboles $\star$ sont placés en tête de la variance, et les symboles $-$ en queue de la variance. Par tenseur p-fois covariant et q-fois contravariant (sans précision de variance) on entend un tenseur dont la variance est ordonnée.

Convention 2 : Dans l'écriture des composantes d'un tenseur dans une base, et afin de pouvoir appliquer la convention d'Einstein, on place toujours les **indices de covariance en bas** et les **indices de contravariance en haut**.

Les indices de covariance sont les indices des formes (i.e. les η_i) tandis que les indices contravariants sont les indices des vecteurs (i.e. les X^i).

Dans une expression du type $T_i{}^j{}_k{}^{lm}$, les indices i, k sont les indices de covariance tandis que les indices j, l, m sont les indices de contravariance. Le tenseur T qui a les $T_i{}^j{}_k{}^{lm}$ comme composantes est un tenseur 2-fois covariant et 3-fois contravariant, et ordonné suivant la variance $v = (\star - \star - -)$.

Théorème (Changement de base)

Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ *et* $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ *deux bases de* E*. On note* (a_i^j) *et* (b_j^i) *les matrices de passage définies pour tout* $i = 1, \ldots, n$ *par*

$$e_i = a_i^j \tilde{e}_j \quad et \quad e^{i\star} = b_j^i \tilde{e}^{j\star} \ .$$

(Pour tous $i, j = 1, \ldots, n$, $a_i^k b_k^j = \delta_i^j$ *de sorte que l'une est l'inverse de l'autre). Soit* $v = (- \star - \star \star \ldots)$ *une variance, soit* $T \in \overset{(v)}{\otimes}(E)$*, et soient*

$$T^i{}_j{}^k{}_{lm}\ldots \quad et \quad \tilde{T}^i{}_j{}^k{}_{lm}\ldots$$

les composantes de T *dans* $(e_1, \ldots, e_n)$ *et* $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$*. Alors*

$$\tilde{T}^i{}_j{}^k{}_{lm}\cdots = T^\alpha{}_\beta{}^\gamma{}_{\delta\epsilon}\ldots a_\alpha^i b_j^\beta a_\gamma^k b_l^\delta b_m^\epsilon \ldots \qquad (\star)$$

pour tous $i, j, k, l, m, \ldots$*.*

Preuve : Supposons pour simplifier que $v = (- \star -)$. Par définition,

$$\tilde{T}^{i}{}_{j}{}^{k} = T\left(\tilde{e}^{i\star}, \tilde{e}_j, \tilde{e}^{k\star}\right) \ .$$

Or

$$\tilde{e}^{i\star} = a^i_\alpha e^{\alpha\star} \quad , \quad \tilde{e}_j = b^\beta_j e_\beta \quad , \quad \tilde{e}^{k\star} = a^k_\gamma e^{\gamma\star} \ .$$

Par suite,

$$\tilde{T}^{i}{}_{j}{}^{k} = a^i_\alpha b^\beta_j a^k_\gamma T\left(e^{\alpha\star}, e_\beta, e^{\gamma\star}\right) = T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma} a^i_\alpha b^\beta_j a^k_\gamma \ .$$

D'où le résultat. CQFD.

La formule $(\star)$ fut pendant longtemps utilisée comme définition des tenseurs. Par tenseur on entendait un objet géométrique dont on ne précise pas la nature concrète, mais qui possède par rapport à toute base de E des composantes qui sont assujetties à varier par changement de base selon la formule $(\star)$.

Remarque : On retrouve facilement la formule ($\star$) en remarquant que les indices covariants changent comme ceux des formes, tandis que les indices contravariants changent comme ceux des vecteurs. Pour un vecteur on a en effet que $\tilde{X}^i = a^i_\alpha X^\alpha$, tandis que pour une forme, $\tilde{\eta}_i = b^\alpha_i \eta_\alpha$. Reste alors à "recoller" $|v|$-fois ces relations pour obtenir ($\star$).

On termine ces éléments de calcul tensoriel par la définition de la contraction. On veut ici donner du sens à des expressions du type ${T_i}^\alpha{}_j {R_k}^l{}_\alpha$, sommées en α part convention d'Einstein, qui proviennent d'un tenseur plus général ${T_i}^\alpha{}_j {R_k}^l{}_\beta$ mais où le 1er indice contravariant (le α) et le 4ème indice covariant (le β) sont égalisés puis sommés.

Définition (Définition de la contraction)

Soit T un tenseur sur E p-fois covariant, q-fois contravariant, et ordonné suivant une variance v. Pour $1 \leq k_1 \leq p$ et $1 \leq k_2 \leq q$ deux entiers, on appelle contraction de T d'ordre (k_1, k_2), et on note $C_{k_1}^{k_2} T$, le tenseur sur E défini par

(1) $C_{k_1}^{k_2} T$ est $(p-1)$-fois covariant et $(q-1)$-fois contravariant de variance v où l'on a supprimé le $k_1$ième symbole $\star$ et le $k_2$ième symbole $-$,

(2) Dans une base de E, les composantes de $C_{k_1}^{k_2} T$ sont les composantes de T où le $k_1$ième indice covariant et le $k_2$ième indice contravariant sont égalisés puis sommés.

A titre d'exemple : si $T = T^{i}{}_{j}{}^{k}{}_{m} e_i \otimes e^{j\star} \otimes e_k \otimes e^{m\star}$, alors

$$C_1^2 T = T^{i}{}_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{m} e_i \otimes e^{m\star} \ .$$

On montre sans difficulté à partir du théorème de changement de base que cette définition ne dépend pas du choix de la base.

Preuve : Pour simplifier traitons du cas $v = (- \star - \star)$ de l'exemple ci-dessus. Avec les notations du théorème de changement de base, la formule $(\star)$ s'écrit ici

$$\tilde{T}^{i}{}_{j}{}^{k}{}_{l} = T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta} a^{i}_{\alpha} b^{\beta}_{j} a^{k}_{\gamma} b^{\delta}_{l} \ . \qquad (\star)$$

Par suite,

$$\tilde{T}^{i}{}_{\varepsilon}{}^{\varepsilon}{}_{l} = T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta} a^{i}_{\alpha} b^{\beta}_{\varepsilon} a^{\varepsilon}_{\gamma} b^{\delta}_{l} \ .$$

Or les matrices (a^{j}_{i}) et (b^{j}_{i}) sont l'inverse l'une de l'autre. Donc

$$a^{\varepsilon}_{\gamma} b^{\beta}_{\varepsilon} = \delta^{\beta}_{\gamma} \ ,$$

et on trouve ainsi que

$$\tilde{T}^{i}{}_{\varepsilon}{}^{\varepsilon}{}_{l} = T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\beta}{}_{\delta} a^{i}_{\alpha} b^{\delta}_{l} \ .$$

Donc

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{i}{}_{\varepsilon}{}^{\varepsilon}{}_{l} \tilde{e}_{i} \otimes \tilde{e}^{l\star} &= T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\beta}{}_{\delta} a^{i}_{\alpha} b^{\delta}_{l} \tilde{e}_{i} \otimes \tilde{e}^{l\star} \\ &= T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\beta}{}_{\delta} e_{\alpha} \otimes e^{\delta\star} \end{aligned}$$

car $e_{\alpha} = a^{i}_{\alpha} \tilde{e}_{i}$ et $e^{\delta\star} = b^{\delta}_{l} \tilde{e}^{l\star}$. CQFD.

Soient M une variété de dimension n, x un point de M, et v une variance. Si $T \in \overset{(v)}{\otimes}\big(T_x(M)\big)$, et si (Ω, φ) désigne une carte de M en x de coordonnées associées $(x_1, \ldots, x_n)$, on appelle composantes de T dans (Ω, φ) les composantes de T dans la base $\big((\frac{\partial}{\partial x_i})_x, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_x\big)$ de $T_x(M)$. Si maintenant (Ω, φ) et (Ω', ψ) sont deux cartes de M en x de coordonnées associées respectives $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$, si par exemple $v = (- \star - \star \ldots)$, et si $T^i{}_j{}^k{}_l \ldots$ et $\tilde{T}^i{}_j{}^k{}_l \ldots$ sont les composantes de T dans (Ω, φ) et (Ω', ψ), alors en raison de ce qui a été dit au paragraphe précédent,

$$\tilde{T}^i{}_j{}^k{}_l \cdots = T^\alpha{}_\beta{}^\gamma{}_\delta \ldots \left(\frac{\partial y^i}{\partial x_\alpha}\right)_x \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial y_j}\right)_x \left(\frac{\partial y^k}{\partial x_\gamma}\right)_x \left(\frac{\partial x^\delta}{\partial y_l}\right)_x \ldots \qquad (\star)$$

Il suffit ici de se souvenir que pour $X \in T_x(M)$ et $\eta \in T_x(M)^\star$,

$$\tilde{X}^i = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x_\alpha}\right)_x X^\alpha \quad \text{et} \quad \tilde{\eta}_i = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y_i}\right)_x \eta_\alpha \ .$$

En particulier, sachant que pour toute base $(e_1, \dots, e_n)$ de $T_x(M)$ il existe une carte (Ω, φ) de M au point x telle que pour tout i, $(\frac{\partial}{\partial x_i})_x = e_i$, la relation $(\star)$ caractérise les tenseurs de $T_x(M)$.

On note maintenant $\overset{(v)}{\otimes}(M)$ la réunion (disjointe) des $\overset{(v)}{\otimes}\big(T_x(M)\big)$. On écrit

$$\overset{(v)}{\otimes}(M) = \bigcup_{x \in M} \overset{(v)}{\otimes}\big(T_x(M)\big) \ .$$

Si $v = (-)$, on retrouve le fibré tangent. Si $v = (\star)$, on retrouve le fibré cotangent. Soit $\mathcal{A}$ l'atlas saturé de M. A toute carte (Ω, φ) de $\mathcal{A}$ on associe l'application

$$\Phi : \bigcup_{x \in \Omega} \overset{(v)}{\otimes}\big(T_x(M)\big) \longrightarrow \varphi(\Omega) \times \mathbf{R}^{n^{|v|}}$$

qui à $T \in \overset{(v)}{\otimes}\big(T_x(M)\big)$, $x \in \Omega$, fait correspondre les coordonnées de x dans (Ω, φ), suivies des composantes de T dans (Ω, φ).

En procédant comme dans le cas des fibrés tangents et cotangents, on vérifie facilement que :

1) il existe une et une seule topologie sur $\overset{(v)}{\otimes}(M)$ pour laquelle :

(1a) pour tout ouvert Ω de M, $\bigcup_{x\in\Omega} \overset{(v)}{\otimes}\big(T_x(M)\big)$ est un ouvert de $\overset{(v)}{\otimes}(M)$,

(1b) pour toute carte (Ω, φ) de $\mathcal{A}$, l'application Φ construite ci-dessus est un homéomorphisme,

2) si $\overset{(v)}{\otimes}(M)$ est muni de cette topologie, l'ensemble des

$$\Big(\bigcup_{x\in\Omega} \overset{(v)}{\otimes}\big(T_x(M)\big), \Phi\Big)_{(\Omega,\varphi)\in\mathcal{A}}$$

est un atlas de classe C^∞ sur $\overset{(v)}{\otimes}(M)$.

D'où le résultat suivant.

Théorème

Soient M un variété de dimension n, et v une variance. Le fibré $\overset{(v)}{\otimes}(M)$ possède une structure naturelle de variété de dimension $n\big(1+n^{|v|-1}\big)$. Cette structure est déterminée par l'atlas construit ci-dessus.

On note

$$\Pi : \overset{(v)}{\otimes}(M) \longrightarrow M$$

la projection canonique qui à $T \in \overset{(v)}{\otimes}\big(T_x(M)\big)$ associe $\Pi(T) = x$. On vérifie facilement que Π est une submersion.

Là encore, on le constate facilement, l'application Φ des cartes du fibré des tenseurs est construite sur le modèle

$$\Phi(\text{objet}) = (\text{coordonnées de } x, \text{composantes de l'objet}) \ ,$$

i.e. (coordonnées de x, composantes de X) pour le fibré tangent, (coordonnées de x, composantes de η) pour le fibré cotangent, (coordonnées de x, composantes de T) pour le fibré des tenseurs.

Etant données M une variété et v une variance, on appelle champ de v-tenseurs sur M toute application

$$T : M \longrightarrow \overset{(v)}{\otimes}(M)$$

qui vérifie la propriété que $\Pi \circ T = Id_M$, i.e qui est telle que pour tout $x \in M$, $T(x) \in \overset{(v)}{\otimes}\big(T_x(M)\big)$. On dira alors que T est de classe C^k s'il est de classe C^k en tant qu'application de la variété M dans la variété $\overset{(v)}{\otimes}(M)$. On vérifie là encore facilement que la proposition suivante a lieu.

Proposition

Un champ de v-tenseurs sur M est de classe C^k sur l'ouvert Ω d'une carte (Ω, φ) de M si et seulement si les fonctions composantes de T dans (Ω, φ) sont de classe C^k sur Ω.

Définition

Soit M une variété. On note $\Gamma(M)$ l'espace des champs de vecteurs différentiables sur M. Une connexion sur M est une application $D : T(M) \times \Gamma(M) \longrightarrow T(M)$ qui vérifie :

(1) $\forall x \in M$, *si* $X \in T_x(M)$ *et* $Y \in \Gamma(M)$, $D(X,Y) \in T_x(M)$,

(2) $\forall x \in M$, *D réstreinte à* $T_x(M) \times \Gamma(M)$ *est bilinéaire,*

(3) $\forall x \in M$, $\forall X \in T_x(M)$, $\forall Y \in \Gamma(M)$, *si* $f : M \to \mathbb{R}$ *est différentiable, alors* $D(X, fY) = X(f)Y(x) + f(x)D(X,Y)$,

(4) $\forall X, Y \in \Gamma(M)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, *si X et Y sont respectivement de classe C^k et C^{k+1} sur M, alors $D(X,Y)$ est de classe C^k sur M, où $D(X,Y)$ est le champ $x \to D(X(x), Y)$.*

Etant donnée D une connexion sur M, on note le plus souvent $D_X Y$ au lieu de $D(X,Y)$. Par définition, $D_X Y$ s'appelle la dérivée covariante de Y par rapport à X.

Soient D une connexion sur M, et (Ω, φ) une carte de M de coordonnées associées $(x_1, \ldots, x_n)$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on note

$$\nabla_i = D_{(\frac{\partial}{\partial x_i})} ,$$

de sorte que pour tout $x \in \Omega$, et tout $X \in \Gamma(M)$,

$$\big(\nabla_i X\big)(x) = D_{(\frac{\partial}{\partial x_i})_x} X .$$

Pour tous $i, j = 1, \ldots, n$, $\nabla_i(\frac{\partial}{\partial x_j})$, défini en tout point x de Ω par

$$\nabla_i(\frac{\partial}{\partial x_j})(x) = D_{(\frac{\partial}{\partial x_i})_x}(\frac{\partial}{\partial x_j}) ,$$

est alors un C^∞-champ de vecteurs sur Ω. On note

$$\Gamma_{ij}^k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

ses fonctions coordonnées dans (Ω, φ). Elles sont de classe C^∞ et définies par le fait que pour tout $x \in \Omega$, et tous $i, j = 1, \ldots, n$,

$$\nabla_i(\frac{\partial}{\partial x_j})(x) = \Gamma_{ij}^k(x)(\frac{\partial}{\partial x_k})_x .$$

Par définition, les Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel de la connexion D dans la carte (Ω, φ).

Théorème

Les symboles de Christoffel d'une connexion D dans une carte (Ω, φ) de coordonnées associées $(x_1, \ldots, x_n)$, définissent (caractérisent) l'expression locale de la connexion dans la carte en ce sens que pour tout $x \in \Omega$, tout $X = X^i(\frac{\partial}{\partial x_i})_x \in T_x(M)$, et tout $Y = Y^i(\frac{\partial}{\partial x_i}) \in \Gamma(M)$,

$$D_X Y = X^i(\nabla_i Y)(x) \ ,$$

où

$$(\nabla_i Y)(x)^j = (\frac{\partial Y^j}{\partial x_i})_x + \Gamma_{i\alpha}^j(x) Y^\alpha(x)$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$, et tout $j = 1, \ldots, n$.

Preuve : Avec le point 2) de la définition d'une connexion,

$$D_X Y = X^i(\nabla_i Y)(x) \ .$$

Toujours d'après 2),

$$(\nabla_i Y)(x) = \sum_{j=1}^{n} D_{(\frac{\partial}{\partial x_i})_x}\big(Y^j(\frac{\partial}{\partial x_j})\big) \ .$$

Or, d'après 3),

$$\begin{aligned} D_{(\frac{\partial}{\partial x_i})_x}\big(Y^j(\frac{\partial}{\partial x_j})\big) &= (\frac{\partial}{\partial x_i})_x.(Y^j)(\frac{\partial}{\partial x_j})_x + Y^j(x) D_{(\frac{\partial}{\partial x_i})_x}(\frac{\partial}{\partial x_j}) \\ &= (\frac{\partial Y^j}{\partial x_i})_x(\frac{\partial}{\partial x_j})_x + Y^j(x)\Gamma_{ij}^k(x)(\frac{\partial}{\partial x_k})_x \ . \end{aligned}$$

D'où la relation

$$(\nabla_i Y)(x)^j = (\frac{\partial Y^j}{\partial x_i})_x + \Gamma^j_{i\alpha}(x) Y^\alpha(x)$$

et le résultat. CQFD.

Théorème

Soient M une variété et D une connexion sur M. Etant données (Ω, φ) et (Ω, ψ) deux cartes de M de coordonnées associées $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$, on note Γ_{ij}^k et $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ les symboles de Christoffel de D dans (Ω, φ) et (Ω, ψ). Alors pour tout $x \in \Omega$, et tous i, j, k,

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k(x) = (\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y_i \partial y_j})_x (\frac{\partial y^k}{\partial x_\alpha})_x + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(x) (\frac{\partial x^\alpha}{\partial y_i})_x (\frac{\partial x^\beta}{\partial y_j})_x (\frac{\partial y^k}{\partial x_\gamma})_x \ ,$$

où

$$(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y_i \partial y_j})_x = D_{ij}^2 (\varphi^\alpha \circ \psi^{-1})_{\psi(x)} \ .$$

En particulier, les symboles de Christoffel ne sont pas les composantes d'un champ de tenseurs sur M.

Preuve : La preuve s'obtient facilement par calcul dirècte à partir des relations qui expriment les $(\frac{\partial}{\partial x_i})$ en fonction des $(\frac{\partial}{\partial y_i})$ (et réciproquement).

Définition

Soient M une variété, D une connexion sur M, et $C : [0,\eta] \to M$ un chemin de classe C^∞. Etant donné $t_0 \in [0,\eta]$, et (Ω,φ) une carte de M en $C(t_0)$, on note $C^k(t) = \varphi^k\big(C(t)\big)$ les composantes de C dans la carte (elles sont définies au moins pour t proche de t_0). On dit que C est une géodésique sur M si dans toute carte (Ω,φ) de M,

$$\frac{d^2C^k}{dt^2}(t) + \Gamma_{ij}^k\big(C(t)\big)\frac{dC^i}{dt}(t)\frac{dC^j}{dt}(t) = 0$$

pour tout k et en tout point t tel que $C(t) \in \Omega$, où les Γ_{ij}^k désignent les symboles de Christoffel de la connexion dans la carte. La définition est intrinsèque au sens où elle ne dépend pas du choix de la carte.

Etant donnés $x \in M$ et $X \in T_x(M)$, on montre qu'il existe $C : [0, \eta] \to M$ une unique géodésique qui vérifie $C(0) = x$ et $(\frac{dC}{dt})_0 = X$, où $(\frac{dC}{dt})_{t=0}$ est le vecteur de $T_x(M)$ défini par $(\frac{dC}{dt})_0.(f) = (f \circ C)'(0)$.

Définition

Soient M une variété et D une connexion sur M. La torsion T de D est le C^∞-champ de tenseurs 2-fois covariants et 1-fois contravariants dont les composantes dans une carte (Ω, φ) sont les

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k \ ,$$

où les Γ_{ij}^k sont les symbôles de Christoffel de D dans (Ω, φ).

On vérifie facilement que les T_{ij}^k sont bien les composantes du champ de tenseurs à partir de la relation de changement des symbôles de Christoffel par changement de carte. Une connexion est dite sans torsion, ou à torsion nulle, si $T \equiv 0$. Cela revient à dire que dans toute carte (Ω, φ) de M, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ pour tous i, j, k.

Définition

Soient M une variété et D une connexion sur M. La courbure R de D est le C^∞-champ de tenseurs 3-fois covariants et 1-fois contravariants dont les composantes dans une carte (Ω, φ) sont les

$$R^l_{ijk}(x) = (\frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial x_j})_x - (\frac{\partial \Gamma^l_{ji}}{\partial x_k})_x + \Gamma^l_{j\alpha}(x)\Gamma^\alpha_{ki}(x) - \Gamma^l_{k\alpha}(x)\Gamma^\alpha_{ji}(x) \ ,$$

où les Γ^k_{ij} sont les symbôles de Christoffel de D dans (Ω, φ).

Le calcul pour démontrer que les R^l_{ijk} sont bien les composants d'un champ de tenseurs est plus compliqué que pour la torsion. Il reste néanmoins faisable. On pourra aussi intérpreter torsion et courbure de façon intrinsèque pour quotienter ces calculs.

6. Extension de la dérivation covariante aux champs de tenseurs

Théorème

La dérivation covariante par rapport à un vecteur X de $T_x(M)$ s'étend de façon unique des champs différentiables de vecteurs aux champs différentiables de tenseurs. L'opérateur D_X est alors entiérement caractérisé par les quatre propriétés suivantes :

- **(1)** *Si $f : M \to \mathbf{R}$ est différentiable, $D_X(f) = X(f)$,*
- **(2)** *D_X conserve la variance,*
- **(3)** *D_X est un opérateur de dérivation pour le produit tensoriel,*
- **(4)** *D_X commute avec la contraction.*

Le point **(2)** signifie que si T est un champ différentiable de tenseurs de variance v, alors $D_X T$ est un tenseur de variance v sur $T_x(M)$. Le point **(3)** signifie que si T et $\tilde{T}$ sont deux champs différentiables de tenseurs, alors

$$D_X(T \otimes \tilde{T}) = (D_X T) \otimes \tilde{T}(x) + T(x) \otimes (D_X \tilde{T}) \ .$$

Le point **(4)** signifie que si T est un champ différentiable de tenseurs p-fois covariants et q-fois contravariants de variance v, alors pour tout $1 \leq k_1 \leq p$ et tout $1 \leq k_2 \leq q$,

$$D_X\big(C_{k_1}^{k_2} T\big) = C_{k_1}^{k_2} D_X T \ .$$

Pour simplifier l'écriture de ce qui va suivre, on suppose que les variances sont ordonnées. Soit (Ω, φ) une carte de M de coordonnées associées $(x_1, \ldots, x_n)$, et soient Γ_{ij}^k les symboles de Christoffel de la connexion D dans (Ω, φ). Si $X = X^i(\frac{\partial}{\partial x_i})_x$, $x \in \Omega$, et si T est un champ différentiable de tenseurs p-fois covariantes et q-fois contravariants de composantes $T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$ dans (Ω, φ), alors

$$D_X T = X^i\big(\nabla_i T\big)(x) \ ,$$

où $\big(\nabla_i T\big)(x)$ est le tenseur p-fois covariant et q-fois contravariant de $T_x(M)$ dont les composantes dans (Ω, φ) sont données par la relation

$$
\begin{aligned}
\big(\nabla_i T\big)(x)^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p} = (\frac{\partial T^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}}{\partial x_i})_x \\
&- \sum_{k=1}^{p} \Gamma^{\alpha}_{i i_k}(x)\, T^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_{k-1}\alpha i_{k+1}\dots i_p}(x) \\
&+ \sum_{k=1}^{q} \Gamma^{j_k}_{i\alpha}(x)\, T^{j_1\dots j_{k-1}\alpha j_{k+1}\dots j_q}_{i_1\dots i_p}(x) \ .
\end{aligned}
$$

Pour les champs de vecteurs X et les champs de 1-formes η on retrouve bien évidemment les formules

$$
\big(\nabla_i X\big)(x)^j = (\frac{\partial X^j}{\partial x_i})_x + \Gamma^j_{i\alpha}(x) X^\alpha(x) \ ,
$$

$$
\big(\nabla_i \eta\big)(x)_j = (\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i})_x - \Gamma^\alpha_{ij}(x) \eta_\alpha(x) \ .
$$

Les symboles de Christoffel apparaissent avec le signe $+$ pour les indices contravariants, et avec le signe $-$ pour les indices covariants.

Définition

Soient M une variété, et D une connexion sur M. Si T est un C^k-champ de tenseurs p-fois covariants et q-fois contravariants sur M, on note ∇T le C^{k-1}-champ de tenseurs $(p+1)$-fois covariants et q-fois contravariants sur M défini par : pour tout $x \in M$, tous $X_1, \dots, X_{p+1} \in T_x(M)$, et tous $\eta_1, \dots, \eta_q \in T_x(M)^\star$,

$$\begin{aligned}(\nabla T)(x).(X_1, \dots, X_{p+1}, \eta_1, \dots, \eta_q) \\ = (D_{X_1} T).(X_2, \dots, X_{p+1}, \eta_1, \dots, \eta_q) \ .\end{aligned}$$

Ses composantes dans une carte sont données par la formule

$$(\nabla T)^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_{p+1}} = (\nabla_{i_1} T)^{j_1 \dots j_q}_{i_2 \dots i_{p+1}} \ ,$$

où $(\nabla_{i_1} T)^{j_1 \dots j_q}_{i_2 \dots i_{p+1}}$ est comme dans la formule du transparant précédent.

Par extension, et par récurrence, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose $\nabla^m T = \nabla\big(\nabla^{m-1} T\big)$, avec la convention que $\nabla^0 T = T$. Etant données (Ω, φ) une carte de M de coordonnées associées $(x_1, \ldots, x_n)$, et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, alors pour tout $x \in \Omega$, et tout i,

$$\big(\nabla f\big)(x)_i = \big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big)_x \ ,$$

tandis que pour tout $x \in \Omega$, et tous i, j,

$$\big(\nabla^2 f\big)(x)_{ij} = \big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\big)_x - \Gamma_{ij}^k(x)\big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\big)_x \ ,$$

où les Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel de la connexion dans (Ω, φ), et

$$\big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\big)_x = D_{ij}^2\big(f \circ \varphi^{-1}\big)_{\varphi(x)}$$

pour tous i et j. Lorsque D est sans torsion, $\nabla^2 f$ joue le rôle du Hessien de la théorie euclidienne.

Théorème

Soient M une variété, D une connexion sur M, et (Ω, φ) une carte de M. On suppose (pour simplifier) que D est sans torsion. Alors :

(1) *Première identité de Bianchi : pour tout $x \in \Omega$, et tous i, j, k, l,*

$$\sum_{cycle\ \{i,j,k\}} R^l_{ijk}(x) = 0\ ,$$

(2) *Seconde identité de Bianchi : pour tout $x \in \Omega$, et tous i, j, k, l, m,*

$$\sum_{cycle\ \{i,j,k\}} (\nabla_i R)(x)^l_{mjk} = 0\ ,$$

où $\displaystyle\sum_{cycle\ \{i,j,k\}} a_{ijk} = a_{ijk} + a_{kij} + a_{jki}.$

Définition

Une métrique riemannienne sur une variété M est un C^∞-champ de tenseurs deux fois covariants sur M qui définit en tout point x de M un produit scalaire sur $T_x(M)$. Une variété riemannienne est un couple (M, g) constitué d'une variété M et d'une métrique riemannienne g sur M.

Puisque tout produit scalaire est symétrique, si les g_{ij} sont les composantes de g dans une carte de M, alors $g_{ij} = g_{ji}$. On montre "assez facilement" que toute variété paracompacte possède une métrique riemannienne. On peut procéder par recollements de métriques "euclidiennes" à partir de l'existence de partitions de l'unité.

On sait mesurer la longeur des courbes C^1 (par suite aussi des courbes C^1 par morceaux) sur une variété riemannienne. Si $\gamma : [a, b] \to M$ un chemin de classe C^1, on note $\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_t$ le vecteur tangent de $T_{\gamma(t)}(M)$ défini par : $\forall f : M \to \mathbb{R}$ différentiable au point $\gamma(t)$,

$$(\frac{d\gamma}{dt})_t.(f) = (f \circ \gamma)'(t) \ .$$

Définition

Soient (M, g) une variété riemannienne et $\gamma : [a, b] \to M$ un chemin de classe C^1. La longueur de γ, notée $L(\gamma)$, est définie par

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g(\gamma(t)).((\frac{d\gamma}{dt})_t, (\frac{d\gamma}{dt})_t)} \ dt \ .$$

Lorsque γ est seulement supposé de classe C^1 par morceaux, sa longueur est la somme des longueurs des chemins de classe C^1 dont il est composé.

Les géodésiques sont (en un sens à préciser) les chemins qui réalisent la longueur entre deux points d'une variété (les chemins de longueurs minimales).

Théorème

Soient (M, g) *une variété riemannienne, et* x, y *deux points de* M. *Si* $\mathcal{C}_{xy}$ *désigne l'ensemble des chemins* C^1 *par morceaux d'extrémités* x *et* y, *on pose*

$$d(x, y) = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_{xy}} L(\gamma) \ .$$

Alors $d : M \times M \to \mathbf{R}$ *définit une distance sur* M *dont la topologie associée coïncide avec la topologie initiale de* M.

Par suite, et puisque tout espace métrique est paracompact (théorème de Stone), on obtient qu'une variété possède une métrique riemannienne si et seulement si elle est paracompacte.

On montre maintenant que toute variété riemannienne possède une connexion naturelle privilégiée. Cette connexion est appelée la connexion de Levi-Civita de g.

Théorème

Soit (M, g) une variété riemannienne. Il existe une unique connexion sur M qui est sans torsion et pour laquelle la métrique g est à dérivée covariante nulle. C'est par définition la connexion de Levi-Civita de g. Etant donnés (Ω, φ) une carte de M de coordonnées associées $(x_1, \ldots, x_n)$, les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita dans cette carte sont donnés par la relation

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m}\Big) g^{mk} \ ,$$

où les g_{ij} et g^{ij} désignent respectivement les composantes de g dans (Ω, φ), et les composantes de la matrice inverse des g_{ij} (i.e $g^{im} g_{mj} = \delta_j^i$ pour tous i et j).

Preuve : On montre tout d'abord l'unicité de la connexion, puis ensuite son existence.

Preuve suite : Unicité. Par définition,

$$\left(\nabla_k g\right)_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \Gamma^m_{ki} g_{mj} - \Gamma^m_{kj} g_{im} \ .$$

On écrit que pour tous i, j, et k,

$$\left(\nabla_i g\right)_{jk} + \left(\nabla_j g\right)_{ik} - \left(\nabla_k g\right)_{ij} = 0 \qquad (\star)$$

Sachant que

$$\left(\nabla_i g\right)_{jk} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \Gamma^m_{ij} g_{mk} - \Gamma^m_{ik} g_{jm}$$

$$\left(\nabla_j g\right)_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \Gamma^m_{jk} g_{im} - \Gamma^m_{ji} g_{mk}$$

$$\left(\nabla_k g\right)_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \Gamma^m_{ki} g_{mj} - \Gamma^m_{kj} g_{im} \ ,$$

et sachant que la connexion est sans torsion, et donc que $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ pour tous i, j, et k, on obtient à partir de $(\star)$ que

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = 2\Gamma^m_{ij} g_{mk} \ .$$

Preuve suite et fin : En contractant par g^{kl}, il suit que

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m}\Big) g^{ml} \ ,$$

ce qui est l'expression des Γ^k_{ij} du théorème. D'où l'unicité de la connexion de Levi-Civita.

(2) Existence. L'existence se prouve en partant de l'expression des Γ^k_{ij}, et en montrant qu'ils se transforment bien par changement de cartes selon la relation de changement des symbôles de Christoffel. A savoir

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \frac{\partial y^k}{\partial x_\alpha}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y_i \partial y_j} + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y_i}\frac{\partial x^\beta}{\partial y_j}\frac{\partial y^k}{\partial x_\gamma} \ .$$

A partir de là, on voit que les Γ^k_{ij} définissent bien une connexion. Reste à vérifier que cette connexion est bien sans torsion, et telle que $\nabla g = 0$, ce qui ne pose aucun problème. CQFD.

Au passage, dans la partie 2 de la preuve, on aura utilisé le résultat suivant.

Lemme

Les g^{ij} sont les composantes d'un C^∞-champ de tenseurs deux fois contravariants sur M. On note g^{-1} ce champ de tenseurs, désigné sous les termes d'inverse du tenseur métrique. Il est lui aussi à dérivée covariante nulle, au sens où tout comme pour g, $\nabla g^{-1} = 0$.

Preuve : On commence par montrer que les g^{ij} sont les composantes d'un C^∞-champ de tenseurs deux fois contravariants sur M. Pour cela on montre que les g^{ij} changent comme le font les tenseurs deux fois contravariants par changement de carte. Si (Ω, φ) et $(\tilde{\Omega}, \psi)$ sont deux cartes de M de coordonnées associées $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$, et si x est dans $\Omega \cap \tilde{\Omega}$, alors, avec les notations usuelles,

$$\tilde{g}_{ij}(x) = g_{\alpha\beta}(x)\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y_i}\right)_x\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial y_j}\right)_x$$

Preuve suite : Notons

$$T^{ij}(x) = g^{\gamma\delta}(x)(\frac{\partial y^i}{\partial x_\gamma})_x(\frac{\partial y^j}{\partial x_\delta})_x \ .$$

Par unicité de la matrice inverse, il nous suffit de montrer que pour tous i, j,

$$\tilde{g}_{im}(x)T^{mj}(x) = \delta_i^j \ ,$$

et on obtiendra que $\tilde{g}^{ij}(x) = T^{ij}(x)$, et donc la relation voulue. Or,

$$\tilde{g}_{im}(x)T^{mj}(x) = g_{\alpha\beta}(x)(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y_i})_x(\frac{\partial x^\beta}{\partial y_m})_x g^{\gamma\delta}(x)(\frac{\partial y^m}{\partial x_\gamma})_x(\frac{\partial y^j}{\partial x_\delta})_x \ ,$$

et on remarque que

$$(\frac{\partial x^\beta}{\partial y_m})_x(\frac{\partial y^m}{\partial x_\gamma})_x = \delta_\gamma^\beta \ ,$$

puis que $g_{\alpha\beta}(x)g^{\beta\delta}(x) = \delta_\alpha^\delta$, et enfin, pour finir, que

$$(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y_i})_x(\frac{\partial y^j}{\partial x_\alpha})_x = \delta_i^j \ .$$

Preuve suite : On a donc bien que

$$\tilde{g}^{ij}(x) = g^{\gamma\delta}(x)(\frac{\partial y^i}{\partial x_\gamma})_x(\frac{\partial y^j}{\partial x_\delta})_x$$

et les g^{ij} sont bien les composantes d'un C^∞-champ de tenseurs g^{-1} deux fois contravariants sur M.

Reste maintenant à montrer que $\nabla g^{-1} = 0$. Pour cela on fixe (Ω, φ) une carte (quelconque) de M de coordonnées associées $(x_1, \ldots, x_n)$, et on note δ le champ de tenseur 1-fois covariants et 1-fois contravariants sur Ω de composantes les symbôles de Christoffel δ_i^j. Alors

$$\delta = C_2^1 g \otimes g^{-1} .$$

Une première remarque simple est que $\nabla\delta = 0$. En effet,

$$(\nabla_k\delta)_i^j(x) = (\frac{\partial \delta_i^j}{\partial x_k})_x - \Gamma_{ki}^m(x)\delta_m^j + \Gamma_{km}^j(x)\delta_i^m ,$$

ce qui donne $(\nabla_k\delta)_i^j(x) = 0$. Une seconde remarque est que, Preuve suite et fin : puisque la dérivation covariante commute avec la contraction et dérive par rapport au produit tensoriel, et puisque $\nabla g = 0$,

$$(\nabla_k C_2^1 g \otimes g^{-1})_i^j(x) = \left(C_2^1(g \otimes \nabla_k g^{-1})\right)_i^j(x)$$

de sorte que $g_{i\alpha}(x)\left(\nabla_k g^{-1}\right)^{\alpha j}(x) = 0$. En contractant par $g^{im}(x)$, on obtient que

$$\left(\nabla_k g^{-1}\right)^{mj}(x) = 0$$

et donc que $\nabla g^{-1} = 0$. D'où le lemme. CQFD.

Le laplacien (ou opérateur de Laplace-Beltrami) $\Delta_g f$ d'une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur une variété riemannienne est définie par $\Delta_g = -C_1^1 C_2^2 \nabla^2 f \otimes g^{-1}$. Dans une carte

$$\begin{aligned}\Delta_g f &= -g^{ij}(\nabla^2 f)_{ij} \\ &= -g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right) ,\end{aligned}$$

où les Γ_{ij}^k sont les symbôles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita de g dans la carte.