Calcul Différentiel Avancé

par

Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise

Année 2017-2018

1. Premières définitions

Définition

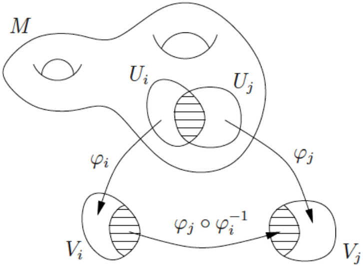
Soit $(M, \mathcal{O})$ un espace topologique connexe séparé. On dit que $(M, \mathcal{O})$ est une variété topologique de dimension n si tout point de M possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

En d'autres termes, $(M, \mathcal{O})$ est une variété topologique de dimension n si pour tout point x de M, il existe Ω un voisinage ouvert de x dans M, il existe V un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et il existe $\varphi : \Omega \to V$ un homéomorphisme de Ω sur V.

En reprenant à peu de choses près ce qui fut dit par Elie Cartan dans sa "leçon sur la géométrie des espaces de Riemann" de 1925, "*une variété est au fond formée d'une infinité de petits morceaux d'espaces euclidiens.*"

Définition

Soit $(M, \mathcal{O})$ une variété topologique de dimension n. Soient $x \in M$ un point de M, Ω un ouvert de M qui contient x et $\varphi : \Omega \to V$ un homéomorphisme de Ω sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$. Le couple (Ω, φ) est appelé une carte locale de M au point x. Pour tout y dans Ω, les coordonnées de $\varphi(y)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont dites coordonnées de y dans la carte (Ω, φ). Une carte locale est encore appelée un système (local) de coordonnées.



Proposition

Etant donnée $(M, \mathcal{O})$ une variété topologique de dimension n :

(1) tout point de M possède un système fondamental dénombrable de voisinages compactes et connexes,

(2) M est connexe par arcs,

(3) si M est paracompacte, elle est dénombrable à l'infini,

(4) M est métrisable si et seulement si elle est paracompacte.

Preuve : Le point (1) est immédiat. Pour ce qui est du point (2), on considère x un point de M, et on note $\mathcal{C}_x$ l'ensemble des points de M qui peuvent être joints à x par un chemin continu. A savoir

$$\mathcal{C}_x = \{y \in M \ / \ \exists \gamma \in C^0([0,1], M), \ \gamma(0) = x, \ \gamma(1) = y\} \ .$$

Il nous faut montrer que $\mathcal{C}_x = M$. Pour commencer, on remarque que $\mathcal{C}_x \neq \emptyset$, puisque par définition même d'une variété topologique, Preuve suite : il existe Ω un voisinage ouvert de x tel que $\Omega \subset \mathcal{C}_x$. Il suffit de prendre $(\tilde{\Omega}, \tilde{\varphi})$ une carte de M en x, de prendre $\varepsilon > 0$ tel que $B_{\tilde{\varphi}(x)}(\varepsilon) \subset \tilde{\varphi}(\tilde{\Omega})$, puis de poser $\Omega = \tilde{\varphi}^{-1}\left(B_{\tilde{\varphi}(x)}(\varepsilon)\right)$. Montrons maintenant que $\mathcal{C}_x$ est un ouvert de M. Soit $y \in \mathcal{C}_x$. Là encore, il existe Ω un voisinage ouvert de y ayant la propriété que tout point de Ω peut être joint à y par un chemin continu. Par suite :

$$\begin{aligned}
&\exists \gamma_1 \in C^0([0,1], M) \ / \ \gamma_1(0) = x,\ \gamma_1(1) = y \text{ et} \\
&\forall z \in \Omega,\ \exists \gamma_2 \in C^0([0,1], M) \ / \ \gamma_2(0) = y,\ \gamma_2(1) = z \ .
\end{aligned}$$

On définit le chemin $\gamma \in C^0([0,1], M)$ par :

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= \gamma_1(2t) \ \text{ si } \ t \in [0, \frac{1}{2}] \\
\gamma(t) &= \gamma_2(2t-1) \ \text{ si } \ t \in [\frac{1}{2}, 1] \ .
\end{aligned}$$

Alors $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = z$. Il s'ensuit que $z \in \mathcal{C}_x$, et donc que $\Omega \subset \mathcal{C}_x$. Par conséquent, $\mathcal{C}_x$ est un ouvert de M. Pour finir de démontrer le point (2), on montre que $\mathcal{C}_x$ est un fermé de M.

Preuve suite : Soit $z \in \overline{\mathcal{C}_x}$, et soit Ω un voisinage ouvert de z ayant la propriété que tout point de Ω peut être joint à z par un chemin continu. Puisque $z \in \overline{\mathcal{C}_x}$, il existe $y \in \Omega \cap \mathcal{C}_x$. Par suite, il existe un chemin continu joignant x à y, et il existe un chemin continu joignant y à z. En raisonnant comme précédemment, on en déduit l'existence d'un chemin continu joignant x à z. Il s'ensuit que $z \in \mathcal{C}_x$, et donc que $\mathcal{C}_x$ est un fermé de M. En conclusion, $\mathcal{C}_x$ est non vide, et tout à la fois un ouvert et un fermé de M. Par connexité de M, on en déduit que $\mathcal{C}_x = M$, à savoir le point (2) de la proposition.

On montre maintenant le point (3) de la proposition. Etant donné x un point de M, on note Ω_x un voisinage ouvert relativement compact de x. Alors

$$M = \bigcup_{x \in M} \Omega_x \ ,$$

et puisque M est ici paracompacte, il existe un recouvrement ouvert $(\omega_i)_{i \in I}$ qui est tel que :

Preuve suite :

(i) $(\omega_i)_{i\in I}$ est localement fini,

(ii) $(\omega_i)_{i\in I}$ est plus fin que $(\Omega_x)_{x\in M}$.

Avec (i), on a que pour tout compact K de M,

$$\mathrm{Card}\Big\{ i \in I \ / \ \omega_i \cap K \neq \emptyset \Big\} < +\infty \ .$$

On pose $K_1 = \overline{\omega_1}$, ω_1 un des ω_i, et par récurrence on définit

$$K_m = \bigcup_{i\in I_m} \overline{\omega_i} \ ,$$

où

$$I_m = \Big\{ i \in I \ / \ \omega_i \cap K_{m-1} \neq \emptyset \Big\} \ .$$

On vérifie facilement par récurrence que :

(iii) pour tout m, I_m est fini, et K_m est donc compact,

(iv) pour tout $m \geq 2$, $K_{m-1} \subset \overset{\circ}{K}_m$.

Par suite, $\displaystyle\bigcup_{m\geq 1} K_m \neq \emptyset$, et

Preuve suite et fin :

$$\bigcup_{m\geq 1} K_m = \bigcup_{m\geq 1} \overset{\circ}{K}_m \ ,$$

de sorte $\mathcal{K} = \bigcup_{m\geq 1} K_m$ est un ouvert de M. On montre maintenant que $\mathcal{K}$ est aussi un fermé de M. Soit $x \in \overline{\mathcal{K}}$. En particulier,

$$\omega_i \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$$

pour un i tel que $x \in \omega_i$. Or

$$\omega_i \cap \mathcal{K} \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \exists m \ / \ \omega_i \cap K_m \neq \emptyset \ ,$$

tandis que $\omega_i \cap K_m \neq \emptyset$ entraine par construction que $x \in K_{m+1}$. Il s'ensuit que $x \in \mathcal{K}$, et donc que $\mathcal{K}$ est un fermé de M. Par connexité de M, on en déduit là encore que $M = \mathcal{K}$, à savoir que $M = \bigcup_{m\geq 1} K_m$. D'où le point (3) de la proposition.

Reste donc à montrer le point (4) de la proposition. Il s'agit d'une conséquence facile du théorème de Stone (un espace métrique est paracompact), et du théorème d'Urysohn (un espace régulier à base dénombrable est métrisable). CQFD.

Définition

Soit $(M, \mathcal{O})$ une variété topologique. On appelle atlas de M toute famille

$$\mathcal{A} = \Big((\Omega_i, \varphi_i)\Big)_{i \in I}$$

de cartes locales qui est telle que $M = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Les applications

$$\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(\Omega_i \cap \Omega_j) \to \varphi_j(\Omega_i \cap \Omega_j)$$

sont appelées applications de changement de cartes, ou encore fonctions de transitions.

Les applications de changement de cartes n'ont de sens que lorsque $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$, et elles réalisent des homéomorphismes de $\varphi_i(\Omega_i \cap \Omega_j)$ sur $\varphi_j(\Omega_i \cap \Omega_j)$. En particulier, et pour tous $i, j \in I$, $\varphi_{ji} = \varphi_{ij}^{-1}$.

2. Variétés de classe C^k

Définition

Soit $(M, \mathcal{O})$ *une variété topologique et soit* $\mathcal{A} = ((\Omega_i, \varphi_i))_{i \in I}$ *un atlas de* M. *On dit que* $\mathcal{A}$ *est de classe* C^k, $1 \leq k \leq +\infty$, *si les fonctions de transitions* φ_{ij} *sont de classe* C^k.

Puisque $\varphi_{ji} = \varphi_{ij}^{-1}$, dire que $\mathcal{A}$ est de classe C^k revient encore à dire que les fonctions de transitions φ_{ij} sont des difféomorphismes de classe C^k de $\varphi_i(\Omega_i \cap \Omega_j)$ sur $\varphi_j(\Omega_i \cap \Omega_j)$.

Définition

Soient $(M, \mathcal{O})$ *une variété topologique, et* $\mathcal{A}_1$ *et* $\mathcal{A}_2$ *deux atlas de classe* C^k *sur* M. *On dit que* $\mathcal{A}_1$ *et* $\mathcal{A}_2$ *sont* C^k*-compatibles si l'atlas* $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ *est encore de classe* C^k.

Lemme

La relation de C^k-compatibilité est une relation d'équivalence sur l'ensemble des atlas de classe C^k de M.

Preuve : La réflexivité et la symétrie sont évidentes. Reste à montrer la transitivité. Soient $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$ trois atlas de classe C^k. On suppose que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont C^k-compatibles et que $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$ sont C^k-compatibles. On veut montrer que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_3$ sont C^k-compatibles et donc que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_3$ est un atlas de classe C^k. Soient (Ω_1, φ_1) une carte de $\mathcal{A}_1$ et (Ω_3, φ_3) une carte de $\mathcal{A}_3$ telles que $\Omega_1 \cap \Omega_3 \neq \emptyset$. On veut montrer que $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ est C^k sur $\varphi_1(\Omega_1 \cap \Omega_3)$. Soit $a \in \Omega_1 \cap \Omega_3$ et soit (Ω_2, φ_2) une carte de $\mathcal{A}_2$ telle que $a \in \Omega_2$. On écrit que

$$\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} = \left(\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1}\right) \circ \left(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\right)$$

sur $V = \varphi_1(\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3)$. Or V est un voisinage ouvert de $\varphi_1(a)$. Et comme $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont C^k-compatibles, et $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$ sont C^k-compatibles, les applications de changement de cartes $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ et $\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1}$ sont de classe C^k.

Preuve suite et fin : Donc $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ est de classe C^k sur V et on en déduit que $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ est de classe C^k au voisinage de tout point de $\varphi_1(\Omega_1 \cap \Omega_3)$. Cela revient encore à dire que $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ est de classe C^k sur $\varphi_1(\Omega_1 \cap \Omega_3)$. On a ainsi montré que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_3$ sont C^k-compatibles. CQFD.

Définition

Soient $(M, \mathcal{O})$ une variété topologique et $\mathcal{A}$ un atlas de classe C^k sur M. On dit que $\mathcal{A}$ est C^k-saturé (ou C^k-complet) s'il n'est contenu dans aucun atlas de classe C^k qui soit strictement plus grand que lui.

En d'autres termes, $\mathcal{A}$ est C^k-saturé si pour tout atlas $\mathcal{A}'$ de classe C^k, l'inclusion $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ entraîne que $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.

La relation d'inclusion n'étant pas une relation d'ordre total, il se peut très bien qu'il y ait plusieurs C^k-atlas saturés. Le résultat suivant a par contre lieu.

Lemme

Tout atlas de classe C^k est contenu dans un unique C^k-atlas saturé.

Preuve : Soit $\mathcal{A}_0$ un atlas de classe C^k. Soit $\mathcal{R}$ la relation de C^k-compatibilité. On pose

$$\tilde{\mathcal{A}} = \bigcup_{\mathcal{A}\in[\mathcal{A}_0]_{\mathcal{R}}} \mathcal{A} \,,$$

où $[\mathcal{A}_0]_{\mathcal{R}}$ est la classe d'équivalence de $\mathcal{A}_0$ pour $\mathcal{R}$. Deux cartes dans $\tilde{\mathcal{A}}$ sont toujours dans deux atlas C^k-compatibles, donc le changement de cartes associé est forcèment de classe C^k. Par suite $\tilde{\mathcal{A}}$ est un atlas de classe C^k qui contient $\mathcal{A}_0$. Si $\mathcal{A}$ est un atlas de classe C^k qui contient $\mathcal{A}_0$, alors $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}$ sont C^k-compatibles. Donc si $\mathcal{A}$ est un C^k-atlas tel que $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$, et donc $\mathcal{A} \in [\mathcal{A}_0]_{\mathcal{R}}$ de sorte que $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$. Il s'ensuit que $\tilde{\mathcal{A}}$ est C^k-saturé. C'est même le seul C^k-atlas saturé qui contient $\mathcal{A}_0$ car tout atlas de classe C^k qui contient $\mathcal{A}_0$ est automatiquement dans $[\mathcal{A}_0]_{\mathcal{R}}$, et donc contenu dans $\tilde{\mathcal{A}}$. CQFD.

Définition

Une C^k-variété différentiable, ou variété de classe C^k, est une variété topologique qui est munie d'un C^k-atlas saturé.

En raison du lemme précédent, il suffit pour munir une variété topologique $(M, \mathcal{O})$ d'une structure de variété de classe C^k, de trouver sur M un atlas qui soit de classe C^k. Cet atlas engendre alors un unique C^k-atlas saturé qui le contient et qui confère à M une structure de variété de classe C^k.

En particulier, on remarque que toute structure de variété de classe C^k sur une variété topologique induit naturellement une structure de variété de classe $C^{k'}$ sur la variété, pour tout $k' \leq k$. Mais attention, le C^k-atlas saturé, regardé comme atlas de classe $C^{k'}$, n'est plus $C^{k'}$-saturé.

Proposition

Soit M une variété de classe C^k de dimension n. Alors :

(i) pour tout $x_0 \in M$ et tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une carte (Ω, φ) de M en x_0 qui est telle que $\varphi(x_0) = y_0$,

(ii) pour tout $x_0 \in M$, tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$, il existe une carte (Ω, φ) de M en x_0 qui est telle que $\varphi(x_0) = y_0$ et $\varphi(\Omega) = B_{y_0}(r)$, où $B_{y_0}(r)$ est la boule euclidienne de centre y_0 et de rayon r,

(iii) pour tout $x_0 \in M$ et tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une carte (Ω, φ) de M en x_0 qui est telle que $\varphi(x_0) = y_0$ et $\varphi(\Omega) = \mathbb{R}^n$.

Dans cet énoncé, et à partir de maintenant, par carte de M on entend une carte dans le C^k-atlas saturé de M, celui qui confère à M sa structure de variété de classe C^k.

Le résultat est une conséquence du lemme suivant.

Lemme

Soit M une variété de classe C^k de dimension n, et soit $\mathcal{A}$ le C^k-atlas saturé de M qui confère à M sa structure de variété de classe C^k. Soient $(\Omega, \varphi) \in \mathcal{A}$ et $f : \varphi(\Omega) \to V$ un difféomorphisme de classe C^k de $\varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$. Alors $(\Omega, f \circ \varphi) \in \mathcal{A}$.

Preuve : Considérons $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \bigcup \{(\Omega, f \circ \varphi)\}$. Clairement $\tilde{\mathcal{A}}$ est un atlas de classe C^k car pour toute carte (Ω', ψ) de $\mathcal{A}$, on a que $(f \circ \varphi) \circ \psi^{-1} = f \circ (\varphi \circ \psi^{-1})$ est de classe C^k (et vice-versa). Comme $\mathcal{A}$ est C^k-saturé, et puisque $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$, on doit avoir $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$. Donc $(\Omega, f \circ \varphi) \in \mathcal{A}$. CQFD.

Preuve de la proposition : (i) Soient $x_0 \in M$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit (Ω, ψ) une carte de M en x_0. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ le C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ consistant en la translation de vecteur $y_0 - \psi(x_0)$. Donc $f(y) = y + y_0 - \psi(x_0)$. Alors, en vertue du

Preuve suite : lemme, $(\Omega, f \circ \psi)$ est une carte de M en x_0. On a $(f \circ \psi)(x_0) = y_0$. D'où (i).

(ii) Pour montrer (ii) on se donne $x_0 \in M$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Soit (Ω', ψ) la carte de M en x_0 obtenue en (i). Comme $\psi(\Omega')$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_{y_0}(\varepsilon) \subset \psi(\Omega')$. On note $\Omega = \psi^{-1}(B_{y_0}(\varepsilon))$. Clairement, (Ω, ψ) est encore une carte de M en x_0 (même raisonnement que dans le lemme, mais en plus simple). Soit maintenant $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ le C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ consistant en la translation/homothétie donnée par

$$f(y) = y_0 + \frac{r}{\varepsilon}(y - y_0) \ .$$

Alors $(\Omega, f \circ \psi)$ est une carte de M en x_0 d'après le lemme, tandis que $(f \circ \psi)(\Omega) = B_{y_0}(r)$. D'où (ii).

(iii) Pour montrer (iii) on prend la carte construite en (ii) avec $r = 1$. Pour simplifier on pourra supposer que $y_0 = 0$. On utilise alors le fait que $f : B_0(1) \to \mathbb{R}^n$ donnée par

Preuve suite et fin :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} \ ,$$

réalise un C^∞-difféomorphisme de $B_0(1)$ sur $\mathbb{R}^n$. L'application inverse est donnée par

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1 + \|y\|^2}} \ .$$

Si (Ω, ψ) est la carte du (ii) dont on est parti, alors, toujours en vertue du lemme précédent, $(\Omega, f \circ \psi)$ répond à la question. CQFD.

Il y a d'abord les exemples de base, et en tout premier lieu l'espace $\mathbb{R}^n$ lui-même. L'ensemble à un élément $\left\{(\mathbb{R}^n, \mathrm{Id})\right\}$ est un atlas de classe C^∞. Le C^∞-atlas saturé qui lui correspond est constitué des couples (Ω, φ), où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et φ un difféomorphisme de classe C^∞ de Ω sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Cela confère à $\mathbb{R}^n$ une structure naturelle de variété C^∞ de dimension n.

Toujours dans les exemples de base, tout ouvert connexe U d'une C^k-variété M de dimension n, possède une structure naturelle de C^k-variété de dimension n. Il suffit de considérer les cartes $(U \cap \Omega, \varphi)$, où (Ω, φ) parcourt l'ensemble des cartes de (l'atlas saturé de) M.

Un exemple plus sophistiqué est donné par la sphère unité S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$. A savoir,

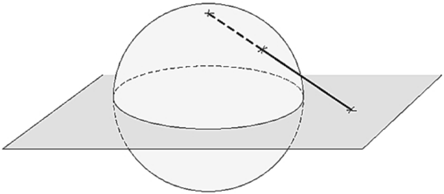
$$S^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \;/\; \|x\| = 1\right\} \;,$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^{n+1}$. On place sur S^n la topologie induite de celle de $\mathbb{R}^{n+1}$.

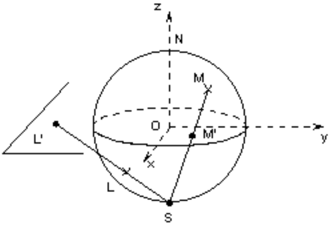
Théorème

S^n possède une structure naturelle de C^∞-variété compacte de dimension n.

Preuve : On note P et Q les deux points de S^n de coordonnées dans $\mathbb{R}^{n+1}$ $(0, \ldots, 0, 1)$ et $(0, \ldots, 0, -1)$. Soient de plus $\Omega_P = S^n \backslash \{P\}$ et $\Omega_Q = S^n \backslash \{Q\}$. On note $\Phi_P : \Omega_P \to \mathbb{R}^n$ (resp. $\Phi_Q : \Omega_Q \to \mathbb{R}^n$) la projection stéréographique de pôle P (resp. de pôle Q). Graphiquement



Preuve suite : ou encore



Les équations des projections stéréograhiques sont données par :

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \Omega_P,\ \Phi_P(x) = (\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}})$$
$$\forall x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \Omega_Q,\ \Phi_Q(x) = (\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}})\ .$$

On vérifie sans difficulté que Φ_P et Φ_Q sont des homéomorphismes de Ω_P et Ω_Q sur $\mathbb{R}^n$. Les inverses sont donnés pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ par

Preuve suite et fin :

$$\Phi_P^{-1}(x) = \Big(\frac{2x_1}{1+|x|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1+|x|^2}, \frac{|x|^2-1}{1+|x|^2}\Big)$$
$$\Phi_Q^{-1}(x) = \Big(\frac{2x_1}{1+|x|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1+|x|^2}, \frac{1-|x|^2}{1+|x|^2}\Big) \ ,$$

où $|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Reste maintenant à montrer que

$$((\Omega_P, \Phi_P), (\Omega_Q, \Phi_Q))$$

est un atlas de classe C^∞ sur S^n, à savoir que $\Phi_Q \circ \Phi_P^{-1}$ est un difféomorphisme de classe C^∞ de $\Phi_P(\Omega_P \cap \Omega_Q) = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ sur lui-même. Or

$$\Phi_Q \circ \Phi_P^{-1}(x) = \frac{x}{|x|^2} \ .$$

D'où le résultat. CQFD.

Un autre exemple standard aurait pu être donné par l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, l'espace des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$, qui lui aussi possède une structure naturelle de variété compacte C^∞ de dimension n.

A partir de deux variétés on en fabrique facilement une troisième par produit cartésien.

Lemme

Soient M et N deux C^k-variétés de dimensions respectives m et n, et soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ les C^k-atlas saturés respectifs de M et N. Alors $M \times N$ possède une structure naturelle de C^k-variété de dimension $m+n$, définie par l'atlas de classe C^k (non saturé) formé des $(\Omega \times \Omega', \varphi \times \psi)$, où pour $(\Omega, \varphi) \in \mathcal{A}$ et $(\Omega', \psi) \in \mathcal{A}'$, l'application $\varphi \times \psi : \Omega \times \Omega' \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ vérifie $\varphi \times \psi(x, y) = \big(\varphi(x), \psi(y)\big)$.

Le tore plat $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ (n fois) est la variété C^∞-compacte de dimension n obtenue à partir de S^1 par produit cartésien de S^1 avec lui-même n fois. Le cylindre $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ de dimension n possède aussi une structure de variété C^∞ donnée par le produit de la variété $\mathbb{R}$ avec la variété S^{n-1}.

Dans toute la suite, sauf mention du contraire, le terme variété désignera une variété de classe C^∞.

Définition

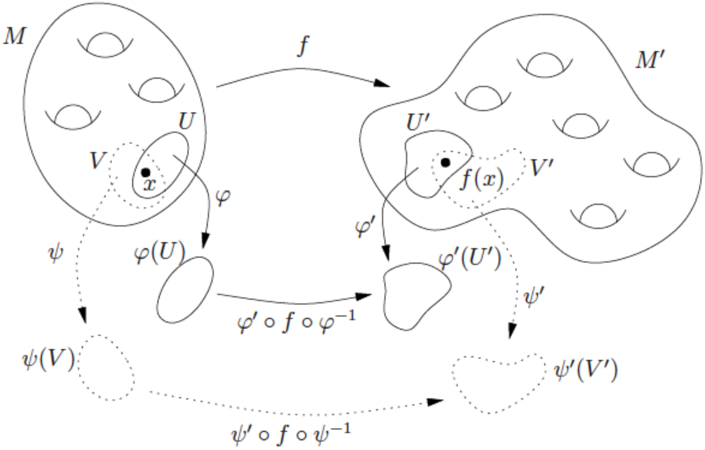
Soient M et N deux variétés, x un point de M, et $f : M \to N$ une application continue au point x. On dit que f est différentiable au point x si pour toute carte (Ω, φ) de M au point x, et toute carte (Ω', ψ) de N au point $f(x)$ vérifiant $f(\Omega) \subset \Omega'$, l'application

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \to \psi(\Omega')$$

est différentiable au point $\varphi(x)$.

Etant données (Ω, φ) et (Ω', ψ) deux cartes de M et N telles que $f(\Omega) \subset \Omega'$, *lire f* dans ces cartes signifie que l'on considère l'application

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \to \psi(\Omega') \ .$$


M
f
M'
U
V
x
φ
U'
V'
$f(x)$
φ'
ψ
$\varphi(U)$
$\varphi'(U')$
ψ'
$\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$
$\psi(V)$
$\psi'(V')$
$\psi' \circ f \circ \psi^{-1}$

Définition

Par extension, une application continue $f : M \to N$ *est dite différentiable sur* M *si elle est différentiable en tout point de* M. *Dans le même ordre d'idées, on dit qu'une application continue* $f : M \to N$ *est de classe* C^k *sur* M, k *un entier, si pour toute carte* (Ω, φ) *de* M, *et toute carte* (Ω', ψ) *de* N *vérifiant* $f(\Omega) \subset \Omega'$, *l'application*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \to \psi(\Omega')$$

est de classe C^k *sur* $\varphi(\Omega)$.

Une remarque : la condition $f(\Omega) \subset \Omega'$ n'est pas vraiment restrictive. Plus précisément, étant données deux cartes quelconques (Ω, φ) et (Ω', ψ) respectivement de M et N en x et $f(x)$, il existe un procédé très simple qui permet de se ramener au cas où $f(\Omega) \subset \Omega'$. Par continuité de f on pourra remplacer Ω par $\Omega \cap f^{-1}(\Omega')$. On a alors $f(\Omega) \subset \Omega'$. Le procédé fonctionne aussi lorsque f est seulement supposée continue en x en passant par les voisinages.

Une autre remarque : inutile de définir la différentiablitié sur un ouvert d'une variété puisque tout ouvert (connexe) d'une variété possède une structure naturelle de variété.

Théorème

Soient M et N deux variétés, x un point de M, et $f : M \to N$ une application de M dans N. Pour que f soit différentiable au point x, il suffit qu'il existe une carte (Ω, φ) de M en x, et une carte (Ω', ψ) de N en $f(x)$, vérifiant $f(\Omega) \subset \Omega'$, pour lesquelles l'application

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \to \psi(\Omega')$$

est différentiable au point $\varphi(x)$. De même, pour que f soit de classe C^k sur M, k un entier, il suffit que pour tout x de M, il existe une carte (Ω, φ) de M en x, et une carte (Ω', ψ) de N en $f(x)$, vérifiant $f(\Omega) \subset \Omega'$, pour lesquelles l'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est de classe C^k sur $\varphi(\Omega)$.

Preuve : Soient (Ω_1, φ_1) et (Ω_2, φ_2) deux cartes de M telles que

Preuve suite et fin : $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$, et soient (Ω_1', ψ_1) et (Ω_2', ψ_2) deux cartes de N telles que $f(\Omega_1) \subset \Omega_1'$ et $f(\Omega_2) \subset \Omega_2'$. On écrit que

$$\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1} = \left(\psi_2 \circ \psi_1^{-1}\right) \circ \left(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}\right) \circ \left(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}\right)$$

sur $\varphi_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$. Sachant que les applications de changement de cartes $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ et $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ sont de classe C^∞, on obtient immédiatement la première partie du théorème à partir de la relation ci-dessus, à savoir que si f lue dans les cartes (Ω_1, φ_1) et (Ω_1', ψ_1) est différentiable au point $\varphi_1(x)$, alors f lue dans les cartes (Ω_2, φ_2) et (Ω_2', ψ_2) est différentiable au point $\varphi_2(x)$. La seconde partie du théorème se démontre de la même façon. D'où le résultat. CQFD.

On sait donc définir la différentiabilité d'une application entre variétés. Par contre on ne sait pas encore définir sa différentielle. Nous verrons cela un peu plus tard, lorsque nous aborderons la notion d'espace tangent.

Dans le cas particulier où $N = \mathbb{R}$, sous entendu muni de sa structure naturelle de variété définie par l'atlas à une carte $(\mathbb{R}, \mathrm{Id})$, on tire du dernier théorème qu'une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ est

(1) différentiable en un point x de M s'il existe une carte (Ω, φ) de M au point x pour laquelle $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \to \mathbb{R}$ est différentiable au point $\varphi(x)$,

(2) de classe C^k sur M si pour tout point x de M, il existe une carte (Ω, φ) de M en x, pour laquelle $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \to \mathbb{R}$ est de classe C^k sur $\varphi(\Omega)$.

Dans les deux énoncés (1) et (2) on pose en fait $(\Omega', \psi) = (\mathbb{R}, \mathrm{Id})$. Ces deux assertions se généralisent bien sûr au cas où f est à valeurs dans un espace $\mathbb{R}^n$ (là encore, sous entendu muni de sa structure naturelle de variété).

Proposition

Soient M_1, M_2, et M_3 trois variétés, et $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$ deux applications. Si f est différentiable en un point x de M_1, et si g est différentiable au point $f(x)$, l'application $g \circ f : M_1 \to M_3$ est différentiable au point x. De même, si f est de classe C^k sur M_1 et si g est de classe C^k sur M_2, $g \circ f$ est de classe C^k sur M_1.

Preuve : Soient (Ω_1, φ_1) une carte de M_1 en x, (Ω_2, φ_2) une carte de M_2 en $f(x)$, et (Ω_3, φ_3) une carte de M_3 en $g\big(f(x)\big)$. Quitte à diminuer Ω_1 et Ω_2, on pourra toujours supposer que $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ et $g(\Omega_2) \subset \Omega_3$. On écrit alors que

$$\varphi_3 \circ (g \circ f) \circ \varphi_1^{-1} = \left(\varphi_3 \circ g \circ \varphi_2^{-1}\right) \circ \left(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}\right) ,$$

d'où l'on tire le résultat. CQFD.

Le résultat qui suit s'obtient très facilement à partir de la définition des structures produits.

Proposition

Soient M, M_1, M_2 trois variétés, et x un point de M. On munit $M_1 \times M_2$ de sa structure de variété produit. Etant donnée

$$f = \left(f_1, f_2\right) : M \to M_1 \times M_2 \ ,$$

f est différentiable au point x (resp. de classe C^k) si et seulement si f_1 et f_2 sont différentiables au point x (resp. de classe C^k) en tant qu'applications de M dans M_1 et M_2.

Soient M et N deux variétés, et $f : M \to N$ une application. On dit que f est un C^k-difféomorphisme de M sur N si :

1) f est bijective de M sur N,

2) f est de classe C^k sur M,

3) f^{-1} est de classe C^k sur N.

On vérifie facilement que l'existence d'un difféomorphisme entre deux variétés impose l'égalité des dimensions.

5. Un cas intéressant de (non) multiplicité

On discute le résultat suivant en préambule de la multiplicité des structures lisses sur laquelle nous reviendrons plus tard.

Proposition

Soient M une variété et soit $\mathcal{A} = ((\Omega_i, \varphi_i))_{i \in I}$ son C^∞-atlas saturé. On note Ψ un homéomorphisme de M que l'on suppose non de classe C^1. On définit $\tilde{\mathcal{A}} = \left((\Psi^{-1}(\Omega_i), \varphi_i \circ \Psi)\right)_{i \in I}$. Alors $\tilde{\mathcal{A}}$ est un atlas de classe C^∞ sur M, les atlas $\mathcal{A}$ et $\tilde{\mathcal{A}}$ ne sont pas C^1-compatibles et l'application identité $Id : (M, \mathcal{A}) \to (M, \tilde{\mathcal{A}})$ de la variété $(M, \mathcal{A})$ sur la variété $(M, \tilde{\mathcal{A}})$ n'est pas un C^1-difféomorphisme. Par contre les variétés $(M, \mathcal{A})$ et $(M, \tilde{\mathcal{A}})$ sont C^∞-difféomorphes.

Preuve : Il est clair que $\tilde{\mathcal{A}}$ est un atlas topologique. Si maintenant $(\Psi^{-1}(\Omega_i), \varphi_i \circ \Psi)$ et $(\Psi^{-1}(\Omega_j), \varphi_j \circ \Psi)$ sont deux cartes de $\tilde{\mathcal{A}}$, alors

Preuve suite :

$$(\varphi_j \circ \Psi) \circ (\varphi_i \circ \Psi)^{-1} = \varphi_j \circ (\Psi \circ \Psi^{-1}) \circ \varphi_i^{-1} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$$

qui est de classe C^∞. Donc $\tilde{\mathcal{A}}$ est un atlas C^∞.

Si Ψ n'est pas de classe C^1 c'est qu'il existe (Ω_i, φ_i) et (Ω_j, φ_j) deux cartes de M pour lesquelles Ψ lue dans ces cartes n'est pas C^1. Or $\varphi_j \circ \Psi \circ \varphi_i^{-1} = (\varphi_j \circ \Psi) \circ \varphi_i^{-1}$ s'interprète comme le changement de cartes entre la carte $(\Psi^{-1}(\Omega_j), \varphi_j \circ \Psi)$ de $\tilde{\mathcal{A}}$ et la carte (Ω_i, φ_i) de $\mathcal{A}$. Ce changement de cartes n'étant pas C^1 c'est que les atlas ne sont pas C^1-compatibles. La lecture de l'identité de la variété $(M, \mathcal{A})$ sur la variété $(M, \tilde{\mathcal{A}})$ dans les cartes (Ω_i, φ_i) et $(\Psi^{-1}(\Omega_j), \varphi_j \circ \Psi)$ n'est rien d'autre que $(\varphi_j \circ \Psi) \circ \varphi_i^{-1}$. On en déduit que l'identité n'est pas un C^1-difféomorphisme de la variété $(M, \mathcal{A})$ sur la variété $(M, \tilde{\mathcal{A}})$.

Pour finir on remarque que $\Psi : (M, \tilde{\mathcal{A}}) \to (M, \mathcal{A})$ est de classe C^∞ car sa lecture dans deux cartes quelconques $(\Psi^{-1}(\Omega_i), \varphi_i \circ \Psi)$ de $\tilde{\mathcal{A}}$ et (Ω_j, φ_j) de $\mathcal{A}$ vaut

Preuve suite et fin :

$$\begin{aligned}\varphi_j \circ \Psi \circ (\varphi_i \circ \Psi)^{-1} &= \varphi_j \circ (\Psi \circ \Psi^{-1}) \circ \varphi_i^{-1} \\ &= \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \ ,\end{aligned}$$

qui est de classe C^∞. Donc Ψ est de classe C^∞ de la variété $(M, \tilde{\mathcal{A}})$ sur la variété $(M, \mathcal{A})$. On montre sans plus de difficulté que son inverse Ψ^{-1} est C^∞ de de la variété $(M, \mathcal{A})$ sur la variété $(M, \tilde{\mathcal{A}})$. Les deux variétés sont donc C^∞-difféomorphes. CQFD.

Définition

Soient M et N deux variétés, x un point de M, et $f : M \to N$ une application différentiable au point x. Etant données (Ω, φ) une carte de M en x, et (Ω', ψ) une carte de N en $f(x)$, telles que $f(\Omega) \subset \Omega'$, le rang de f au point x est par définition le rang de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ au point $\varphi(x)$, à savoir le rang de l'application linéaire $D\big(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big)$. On le note $Rg(f)_x$. La définition est intrinsèque, au sens où elle ne dépend pas du choix des cartes.

Preuve : On démontre que la définition est intrinsèque. Soient (Ω_1, φ_1) et (Ω_2, φ_2) deux cartes de M en x, et (Ω'_1, ψ_1) et (Ω'_2, ψ_2) deux cartes de N en $f(x)$ telles que $f(\Omega_1) \subset \Omega'_1$ et $f(\Omega_2) \subset \Omega'_2$. On écrit que

$$\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1} = \left(\psi_2 \circ \psi_1^{-1}\right) \circ \left(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}\right) \circ \left(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}\right) .$$

Par différentiation de cette relation au point $\varphi_2(x)$ on obtient que

Preuve suite :

$$
\begin{aligned}
&D\big(\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}\big)\big(\varphi_2(x)\big) \\
&= D\big(\psi_2 \circ \psi_1^{-1}\big)\big(\psi_1(f(x))\big) \circ D\big(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}\big)\big(\varphi_1(x)\big) \\
&\qquad \circ D\big(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}\big)\big(\varphi_2(x)\big)\ .
\end{aligned}
$$

Sachant que $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ et $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ sont des difféomorphismes, on pourra encore écrire que

$$
D\big(\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}\big)\big(\varphi_2(x)\big) = \ G \ \circ D\big(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}\big)\big(\varphi_1(x)\big) \circ \ F
$$

où G est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$, F est un isomorphisme de $\mathbb{R}^m$, m désigne la dimension de M et n désigne la dimension de N. On a $F(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m$ et G présèrve les dimensions. Il s'ensuit que

$$
Rg\Big(D\big(\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}\big)\big(\varphi_2(x)\big)\Big) = Rg\Big(D\big(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}\big)\big(\varphi_1(x)\big)\Big)\ .
$$

D'où le résultat, à savoir l'indépendance de la définition par rapport au choix des cartes. CQFD.

Le théorème d'inversion locale passe bien sûr au cas des variétés (il suffit de l'appliquer à la lecture de l'application).

Théorème (Inversion locale)

Soient M et N deux variétés de même dimension n, et $f : M \to N$ une application de classe C^k de M dans N. Si en un point x de M, $Rg(f)_x = n$, alors f réalise un difféomorphisme de classe C^k d'un voisinage ouvert de x dans M sur un voisinage ouvert de $f(x)$ dans N. En particulier, si f est bijective de M sur N, et si en tout point x de M, $Rg(f)_x = n$, alors f réalise un difféomorphisme de classe C^k de M sur N.

Le théorème d'inversion locale peut être vu comme un cas particulier du théorème du rang constant (qui prend une forme agréable dans le contexte des variétés, contrairement à la forme qu'il prend entre espaces euclidiens).

Théorème (Théorème du rang constant)

Soient M et N deux variétés de dimensions respectives m et n, et soit $f : M \to N$ une application de classe C^∞. On suppose que f est de rang constant p sur M. Pour tout $x_0 \in M$ il existe alors une carte (Ω, φ) de M au point x_0, et il existe une carte (Ω', ψ) de N au point $f(x_0)$ vérifiant $f(\Omega) \subset \Omega'$, telles que pour tout $x \in \varphi(\Omega)$,

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = S(x) ,$$

où $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est l'application de rang p de référence définie par $S\big(x_1, \ldots, x_m\big) = \big(x_1, \ldots, x_p, 0 \ldots, 0\big)$.

On définit maintenant ce que l'on entend par immersion, submersion, et plongement. Immersions et submersions sont des applications de rang maximum par rapport à la configuration.

Définition

Soient M et N deux variétés de dimensions respectives m et n, et $f : M \to N$ une application différentiable sur M. On dit que f est une immersion si f est de rang constant m sur M, une submersion si f est de rang constant n sur M, un plongement si f est une immersion qui réalise un homéomorphisme sur son image.

L'existence d'une immersion $f : M \to N$ impose $m \leq n$, tandis que l'existence d'une submersion $f : M \to N$ impose $m \geq n$.

Proposition

Une immersion injective et propre est un plongement. En particulier, si M est compacte, et si $f : M \to N$ est une immersion injective, alors f est un plongement.

Preuve : Le résultat est énoncé dans les rappels de topologie. On se souviendra que propre signifie que l'image réciproque d'un compact est un compact. Une application continue d'un compact est automatiquement propre car compact implique fermé, Preuve suite et fin : tout fermé dans un compact est compact et l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé. CQFD.

Corollaire (Théorème du rang constant pour les immersions)

Soient M et N deux variétés de dimensions respectives m et n, et soit $f : M \to N$ une immersion de classe C^∞. Pour tout $x_0 \in M$ il existe une carte de (Ω, φ) de M au point x_0, et il existe une carte (Ω', ψ) de N au point $f(x_0)$ vérifiant $f(\Omega) \subset \Omega'$, telles que pour tout $x \in \varphi(\Omega)$,

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = I(x) \ ,$$

où $I : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est l'injection canonique définie par

$$I\big(x_1, \dots, x_m\big) = \big(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0\big) \ .$$

En particulier, une immersion C^∞ est localement un plongement.

Corollaire (Théorème du rang constant pour les submersions)

Soient M et N deux variétés de dimensions respectives m et n, et soit $f : M \to N$ une submersion de classe C^∞. Pour tout $x_0 \in M$ il existe une carte (Ω, φ) de M au point x_0, et il existe une carte (Ω', ψ) de N au point $f(x_0)$ vérifiant $f(\Omega) \subset \Omega'$, telles que pour tout $x \in \varphi(\Omega)$,

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = P(x) \ ,$$

où $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est la projection canonique définie par

$$P\big(x_1, \dots, x_m\big) = \big(x_1, \dots, x_n\big) \ .$$

En particulier, une submersion C^∞ est une application ouverte.

Dans un autre registre, le résultat suivant a lieu.

Lemme

La composée de deux immersions (resp. deux submersions) est encore une immersion (resp. une submersion). La composée d'une immersion et d'une submersion dans le sens immersion $\circ$ submersion est une application de rang constant. On ne peut rien dire a priori sur la composée d'une immersion et d'une submersion dans le sens submersion $\circ$ immersion.

Preuve : Soit $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ une lecture de f. On remarque que f est une immersion (resp. submersion) sur Ω, l'ouvert de la carte (Ω, φ), si $D\tilde{f}\,(\varphi(x))$ est injective (resp. surjective) en tout point x de Ω. On compose alors les lectures par

$$\varphi_3 \circ (g \circ f) \circ \varphi_1^{-1} = (\varphi_3 \circ g \circ \varphi_2^{-1}) \circ (\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \ .$$

Par suite, en tout point $x \in \Omega_1$, l'ouvert de la carte (Ω_1, φ_1),

$$\begin{aligned} & D\left(\varphi_3 \circ (g \circ f) \circ \varphi_1^{-1}\right)(\varphi_1(x)) \\ & = D\left(\varphi_3 \circ g \circ \varphi_2^{-1}\right)(\varphi_2(f(x))) \circ D(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(x)) \ . \end{aligned}$$

Preuve suite et fin : Si f et g sont toutes deux des immersions alors le RHS de la relation ci-dessus est du type injective $\circ$ injective. C'est donc encore une application injective et on en déduit bien que

$$\text{immersion} \circ \text{immersion} = \text{immersion} \ .$$

Même chose avec le sens submersion $\circ$ submersion et la surjectivité. Donc

$$\text{submersion} \circ \text{submersion} = \text{submersion} \ .$$

Pour ce qui est du sens immersion $\circ$ submersion on remarque que le RHS de la relation précédente est du type injective $\circ$ surjective. Ecrivons $G \circ F$ avec F et G des applications linéaires respectivement surjectives et injectives. Soient aussi n_1, n_2 et n_3 les dimensions des trois variétés. Comme F est surjective, on peut écrire que $F(\mathbb{R}^{n_1}) = \mathbb{R}^{n_2}$, et comme G est injective, on a que $\dim G(\mathbb{R}^{n_2}) = n_2$. Donc, dans le sens immersion $\circ$ submersion on récupère une application de rang constant la dimension de la variété milieu. Pour l'autre sens on renvoie à l'exemple ci-dessous. CQFD.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application donnée par $f(x, y, z) = (y, z)$. C'est une submersion. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par $g(t) = (t, t^2, t^3)$. C'est clairement une immersion. Par contre

$$f \circ g(t) = (t^2, t^3) \ ,$$

dont la matrice jacobienne en t vaut

$$M = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \ .$$

Cette matrice est de rang 1 en tout $t \neq 0$, mais de rang 0 en $t = 0$. Donc $f \circ g$ n'est pas de rang constant.

7. Sous variétés

Définition

Une sous variété N de dimension q d'une variété M de dimension n, $q \leq n$, est un sous espace topologique de M qui vérifie : pour tout x de N, il existe une carte (Ω, φ) de M au point x, il existe U_1 un ouvert de $\mathbb{R}^q$, et il existe U_2 un ouvert de $\mathbb{R}^{n-q}$, tels que

$$\varphi(x) = 0 \ \ \text{et} \ \ \varphi(\Omega) = U_1 \times U_2 \ ,$$
$$\varphi\big(\Omega \cap N\big) = U_1 \times \{0\}$$

La carte (Ω, φ) est alors appelée carte de M en x adaptée à N.

Une autre façon de dire les choses est encore la suivante : N est une sous variété de dimension q d'une variété M de dimension n si pour tout point x de N il existe un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ de M au point x ayant la propriété que N y soit défini par les équations $x_{q+1} = \cdots = x_n = 0$.

Les deux résultats suivants sont immédiats.

Théorème

Si N est une sous variété de dimension q d'une variété M, alors N hérite d'une structure naturelle de variété de dimension q. L'atlas qui définit cette structure est donné par les

$$\left(\Omega \cap N, \Pi \circ \varphi_{|\Omega \cap N}\right) ,$$

où (Ω, φ) décrit l'ensemble des cartes adaptées à N, et $\Pi : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-q} \to \mathbb{R}^q$ désigne la première projection. En particulier, l'injection canonique $i : N \to M$ (qui à $x \in N$ associe $i(x) = x$) est un plongement de la variété N dans la variété M.

Proposition

Soient N et N' deux sous variétés des variétés M et M', et soit de plus $f : M \to M'$ une application de classe C^k. Si $f(N) \subset N'$, alors f restreinte à N, et considérée en tant qu'application de la variété N dans la variété N', est encore une application de classe C^k.

Théorème (Représentation implicite des sous variétés)

1) *Soit N une sous variété de dimension q d'une variété M de dimension n. Alors N s'écrit localement comme l'image réciproque d'un point par une C^∞-submersion à valeurs dans $\mathbb{R}^{n-q}$, i.e :*
$\forall x \in N$, $\exists \Omega$ voisinage ouvert de x dans M, et $\exists f : \Omega \to \mathbb{R}^{n-q}$ une C^∞-submersion tels que $\Omega \cap N = f^{-1}(0)$.

2) *Réciproquement, soient M et M' deux variétés de dimensions respectives n et $n-q$, soit $f : M \to M'$ une application de classe C^∞, et soit y_0 un point de $f(M)$. On suppose que pour tout $x \in f^{-1}(y_0)$, $Rg(f)_x = n-q$. Alors $f^{-1}(y_0)$ est une sous variété de dimension q de M. En particulier, l'image réciproque d'un point par une C^∞-submersion est une sous variété (le tout à connexité près).*

Preuve : **1)** Soient $x \in N$ et (Ω, φ) une carte de M en x adaptée à N. Si $\varphi = \left(\varphi_1, \ldots, \varphi_n\right)$ alors

$$f = \left(\varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_n\right) : \Omega \to \mathbb{R}^{n-q}$$

est une C^∞-submersion et $\Omega \cap N = f^{-1}(0)$.

Preuve suite : **2)** On considère M, M' deux variétés de dimensions respectives n et $n-q$, $f : M \to M'$ une application C^∞, y_0 un point de $f(M)$, et on suppose que $\forall x \in f^{-1}(y_0)$, $\mathrm{Rg}(f)_x = n-q$. Soit alors $x_0 \in f^{-1}(y_0)$. Comme f est de rang maximum en x_0, il existe un voisinage ouvert Ω de x_0 tel que f y soit toujours de rang maximum. Sans perdre en généralité, on pourra supposer que Ω est l'ouvert d'une carte (Ω, φ) de M en x_0, et on pourra considérer (Ω', ψ) une carte de M' en y_0 vérifiant $f(\Omega) \subset \Omega'$ et telles que : $\forall x \in \varphi(\Omega)$,

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = P(x) \ ,$$

où $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-q}$ est la projection $P(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-q})$. Quitte à considérer la carte $(\Omega, \mathcal{C} \circ \varphi)$ au lieu de (Ω, φ), où

$$\mathcal{C}(x_1, \ldots, x_n) = (x_{q+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_q) \ ,$$

on pourra supposer que $P(x_1, \ldots, x_n) = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$. Là encore, et quitte à restreindre Ω, on pourra maintenant supposer que $\varphi(\Omega) = U_1 \times U_2$, où U_1 est un ouvert de $\mathbb{R}^q$, et U_2 un ouvert de $\mathbb{R}^{n-q}$. On remarque alors que

Preuve suite :

$$\varphi\big(\Omega \cap f^{-1}(y_0)\big) = U_1 \times \psi(y_0) \qquad (\star)$$

En effet :

a) $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = P \quad \Rightarrow \quad \psi \circ f = P \circ \varphi$ et ainsi

$$P\Big(\varphi\big(\Omega \cap f^{-1}(y_0)\big)\Big) = \psi(y_0)$$

de sorte que $\varphi\big(\Omega \cap f^{-1}(y_0)\big) \subset U_1 \times \psi(y_0)$.

b) Si $z \in U_1 \times \psi(y_0)$ alors $\varphi^{-1}(z) \in \Omega$ et puisque $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = P$,

$$\psi \circ f\left(\varphi^{-1}(z)\right) = \psi(y_0)$$

et $f\left(\varphi^{-1}(z)\right) = y_0$. D'où $\varphi^{-1}(z) \in f^{-1}(y_0)$ et

$$U_1 \times \psi(y_0) \subset \varphi\big(\Omega \cap f^{-1}(y_0)\big) \ .$$

En particulier, le résultat annoncé, l'égalité $(\star)$, est démontré.

Preuve suite et fin : A partir de là, on remarque que puisque $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = P$,

$$\psi(y_0) = \left(\varphi^{q+1}(x_0), \ldots, \varphi^n(x_0)\right) .$$

On pose alors

$$\Phi(x) = \left(\varphi^1(x) - \varphi^1(x_0), \ldots, \varphi^n(x) - \varphi^n(x_0)\right) ,$$

et on construit ainsi une carte (Ω, Φ) de M en x_0 telle que $\Phi(x_0) = 0$ et

$$\begin{aligned} &\Phi\left(\Omega \cap f^{-1}(y_0)\right) = \tilde{U}_1 \times \{0\} \\ &\Phi(\Omega) = \tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2 , \end{aligned}$$

où $\tilde{U}_1$ et $\tilde{U}_2$ sont les translatés de U_1 et U_2 par les vecteurs $\left(\varphi^1(x_0), \ldots, \varphi^q(x_0)\right)$ et $\left(\varphi^{q+1}(x_0), \ldots, \varphi^n(x_0)\right)$. D'où le résultat, puisque $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ est quelconque. CFQD.

Dans le même ordre d'idées, le résultat suivant a lieu.

Théorème (Représentation paramétrée des sous variétés)

1) *Soit N une sous variété de dimension q d'une variété M de dimension n. Alors N est localement l'image d'un ouvert de $\mathbb{R}^q$ par un C^∞-plongement, i.e : $\forall x \in N$, $\exists \Omega$ voisinage ouvert de x dans M, $\exists U$ un ouvert de $\mathbb{R}^q$, et il existe $f : U \to M$ un C^∞-plongement tels que $f(U) = \Omega \cap N$.*

2) *Réciproquement, si M et M' sont deux variétés de dimensions respectives q et $n + q$, et si $f : M \to M'$ est un C^∞-plongement, alors $f(M)$ est une sous variété de dimension q de M'. De plus, f réalise un difféomorphisme de la variété M sur la variété $f(M)$.*

Un exemple : La sphère unité S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$ est une sous variété de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$, définie implicitement par l'équation $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - 1 = 0$. Sa structure de sous variété coïncide (fort heureusement) avec sa structure de variété définie auparavant.

8. Le théorème de Whitney

Le théorème de Whitney établit un lien entre la théorie générale (ou abstraite) des variétés différentiables (que nous avons adoptée ici), et la théorie des sous variétés de l'espace euclidien. En un certain sens, ces deux théories sont identiques.

Théorème (Théorème de Whitney)

Toute variété paracompacte de dimension n se plonge de façon C^∞ dans $\mathbb{R}^{2n+1}$.

En d'autres termes : si M est une variété paracompacte de dimension n, il existe un C^∞-plongement $i : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$. En particulier, $i(M)$ est une sous variété de dimension n de $\mathbb{R}^{2n+1}$, et i réalise un C^∞-difféomorphisme de M sur $i(M)$. Toute variété paracompacte de dimension n est ainsi difféomorphe à une sous variété de dimension n de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Preuve (simplifiée) du théorème de Whitney : On se limite à la preuve du résultat plus faible suivant : *toute variété compacte se plonge de façon C^∞ dans un espace euclidien.* Soit donc M une variété compacte. A tout x de M on associe une carte (Ω_x, φ_x) de M en x telle que $\varphi_x(x) = 0$ et

$$\varphi_x(\Omega_x) = B_0(3) \subset \mathbb{R}^n ,$$

où n désigne la dimension de M, et $B_0(3)$ désigne la boule ouverte de centre 0 et rayon 3 dans $\mathbb{R}^n$. On écrit alors que

$$M = \bigcup_{x \in M} \varphi_x^{-1}\big(B_0(1)\big) ,$$

et puisque M est compacte, il existe une famille finie $(x_j)_{j=1,\dots,N}$ de points de M telle que

$$M = \bigcup_{j=1}^{N} \varphi_{x_j}^{-1}\big(B_0(1)\big) .$$

Soit maintenant $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ qui satisfait

Preuve suite :

$$\eta(x) = 1 \text{ si } x \in B_0(1) \ , \quad \eta(x) = 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}^n \backslash B_0(2) \ .$$

On note $\varphi_j = \varphi_{x_j}$ et on pose $\eta_j = \eta \circ \varphi_j$. La fonction

$$\Phi : M \to \mathbb{R}^{N(n+1)}$$

définie par

$$\Phi = \big(\eta_1\varphi_1, \ldots, \eta_N\varphi_N, \eta_1, \ldots, \eta_N\big)$$

est alors de classe C^∞ sur M. (On prolonge ici les fonctions $\eta_i\varphi_i$ et η_i par 0 en dehors de Ω_{x_i}). On affirme que

a) Φ est une immersion,

b) Φ est injective.

a) Etant donné x un point de M, il existe $i \in \big\{1, \ldots, N\big\}$ tel que $x \in \varphi_i^{-1}\big(B_0(1)\big)$. Par suite, $\eta_i\varphi_i = \varphi_i$ au voisinage de x, et on retrouve dans l'expression de $\Phi \circ \varphi_i^{-1}$ l'application identité de $\mathbb{R}^n$. D'où $\mathrm{Rg}(\Phi)_x = n$, et le point a).

Preuve suite et fin : b) Si $\Phi(x) = \Phi(y)$, alors pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, $\eta_i(x) = \eta_i(y)$. Par ailleurs, il existe $i_0 \in \{1, \ldots, N\}$ tel que $\eta_{i_0}(x) \neq 0$, et donc x et y appartiennent tous deux à $\Omega_{x_{i_0}}$. De la double égalité $\eta_{i_0}(x) = \eta_{i_0}(y)$ et $\eta_{i_0}(x)\varphi_{i_0}(x) = \eta_{i_0}(y)\varphi_{i_0}(y)$, on en déduit que nécessairement $x = y$, à savoir le point b).

Pour finir de démontrer le résultat, il reste à se souvenir qu'une immersion injective d'une variété compacte est nécessairement un plongement. CQFD.

9. Existence et unicité des structures lisses

Soit M une variété topologique. Par structure lisse sur M on entend la donnée d'un atlas saturé de classe C^∞ sur M. Nous disons ici quelques mots sur l'existence et l'unicité des structures lisses. On s'intéresse donc aux deux questions suivantes :

Question 1 (existence) : Une variété topologique possède-t-elle toujours une structure de variété lisse ?

Question 2 (unicité) : Une structure de variété lisse est-elle unique ?

Pour ce qui est de la question 2 il convient déjà de remarquer que la terminologie doit être précisée. Etant donnée une structure lisse sur M définie par un atlas saturé $\mathcal{A}$ de classe C^∞ sur M, par unicité on peut vouloir dire que $\mathcal{A}$ est le seul atlas saturé de classe C^∞ sur M. Avec cette définition (naïve) la réponse à la question 2 est trop facilement négative. Nous en avons déjà parlé.

Par unicité, on entendra la chose suivante : *étant donnée une structure de variété lisse sur M définie par un atlas saturé $\mathcal{A}$ de classe C^∞ sur M, cette structure est unique si pour tout atlas saturé $\mathcal{A}'$ de classe C^∞ sur M, les variétés $(M, \mathcal{A})$ et $(M, \mathcal{A}')$ sont difféomorphes.*

La terminologie maintenant précisée, parlons des reponses. Celles-ci sont pour le moins surprenantes ... Plus précisément :

(i) jusqu'à la dimension 3 incluse, une variété topologique possède toujours une structure lisse, et celle-ci est unique (Moïse, 1950),

(ii) dès la dimension 4, certaines variétés topologiques ne possèdent pas de structure lisse (Freedman, 1981), d'autres en possèdent plusieurs.

L'historique de ce dernier point remonte à Milnor en 1956. A la surprise générale, Milnor montrait qu'il existe sur la sphère S^7 une structure de variété lisse qui est distincte de sa structure canonique définie plus haut.

On sait maintenant (après que la question ait été reprise par Kervaire et Milnor) qu'il existe 28 structures lisses distinctes sur la sphère S^7, tandis qu'il en existe 992 sur la sphère S^{11} ! (On parle de sphères exotiques ...)

Indépendamment, et peut-être plus surprenantes encore sont les conséquences des travaux développés par Donaldson et Taubes : tandis que la structure canonique de variété lisse de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est unique pour $n \neq 4$, il existe sur $\mathbb{R}^4$ une infinité de structures lisses distinctes ! ! !

Tout cela illustre bien l'écart structurel existant entre la classe C^0 et la classe C^∞. On se trouvera par contre dans l'incapacité d'éxhiber une différence de même nature entre la classe C^1 et la classe C^∞. La raison en est deux résultats du à Whitney (et dont on trouvera une preuve accessible dans Hirsch [*Differential topology*, Springer-Verlag, chapitre 2].)

Le premier de ces résultats stipule que toute structure de classe C^1 sur une variété topologique paracompacte possède une sous structure lisse. (En d'autres termes, tout C^1-atlas saturé sur une variété topologique paracompacte possède un sous atlas qui est de classe C^∞.) Le second stipule que deux variétés lisses paracompactes qui sont C^1-difféomorphes sont aussi difféomorphes (i.e C^∞-difféomorphes.) En conclusion, et à hypothèse de paracompacité près :

(iii) homéomorphes $\not\Rightarrow$ difféomorphes (sauf en dimension inférieure ou égale à 3) ,

(iv) C^1-difféomorphes $\Rightarrow$ difféomorphes.