Calcul Différentiel Avancé

par

Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise

Année 2017-2018

Chapitre 7
L'espace tangent
1. Premières définitions

Soient M une variété, et x un point de M. On note $\mathcal{F}_x$ l'espace vectoriel des fonctions $f : M \to \mathbb{R}$ qui sont différentiables au point x. Si $f \in \mathcal{F}_x$, on dit que f est plate au point x si pour toute carte (Ω, φ) de M au point x, $D\big(f \circ \varphi^{-1}\big)_{\varphi(x)} \equiv 0$. On montre facilement que la nullité de $D\big(f \circ \varphi^{-1}\big)_{\varphi(x)}$ pour une carte (Ω, φ) au point x, entraîne la nullité de $D\big(f \circ \psi^{-1}\big)_{\psi(x)}$ pour toute autre carte (Ω', ψ) au point x. Pour le voir, il suffit d'écrire que

$$f \circ \psi^{-1} = \big(f \circ \varphi^{-1}\big) \circ \big(\varphi \circ \psi^{-1}\big)$$

de sorte que

$$D\big(f \circ \psi^{-1}\big)_{\psi(x)} = D\big(f \circ \varphi^{-1}\big)_{\varphi(x)} \circ D\big(\varphi \circ \psi^{-1}\big)_{\psi(x)} .$$

On note $\mathcal{N}_x$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{F}_x$ constitué des fonctions qui sont plates au point x.

Définition

Soient M une variété et x un point de M. On appelle vecteur tangent à M au point x toute forme linéaire $X : \mathcal{F}_x \to \mathbb{R}$ qui s'annule sur $\mathcal{N}_x$, i.e qui est telle que $\mathcal{N}_x \subset KerX$. L'espace tangent à M au point x, noté $T_x(M)$, est l'ensemble des vecteurs tangents à M au point x.

Soit X un vecteur tangent à M au point x, et soit f une fonction réelle définie au voisinage de x et différentiable au point x. On peut encore définir $X(f)$, même si f n'est pas définie sur tout M. Pour cela on pose $X(f) = X(\tilde{f})$, où $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ est un prolongement quelconque de f, à savoir une fonction réelle définie sur tout M qui vérifie $\tilde{f} \equiv f$ au voisinage de x. L'existence de tels prolongements ne pose aucun problème.

Par ailleurs, on vérifie facilement que cette définition ne dépend pas du prolongement choisi en remarquant que si $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ sont deux prolongements de f, alors $\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1 \in \mathcal{N}_x$ de sorte que $X(\tilde{f}_1) = X(\tilde{f}_2)$.

Soient M une variété de dimension n, et x un point de M. Alors $T_x(M)$ possède une structure naturelle d'espace vectoriel réel de dimension n donnée par : $\forall X, Y \in T_x(M)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall f \in \mathcal{F}_x$,

$$\begin{aligned}(X+Y)(f) &= X(f) + Y(f) \ ,\\ (\lambda X)(f) &= \lambda X(f) \ .\end{aligned}$$

Par convention d'Einstein on entend la convention suivante : "lorsque dans un produit un même indice est répété en haut et en bas, alors il est sommé".

Par exemple, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel, au lieu d'écrire $x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$ on pourra écrire $x = x^i e_i$.

Ou encore, si B est une forme biinéaire sur l'espace, alors au lieu d'écrire que $B(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x^i y^j$ on écrira que $B(x,y) = b_{ij} x^i y^j$.

Théorème et Définition

Soient M une variété de dimension n, et x un point de M. Soit (Ω, φ) est une carte de M au point x de coordonnées associées $(x_1, \ldots, x_n)$, et soit pour tout $i = 1, \ldots, n$, $(\frac{\partial}{\partial x_i})_x$ le vecteur de $T_x(M)$ défini par : $\forall f \in \mathcal{F}_x$,

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})_x.(f) = D_i\big(f \circ \varphi^{-1}\big)_{\varphi(x)} \ .$$

Alors

$$\left((\frac{\partial}{\partial x_1})_x, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_x\right)$$

est une base de $T_x(M)$. Ainsi, $T_x(M)$ est de dimension n et

$$\forall X \in T_x(M),\ \exists! X^1, \ldots, X^n \in \mathbb{R} \ / \ X = X^i (\frac{\partial}{\partial x_i})_x$$

(avec la convention d'Einstein). Les X^i sont appelés composantes de X dans la carte (Ω, φ). Pour tout $i = 1, \ldots, n$, $X^i = X(\varphi^i)$.

Pour qu'il n'y ait aucune confusion possible,

$$X^i(\frac{\partial}{\partial x_i})_x = \sum_{i=1}^{n} X^i(\frac{\partial}{\partial x_i})_x$$

lorsque la convention d'Einstein est appliquée.

Remarque importante : On a $(\frac{\partial}{\partial x_i})_x.(\varphi^j) = \delta_i^j$ pour tous i, j, où les δ_i^j sont les symbôles de Kroenecker.

Preuve de la partie théorème : La seule chose que l'on ait à montrer est que la famille

$$\left((\frac{\partial}{\partial x_1})_x, \dots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_x\right)$$

est tout à la fois une famille libre et génératrice pour $T_x(M)$.

(1) On commence par montrer qu'elle est libre. Supposons que pour des $\lambda^1, \dots, \lambda^n \in \mathbb{R}$,

$$\lambda^1(\frac{\partial}{\partial x_1})_x + \cdots + \lambda^n(\frac{\partial}{\partial x_n})_x = 0 \ .$$

Preuve suite : Alors pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$\left(\lambda^1 (\frac{\partial}{\partial x_1})_x + \cdots + \lambda^n (\frac{\partial}{\partial x_n})_x\right) .(\varphi^i) = 0 \ ,$$

et comme

$$(\frac{\partial}{\partial x_j})_x.(\varphi^i) = \delta^i_j \ ,$$

on obtient que $\lambda^1 = \cdots = \lambda^n = 0$. D'où le caractère libre de la famille.

(2) Montrons maintenant que la famille est génératrice. Pour cela on remarque que si $f \in \mathcal{F}_x$, alors

$$f - (\frac{\partial}{\partial x_i})_x(f)\varphi^i \in \mathcal{N}_x \ .$$

Par suite, pour tout $X \in T_x(M)$, et toute fonction $f \in \mathcal{F}_x$,

$$X(f) = (\frac{\partial}{\partial x_i})_x(f) X(\varphi^i) \ ,$$

Preuve suite et fin : de sorte que pour tout $X \in T_x(M)$,

$$X = X(\varphi^i)(\frac{\partial}{\partial x_i})_x \; .$$

D'où le résultat. CQFD.

Théorème (Changement de carte)

Soient M une variété, x un point de M, et (Ω, φ), (Ω', ψ) deux cartes de M en x de coordonnées associées $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$. Alors pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$(\frac{\partial}{\partial y_i})_x = (\frac{\partial x^j}{\partial y_i})_x(\frac{\partial}{\partial x_j})_x \; ,$$

où $(\frac{\partial x^j}{\partial y_i})_x = (\frac{\partial}{\partial y_i})_x(\varphi^j) = D_i\big(\varphi^j \circ \psi^{-1}\big)_{\psi(x)}$ et la convention d'Einstein est appliquée.

En particulier, on déduit de ce théorème, que si $X \in T_x(M)$ a pour composantes $(X^1, \ldots, X^n)$ dans la carte (Ω, φ), et $(\tilde{X}^1, \ldots, \tilde{X}^n)$ dans la carte (Ω', ψ), alors pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$X^i = (\frac{\partial x^i}{\partial y_j})_x \tilde{X}^j \quad \text{et} \quad \tilde{X}^i = (\frac{\partial y^i}{\partial x_j})_x X^j \ ,$$

où, dans toutes ces relations, la convention d'Einstein est appliquée.

Preuve du théorème : D'après le théorème et définition précédent,

$$(\frac{\partial}{\partial y_i})_x = \lambda^j (\frac{\partial}{\partial x_j})_x$$

avec

$$\lambda^j = (\frac{\partial}{\partial y_i})_x (\varphi^j) \ .$$

D'où le résultat. CQFD.

On déduit les relations suivantes en écrivant que

$$\begin{aligned} X &= \tilde{X}^j (\frac{\partial}{\partial y_j})_x \\ &= \tilde{X}^j (\frac{\partial x^i}{\partial y_j})_x (\frac{\partial}{\partial x_i})_x \\ &= X^i (\frac{\partial}{\partial x_i})_x \end{aligned}$$

de sorte que $X^i = (\frac{\partial x^i}{\partial y_j})_x \tilde{X}^j$. Pour résumer :

$$(\frac{\partial}{\partial y_i})_x = (\frac{\partial x^j}{\partial y_i})_x (\frac{\partial}{\partial x_j})_x \quad , \quad (\frac{\partial}{\partial x_i})_x = (\frac{\partial y^j}{\partial x_i})_x (\frac{\partial}{\partial y_j})_x$$

$$X^i = (\frac{\partial x^i}{\partial y_j})_x \tilde{X}^j \quad , \quad \tilde{X}^i = (\frac{\partial y^i}{\partial x_j})_x X^j \ ,$$

où $(\frac{\partial x^j}{\partial y_i})_x = D_i\big(\varphi^j \circ \psi^{-1}\big)_{\psi(x)}$, $(\frac{\partial y^j}{\partial x_i})_x = D_i\big(\psi^j \circ \varphi^{-1}\big)_{\varphi(x)}$, les X^i sont les composantes de $X \in T_x(M)$ dans (Ω, φ) et les $\tilde{X}^i$ sont les composantes de X dans (Ω', ψ).

Remarque : Etant donné x un point quelconque de $\mathbb{R}^n$, $T_x(\mathbb{R}^n)$ s'assimile naturellement à $\mathbb{R}^n$ par

$$X^i(\frac{\partial}{\partial x_i})_x \longrightarrow (X^1, \dots, X^n) \ ,$$

où $(x_1, \dots, x_n)$ désigne la carte canonique de $\mathbb{R}^n$. C'est la raison pour laquelle on ne voit pas apparaître la notion d'espace tangent dans le calcul différentiel sur $\mathbb{R}^n$.

2. Une autre construction de l'espace tangent (culture)

Il existe une définition plus intuitive de l'espace tangent qui généralise au cas d'une variété abstraite la notion intuitive de vecteur tangent à une surface de $\mathbb{R}^3$. De façon plus précise, étant donnés M une variété et x un point de M, on note $\mathcal{C}_x$ l'ensemble des chemins différentiables passant par x, à savoir

$$\mathcal{C}_x = \{\gamma :]-\epsilon, +\epsilon[\to M \ / \ \gamma \text{ est différentiable et } \gamma(0) = x\} \ .$$

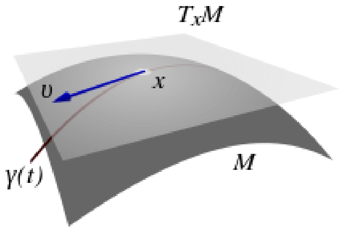
On définit alors la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{C}_x$ par : si (Ω, φ) est une carte de M en x, et si $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}_x$, alors $\gamma_1 \mathcal{R} \gamma_2$ si et seulement si

$$(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0) \ .$$

Là encore, on vérifie facilement que $\mathcal{R}$ ne dépend pas du choix de la carte.

On appelle alors vecteur tangent au point x toute classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$. Notons $\tilde{T}_x(M)$ l'espace tangent que l'on vient de définir.

On se retrouve donc avec deux espaces tangents au point x, à savoir l'espace $T_x(M)$ construit au paragraphe précédent, et l'espace $\tilde{T}_x(M)$ juste construit. En fait, on peut montrer que ces deux définitions de l'espace tangent sont équivalentes au sens où il existe une bijection canonique de $\tilde{T}_x(M)$ sur $T_x(M)$. Il s'agit de l'application $\Phi : \tilde{T}_x(M) \to T_x(M)$ qui à $[\gamma]$ associe $\Phi\big([\gamma]\big)$ défini pour tout $f \in \mathcal{F}_x$ par $\Phi\big([\gamma]\big).(f) = \big(f \circ \gamma\big)'(0)$.



On remarquera que $\big(f \circ \gamma\big)'(0) = D\,(f \circ \varphi{-}1)_{\varphi(x)}\,.(\varphi \circ \gamma)'(0)$, ce qui permet de montrer que la construction de Φ est cohérente et que Φ ne dépend que de $[\gamma]$.

3. Le fibré tangent

Soit M une variété. Par définition, le fibré tangent de M, noté $T(M)$, est la réunion (disjointe) des espaces tangents $T_x(M)$, $x \in M$. On écrit

$$T(M) = \bigcup_{x \in M} T_x(M) .$$

Pour le moment, $T(M)$ n'a aucune topologie, et encore moins une structure de variété. L'objet de ce qui suit est de montrer que $T(M)$ possède une structure naturelle de variété de dimension $2n$, $n = dim M$.

Soit $\mathcal{A}$ le C^∞-atlas saturé de M. A toute carte (Ω, φ) de $\mathcal{A}$ on associe l'application

$$\Phi : \bigcup_{x \in \Omega} T_x(M) \longrightarrow \varphi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$$

qui est définie par : si $x \in \Omega$ a pour coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans (Ω, φ), et si $X \in T_x(M)$ a pour composantes $(X^1, \ldots, X^n)$

dans (Ω, φ), alors

$$\Phi(X) = \left(x_1, \ldots, x_n, X^1, \ldots, X^n\right) \ .$$

On pourra encore écrire que pour tout $X \in T_x(M)$, avec $x \in \Omega$,

$$\Phi(X) = \left(\varphi^1(x), \ldots, \varphi^n(x), X(\varphi^1), \ldots, X(\varphi^n)\right) \ .$$

Il est clair que Φ réalise une bijection de

$$\bigcup_{x \in \Omega} T_x(M) \quad \text{sur} \quad \varphi(\Omega) \times \mathbb{R}^n \ .$$

Par ailleurs, si (Ω, ψ) est une autre carte de M, et si

$$\Psi : \bigcup_{x \in \Omega} T_x(M) \longrightarrow \psi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$$

est l'application qui lui est associée suivant le procédé décrit ci-dessus, alors en raison du théorème de changement de base,

$$\Psi \circ \Phi^{-1}\left(x_1, \ldots, x_n, X^1, \ldots, X^n\right) = \left(A^1, \ldots, A^n, B^1, \ldots, B^n\right) \ ,$$

où pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$A^i = \left(\psi^i \circ \varphi^{-1}\right)(x_1, \dots, x_n) \ ,$$
$$B^i = D_j\left(\psi^i \circ \varphi^{-1}\right)_{(x_1,\dots,x_n)} X^j \ .$$

On pourra encore écrire que

$$\begin{aligned} &\Psi \circ \Phi^{-1}\left(x_1, \dots, x_n, X^1, \dots, X^n\right) \\ &\qquad = \left(\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(x_1, \dots, x_n), D\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)_{(x_1,\dots,x_n)} . (X^1, \dots, X^n)\right) \ . \end{aligned}$$

On remarque alors que $\Psi \circ \Phi^{-1}$ réalise une bijection de $\varphi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$ sur $\psi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$ et que $\Psi \circ \Phi^{-1}$ est de classe C^∞ sur $\varphi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$. Donc $\Psi \circ \Phi^{-1}$ réalise ainsi un C^∞-difféomorphisme de $\varphi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$ sur $\psi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$.

En particulier, il suit de ce qui précède, que $\Psi \circ \Phi^{-1}$ réalise un homéomorphisme de $\varphi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$ sur $\psi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$. Cela nous permet d'affirmer qu'il existe une et une seule topologie sur $T(M)$ qui est telle que :

(1) $\forall \Omega$ ouvert de M, $\displaystyle\bigcup_{x \in \Omega} T_x(M)$ est un ouvert de $T(M)$,

(2) $\forall (\Omega, \varphi)$ carte de M, $\Phi : \displaystyle\bigcup_{x \in \Omega} T_x(M) \to \varphi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme.

Il suffit ici de prendre pour base de topologie l'ensemble des $U \subset T(M)$ qui sont tels que :

(i) $\exists (\Omega, \varphi)$ carte de M avec $U \subset \displaystyle\bigcup_{x \in \Omega} T_x(M)$,

(ii) $\Phi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$.

Le fait que $\Psi \circ \Phi^{-1}$ soit un homéomorphisme pour (Ω, φ) et (Ω, ψ) deux cartes quelconques de M, rend cette construction cohérente.

Si maintenant $T(M)$ est muni de cette topologie, on vérifie sans difficulté que

$$\left(\left(\bigcup_{x \in \Omega} T_x(M), \Phi \right) \right)_{(\Omega,\varphi) \in \mathcal{A}}$$

est un atlas de classe C^∞ sur $T(M)$. Il confère à $T(M)$ la structure rechérchée de variété de dimension $2n$. D'où le résultat suivant.

Théorème

Soit M une variété de dimension n. Son fibré tangent $T(M)$ possède une structure naturelle de variété de dimension $2n$. Cette structure est déterminée par l'atlas formé des cartes

$$\left(\bigcup_{x \in \Omega} T_x(M), \Phi \right)$$

construites ci-dessus.

C'est désormais à cette structure de variété que l'on fera référence. On notera

$$\Pi : T(M) \to M$$

la projection canonique qui à $X \in T_x(M)$ associe $\Pi(X) = x$. On remarque que Π est une submersion, puisque pour toute carte (Ω, φ) de M,

$$\varphi \circ \Pi \circ \Phi^{-1}(x_1, \ldots, x_n, X^1, \ldots, X^n) = (x_1, \ldots, x_n) \ ,$$

où $\left(\bigcup_{x \in \Omega} T_x(M), \Phi\right)$ est la carte de $T(M)$ associée à (Ω, φ).

Remarque : Partant d'une variété M de classe C^k et de dimension n, $T(M)$ récupère une structure naturelle de variété de classe C^{k-1} et de dimension $2n$.

Définition

Soient M et N deux variétés, x un point de M, et $f : M \to N$ une application différentiable au point x. Par définition, l'application linéaire tangente de f au point x, notée $f_\star(x)$, est l'application linéaire

$$f_\star(x) : T_x(M) \longrightarrow T_{f(x)}(N)$$

qui à $X \in T_x(M)$ associe $f_\star(x).X \in T_{f(x)}(N)$ défini par

$$\left(f_\star(x).X\right).(g) = X\left(g \circ f\right)$$

pour toute fonction $g : N \to \mathbb{R}$ qui est différentiable au point $f(x)$. Si maintenant $f : M \to N$ est supposée différentiable sur M, l'application linéaire tangente de f, notée $f_\star$, est l'application

$$f_\star : T(M) \longrightarrow T(N)$$

qui à $X \in T_x(M)$ associe $f_\star(x).X$.

Notons dans ce qui suit m la dimension de M, et n la dimension de N. Soit de plus $f : M \to N$ une application différentiable en un point x de M, et soient (Ω, φ), (Ω', ψ) deux cartes de M et N respectivement en x et $f(x)$, et telles que $f(\Omega) \subset \Omega'$. On note $(x_1, \ldots, x_m)$ les coordonnées associées à (Ω, φ), et $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées associées à (Ω', ψ). La matrice de $f_\star(x)$ dans les bases

$$\left\{(\frac{\partial}{\partial x_i})_x\right\}_{i=1,\ldots,m} \quad \text{et} \quad \left\{(\frac{\partial}{\partial y_i})_{f(x)}\right\}_{i=1,\ldots,n}$$

de $T_x(M)$ et $T_{f(x)}(N)$ s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} (\frac{\partial f^1}{\partial x_1})_x & \ldots & (\frac{\partial f^1}{\partial x_m})_x \\ \vdots & & \vdots \\ (\frac{\partial f^n}{\partial x_1})_x & \ldots & (\frac{\partial f^n}{\partial x_m})_x \end{pmatrix}$$

où

$$(\frac{\partial f^j}{\partial x_i})_x = D_i \left(\psi^j \circ f \circ \varphi^{-1}\right)_{\varphi(x)} \quad .$$

Les colonnes de cette matrice sont en effet constituées des coordonnées des $f_\star(x).(\frac{\partial}{\partial x_i})_x$ dans la base des $\left\{(\frac{\partial}{\partial y_i})_{f(x)}\right\}_{i=1,\dots,n}$, et donc des

$$\left(f_\star(x).(\frac{\partial}{\partial x_i})_x\right).(\psi^j) = (\frac{\partial}{\partial x_i})_x.(\psi^j \circ f)$$
$$= D_i\left(\psi^j \circ f \circ \varphi^{-1}\right)_{\varphi(x)} \ .$$

On retrouve ainsi la matrice jacobienne de la lecture de f dans les cartes (Ω, φ) et (Ω', ψ). En d'autres termes, $f_\star(x)$ tient, dans le contexte des variétés, le role qui était tenu par la différentielle au point x dans le contexte euclidien. Le résultat suivant est une conséquence immédiate de l'égalité des matrices dont on vient de parler.

Proposition

Si $f : M \to N$ est différentiable au point x, $Rg(f)_x = Rg\left(f_\star(x)\right)$.

Théorème

Soient M_1, M_2, M_3 trois variétés, x un point de M_1, $f : M_1 \to M_2$ une application différentiable au point x et $g : M_2 \to M_3$ une application différentiable au point $f(x)$. On a alors que $(g \circ f)_\star(x) = g_\star(f(x)) \circ f_\star(x)$.

Preuve : Pour tout $X \in T_x(M_1)$ et toute fonction $h : M_3 \to \mathbb{R}$ différentiable au point $g(f(x))$,

$$((g \circ f)_\star(x).X).(h) = X(h \circ g \circ f) \ ,$$

tandis que

$$((g_\star(f(x)) \circ f_\star(x)).X).(h) \ = \ (f_\star(x).X).(h \circ g) \ = \ X(h \circ g \circ f) \ .$$

D'où le résultat. CQFD.

Notations : 1) Si M est une variété, et si $f : M \to \mathbb{R}$ est différentiable en un point x de M, on note $df(x)$ la forme linéaire sur $T_x(M)$ qui à $X \in T_x(M)$ associe

$$df(x).X = X(f) \ .$$

C'est tout simplement l'application $f_\star(x)$ après assimilation de $T_{f(x)}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$.

2) Si M est une variété de dimension n, si x est un point de M, si (Ω, φ) est une carte de M en x de coordonnées associées $(x_1, \ldots, x_n)$ et si $f : M \to \mathbb{R}$ est différentiable au point x, on note

$$(\frac{\partial f}{\partial x_i})_x = D_i \left(f \circ \varphi^{-1} \right)_{\varphi(x)}$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$.

5. Champs de vecteurs

Définition

Soit M une variété. On note $\Pi : T(M) \to M$ la projection canonique qui à $X \in T_x(M)$ associe $\Pi(X) = x$. Un champ de vecteurs sur M est alors une application $X : M \to T(M)$ qui vérifie $\Pi \circ X = Id_M$. Le champ est dit de classe C^k si $X : M \to T(M)$ est de classe C^k en tant qu'application de la variété M dans la variété $T(M)$.

Soient $X : M \to T(M)$ un champ de vecteurs sur M, et (Ω, φ) une carte de M. On appelle fonctions composantes (ou tout simplement composantes) de X dans (Ω, φ) les fonctions $X^i : \Omega \to \mathbb{R}$ définies en tout point $x \in \Omega$ par

$$X(x) = X^i(x)(\frac{\partial}{\partial x_i})_x \ ,$$

où les x_i sont les coordonnées associées à (Ω, φ). Donc, pour tout i, $X^i(x) = X(x).(\varphi^i)$.

Proposition

Etant donnée (Ω, φ) une carte de M, X est de classe C^k sur Ω si et seulement si les fonctions composantes de X dans (Ω, φ) sont de classe C^k sur Ω.

Preuve : Il suffit de considérer la carte de $T(M)$ qui est associée à (Ω, φ), et de lire X dans cette carte.

Définition

Soient M une variété de dimension n, et X, Y deux champs de vecteurs sur M de classe C^k. Le crochet des champs X et Y, noté $[X, Y]$, est le champ de vecteurs de clase C^{k-1} sur M dont l'expression dans une carte (Ω, φ) de M est donnée par :

$$[X, Y](x) = \left(X^j(x) (\frac{\partial Y^i}{\partial x_j})_x - Y^j(x) (\frac{\partial X^i}{\partial x_j})_x \right) \; (\frac{\partial}{\partial x_i})_x \; ,$$

où les X^i et Y^i désignent les fonctions comoposantes de X et Y dans (Ω, φ), et où les x_i sont les coordonnées associées à (Ω, φ).

Proposition

La définition du crochet $[X, Y]$ ne dépend pas du choix de la carte.

Preuve : Soient $x \in M$ et $(\Omega, \varphi), (\Omega', \psi)$ deux cartes de M en x. On note x_i les coordonnées associées à (Ω, φ) et y_i les coordonnées associées à (Ω', ψ). Soient aussi X^i, Y^i les composantes de X et Y dans (Ω, φ) et $\tilde{X}^i, \tilde{Y}^i$ les composantes de X et Y dans (Ω', ψ). On écrit que

$$(\frac{\partial \tilde{Y}^i}{\partial y_j})_x = (\frac{\partial x^\alpha}{\partial y_j})_x (\frac{\partial \tilde{Y}^i}{\partial x_\alpha})_x$$

puisque $(\frac{\partial}{\partial y_j})_x = (\frac{\partial x^\alpha}{\partial y_j})_x (\frac{\partial}{\partial x_\alpha})_x$. On écrit ensuite que

$$\tilde{Y}^i = Y^\beta (\frac{\partial y^i}{\partial x_\beta}) \ ,$$

et nous avons là une égalité entre fonctions. Par suite

Preuve suite :

$$(\frac{\partial \tilde{Y}^i}{\partial x_\alpha})_x = (\frac{\partial Y^\beta}{\partial x_\alpha})_x(\frac{\partial y^i}{\partial x_\beta})_x + Y^\beta(x)(\frac{\partial^2 y^i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta})_x \ ,$$

où

$$(\frac{\partial^2 y^i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta})_x = D^2_{\alpha\beta}\left(\psi^i \circ \varphi^{-1}\right)_{\varphi(x)} \ .$$

Ainsi, puisque $\tilde{X}^j(x) = (\frac{\partial y^j}{\partial x_\gamma})_x X^\gamma(x)$,

$$\tilde{X}^j(x)(\frac{\partial \tilde{Y}^i}{\partial y_j})_x$$
$$= (\frac{\partial y^j}{\partial x_\gamma})_x X^\gamma(x)(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y_j})_x \left((\frac{\partial Y^\beta}{\partial x_\alpha})_x(\frac{\partial y^i}{\partial x_\beta})_x + Y^\beta(x)(\frac{\partial^2 y^i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta})_x\right)$$

Or

$$(\frac{\partial y^j}{\partial x_\gamma})_x(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y_j})_x = (\frac{\partial x^\alpha}{\partial x_\gamma})_x = \delta^\alpha_\gamma \ ,$$

et donc

Preuve suite :

$$\tilde{X}^j(x)(\frac{\partial \tilde{Y}^i}{\partial y_j})_x$$

$$= X^\alpha(x)(\frac{\partial Y^\beta}{\partial x_\alpha})_x(\frac{\partial y^i}{\partial x_\beta})_x + (\frac{\partial^2 y^i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta})_x X^\alpha(x) Y^\beta(x)$$

Par symétrie en X et Y, et puisque les $(\frac{\partial^2 y^i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta})_x$ sont symétriques en α et β, on en déduit que

$$\tilde{X}^j(x)(\frac{\partial \tilde{Y}^i}{\partial y_j})_x - \tilde{Y}^j(x)(\frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial y_j})_x$$

$$= X^\alpha(x)(\frac{\partial Y^\beta}{\partial x_\alpha})_x(\frac{\partial y^i}{\partial x_\beta})_x + \cancel{(\frac{\partial^2 y^i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta})_x X^\alpha(x) Y^\beta(x)}$$

$$- Y^\alpha(x)(\frac{\partial X^\beta}{\partial x_\alpha})_x(\frac{\partial y^i}{\partial x_\beta})_x - \cancel{(\frac{\partial^2 y^i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta})_x Y^\alpha(x) X^\beta(x)}$$

$$= \left(X^\alpha(x)(\frac{\partial Y^\beta}{\partial x_\alpha})_x - Y^\alpha(x)(\frac{\partial X^\beta}{\partial x_\alpha})_x \right) (\frac{\partial y^i}{\partial x_\beta})_x$$

Preuve suite et fin : On en déduit que

$$\left(\tilde{X}^j(x)(\frac{\partial \tilde{Y}^i}{\partial y_j})_x - \tilde{Y}^j(x)(\frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial y_j})_x\right)(\frac{\partial}{\partial y_i})_x$$

$$= \left(\left(X^\alpha(x)(\frac{\partial Y^\beta}{\partial x_\alpha})_x - Y^\alpha(x)(\frac{\partial X^\beta}{\partial x_\alpha})_x\right)(\frac{\partial y^i}{\partial x_\beta})_x\right)(\frac{\partial x^\gamma}{\partial y_i})_x(\frac{\partial}{\partial x_\gamma})_x$$

$$= \left(X^\alpha(x)(\frac{\partial Y^\beta}{\partial x_\alpha})_x - Y^\alpha(x)(\frac{\partial X^\beta}{\partial x_\alpha})_x\right)(\frac{\partial}{\partial x_\beta})_x$$

puisque

$$(\frac{\partial y^i}{\partial x_\beta})_x(\frac{\partial x^\gamma}{\partial y_i})_x = (\frac{\partial x^\gamma}{\partial x_\beta})_x = \delta_\beta^\gamma \ .$$

D'où la proposition. CQFD.

Remarque : Ce calcul s'évite en remarquant que pour toute fonction $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^2, et tout $x \in M$,

$$[X, Y](x).(f) = X(x).\big(Y(f)\big) - Y(x).\big(X(f)\big) \ ,$$

où $X(f)$ et $Y(f)$ désignent les fonctions de M dans $\mathbb{R}$ définies par $\big(X(f)\big)(x) = X(x).(f)$ et $\big(Y(f)\big)(x) = Y(x).(f)$.

Soient M une variété de dimension n, N une sous variété de M de dimension q, et $i : N \to M$ l'injection canonique définie par $i(x) = x$. On vérifie facilement que pour tout x de N, $i_\star(x)$ réalise un isomorphisme de $T_x(N)$ sur un sous espace vectoriel de dimension q de $T_x(M)$. Pour le voir, on sait que i est un plongement, et on utilise le fait que

$$\mathrm{Rg}\big(i\big)_x = \mathrm{Rg}\big(i_\star(x)\big) \ .$$

Donc $i_\star(x)$ est une application linéaire injective. Elle devient un isomorphisme de $T_x(N)$ sur son image $i_\star(x).\big(T_x(N)\big)$. Par suite, $T_x(N)$ s'assimile canoniquement à un sous espace vectoriel de $T_x(M)$, à savoir $i_\star(x).\big(T_x(N)\big)$.

On vérifie facilement que si (Ω, φ) est une carte de M en x adaptée à N, de coordonnées associées $(x_1, \dots, x_n)$, alors $T_x(N)$, après assimilation à un sous espace de $T_x(M)$, est le sous espace de $T_x(M)$ de base les $\{(\frac{\partial}{\partial x_i})_x\}_{i=1,\dots,q}$. On démontre ici le résultat suivant.

Théorème

Soient M, M' deux variétés, $f : M \to M'$ une application de classe C^∞, et y_0 un point de $f(M)$. On suppose que $\forall x \in f^{-1}(y_0)$, $Rg(f)_x = dim M'$. Alors $N = f^{-1}(y_0)$ est une sous variété de M, et pour tout x de N,

$$T_x(N) = Kerf_\star(x)$$

après assimilation de $T_x(N)$ à un sous espace de $T_x(M)$.

Preuve : Soit $i : N \to M$ l'injection canonique. On veut montrer que pour tout x de N,

$$i_\star(x).\big(T_x(N)\big) = Kerf_\star(x) \ .$$

Sachant que pour tout x de N, $\mathrm{Rg}\big(f\big)_x = \mathrm{Rg}\big(f_\star(x)\big) = \dim M'$, on tire du théorème du rang que

$$dim Kerf_\star(x) = \dim M - \dim M' \ .$$

Par ailleurs, on sait que $\dim N = \dim M - \dim M'$, et donc

Preuve suite et fin :

$$\dim\Big(i_\star(x).\big(T_x(N)\big)\Big) = \dim Kerf_\star(x)$$

pour tout x de N. Reste donc à montrer que pour tout $x \in N$,

$$i_\star(x).\big(T_x(N)\big) \subset Kerf_\star(x)\ .$$

Soit x un point de N. Pour tout $X \in T_x(N)$, et toute fonction $h : M' \to \mathbb{R}$ différentiable au point $y_0 = f(x)$, on a

$$\Big(f_\star(x).\big(i_\star(x).X\big)\Big).(h) = X\big(h \circ f \circ i\big)\ .$$

Or, pour tout $\tilde{x} \in N$, $h \circ f \circ i(\tilde{x}) \ = \ h(y_0) \ = \ \text{Cte}$, et donc

$$\Big(f_\star(x).\big(i_\star(x).X\big)\Big).(h) = 0$$

pour tout $X \in T_x(N)$ et toute fonction $h : M' \to \mathbb{R}$ différentiable au point y_0. Il s'ensuit que

$$i_\star(x).\big(T_x(N)\big) \subset Kerf_\star(x)\ .$$

D'où le résultat. CQFD.