# Calcul Différentiel Avancé

par

Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise

Année 2017-2018

# 1. Espaces topologiques

**Définition**

*Un espace topologique est un couple $(X, \mathcal{O})$, où $X$ est un ensemble, et $\mathcal{O}$ est un sous ensemble de $\mathcal{P}(X)$, l'ensemble des parties de $X$, qui vérifie :*

*(1)* $\emptyset \in \mathcal{O}$ et $X \in \mathcal{O}$,

*(2) toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{O}$ est un élément de $\mathcal{O}$,*

*(3) toute réunion (même infinie) d'éléments de $\mathcal{O}$ est un élément de $\mathcal{O}$.*

*On dit que $\mathcal{O}$ définit une topologie sur $X$. Les ensembles de $\mathcal{O}$ sont les ouverts de la topologie.*

Dans ce qui suit, $(X, \mathcal{O})$ désigne un espace topologique, et $A$ désigne un sous ensemble de $X$.

**Définition**

*On dit que $A$ est une partie fermée de $X$, ou encore un fermé de $X$, si $X \backslash A \in \mathcal{O}$, i.e si $X \backslash A$ est un ouvert de $X$.*

Un sous ensemble de $X$ n'est pas forcément soit ouvert soit fermé. Par convention $\emptyset$ et $X$ sont à la fois des ouverts et des fermés de $X$.

**Lemme**

*Toute intersection (même infinie) de fermés est un fermé, et toute réunion finie de fermés est un fermé.*

### Définition

*On appelle voisinage de $A$ toute partie $V$ de $X$ qui est telle qu'il existe $U \in \mathcal{O}$ avec $A \subset U \subset V$. En particulier, on appelle voisinage d'un point $x \in X$ toute partie $V$ de $X$ qui est telle qu'il existe $U \in \mathcal{O}$ avec $x \in U$ et $U \subset V$.*

On note dans ce qui suit $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de $x$.

### Définition

*On appelle adhérence de $A$, et on note $\overline{A}$, le sous ensemble de $X$ défini par*

$$\overline{A} = \left\{ x \in X \ / \ \forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \neq \emptyset \right\} .$$

*C'est un fermé, et même le plus petit des fermés contenant $A$.*

## Lemme

*Pour tout $A \subset X$, $A \subset \overline{A}$, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ et $A$ est un fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.*

## Définition

*On appelle intérieur de $A$, et on note $\mathring{A}$, le sous ensemble de $X$ défini par*

$$\mathring{A} = \left\{ x \in X \ / \ A \in \mathcal{V}(x) \right\} .$$

*En d'autres termes, $x \in \mathring{A}$ si et seulement si il existe $U \in \mathcal{O}$ avec $x \in U$ et $U \subset A$. C'est un ouvert et le plus grand des ouverts contenus dans $A$.*

## Lemme

*Pour tout $A \subset X$, $\overset{\circ}{A} \subset A$, $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$ et $A$ est un ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$.*

## Définition

*On appelle frontière de $A$, et on note $\partial A$, le sous ensemble de $X$ défini par $\partial A = \overline{A} \backslash \overset{\circ}{A}$.*

Si $A$ et $B$ sont deux parties de $X$ :

$$\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \quad , \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B} \quad , \quad X \backslash \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{X \backslash A}}$$

$$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \quad , \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad , \quad X \backslash \overset{\circ}{A} = \overline{X \backslash A} \, .$$

## Définition

*Un sous ensemble $A \subset X$ est dit dense dans $X$ si $\overline{A} = X$.*

# 3. Base - topologie induite

**Définition**

*Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{O}$ est une base de la toplogie de $X$ si tout ouvert de $X$ peut s'écrire comme réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.*

Une partie $\mathcal{SB}$ de $\mathcal{P}(X)$ est une sous base de la topologie de $X$ si tout ouvert de $X$ est réunion d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{SB}$.

**Définition**

*Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $A \subset X$ une partie de $X$. La topologie induite sur $A$ par celle de $X$ est définie par*

$$\mathcal{O}_A = \left\{U \cap A,\ U \in \mathcal{O}\right\} .$$

*$(A, \mathcal{O}_A)$ est un sous espace topologique de $X$.*

# 4. Continuité - homéomorphismes

### Définition

*Soient* $(X, \mathcal{O})$ *et* $(Y, \mathcal{O}')$ *deux espaces topologiques. Une application* $f : X \to Y$ *est dite continue en un point* $x$ *de* $X$ *si* $\forall V \in \mathcal{V}\big(f(x)\big),\ f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$. *Par extension,* $f$ *est continue sur* $X$ *si* $f$ *est continue en tout point de* $X$.

### Proposition

*Soient* $(X, \mathcal{O})$ *et* $(Y, \mathcal{O}')$ *deux espaces topologiques. Une application* $f : X \to Y$ *est continue sur* $X$ *si et seulement si* $\forall V \in \mathcal{O}'$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}$ *(ce qui est encore équivalent à dire que pour tout* $F$ *fermé de* $Y$, $f^{-1}(F)$ *est un fermé de* $X$*).*

Deux espaces topologiques $(X, \mathcal{O})$ et $(Y, \mathcal{O}')$ sont dits homéomorphes s'il existe une bijection bicontinue $f : X \to Y$ (i.e $f$ est bijective de $X$ sur $Y$, $f$ est continue, $f^{-1}$ est continue). Une telle application est appelée un homéomorphisme.

# 5. Topologie produit

**Définition**

*Soient $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille (même infinie) d'espaces topologiques et $X = \prod_{i\in I} X_i$. Si $\pi_i : X \to X_i$ est la projection canonique d'indice $i$, l'ensemble*

$$\mathcal{A} = \left\{\pi_j^{-1}(U_j),\ j \in I,\ U_j \in \mathcal{O}_j\right\}$$

*engendre une topologie sur $X$ appelée topologie produit. L'ensemble $\mathcal{B}$ des intersections finies d'éléments de $A$ est une base de cette topologie. L'ensemble $(X, \mathcal{O})$ est appelé espace produit des espaces $(X_i, \mathcal{O}_i)$.*

Si $I$ est fini, i.e si $I = \{1, \ldots, n\}$, alors

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i=1}^{n} U_i,\ U_i \in \mathcal{O}_i \right\} .$$

# 6. Topologies associées à une application - topologie quotient

**Définition**

*Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique, $Y$ un ensemble quelconque, et $f : X \to Y$ une application. L'ensemble*

$$\mathcal{O}_f = \left\{ U \subset Y \;/\; f^{-1}(U) \in \mathcal{O} \right\}$$

*définit une topologie sur $Y$, appelée topologie induite par l'application $f$.*

En particulier, si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $X$, et si $Y = X/\mathcal{R}$, la topologie induite sur $X/\mathcal{R}$ par la surjection canonique $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ est appelée la topologie quotient de $X$ par $\mathcal{R}$.

**Définition**

*Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est dit séparé, ou encore de Hausdorff, si $\forall x, y \in X$ avec $x \neq y$, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$, et il existe $W \in \mathcal{V}(y)$ tels que $V \cap W = \emptyset$.*

On montre que tout produit d'espaces séparés est encore un espace séparé.

**Définition**

*Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique séparé et $(x_n)_n$ une suite de points de $X$. On dira que $(x_n)_n$ converge vers $x \in X$ si*

$$\forall V \in \mathcal{V}(x),\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N,\ x_n \in V\ .$$

*On note alors $x = \lim_{n \to +\infty} x_n$, ou plus simplement $x = lim\ x_n$.*

## Définition

*Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique séparé. On dit que $(X, \mathcal{O})$ vérifie la propriété $(\star)$ si tout point de $X$ possède un système fondamental dénombrable de voisinages, i.e si pour tout point $x$ de $X$, il existe un sous ensemble dénombrable $\mathcal{A}_x$ de $\mathcal{V}(x)$ qui est tel que : $\forall V' \in \mathcal{V}(x),\ \exists V \in \mathcal{A}_x \ /\ V \subset V'$.*

## Proposition

*Soient $(X, \mathcal{O})$ et $(Y, \mathcal{O}')$ deux espaces topologiques séparés vérifiant la propriété $(\star)$. Alors :*

*(1) pour toute partie $A$ de $X$ et tout $x \in \overline{A}$, il existe $(x_n)_n \in A$ telle que $\lim x_n = x$,*

*(2) Une partie $A$ de $X$ est fermée si et seulement si $\forall (x_n)_n \in A$, si $\lim x_n = x$ dans $X$ alors $x \in A$,*

*(3) Une application $f : X \to Y$ est continue en un point $x$ de $X$ si et seulement si $\forall (x_n)_n$, si $\lim x_n = x$ dans $X$ alors $\lim f(x_n) = f(x)$ dans $Y$.*

# 8. Espaces compacts

**Définition**

*Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est dit un espace compact s'il est séparé et s'il vérifie l'axiome de Borel-Lebesgue : de tout recouvrement ouvert de $X$ on peut extraire un sous recouvrement qui soit fini.*

En d'autres termes, $(X, \mathcal{O})$ est un compact si il est séparé et si

$$\forall (U_i)_{i\in I} \in \mathcal{O},\ X = \bigcup_{i\in I} U_i \quad \Rightarrow \quad \exists i_1, \ldots, i_n \in I \ / \ X = \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \ .$$

Une partie $A$ de $X$ est dite compacte si $(A, \mathcal{O}_A)$ est un espace compact. L'axiome de Borel-Lebesgue pour $A$ se traduit par

$$\forall (U_i)_{i\in I} \in \mathcal{O},\ A \subset \bigcup_{i\in I} U_i \quad \Rightarrow \quad \exists i_1, \ldots, i_n \in I \ / \ A \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \ .$$

Une partie $A$ de $X$ est dite relativement compacte si $\overline{A}$ est une partie compacte de $X$.

Dans un espace séparé $(X, \mathcal{O})$ tout sous espace compact est fermé, et dans un espace compact $(X, \mathcal{O})$, les parties compactes de $X$ sont les parties fermées de $X$.

**Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**

*Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique séparé vérifiant la propriété $(\star)$ de la section 7. $(X, \mathcal{O})$ est un compact si et seulement si toute suite de points de $X$ possède une sous suite convergente, i.e si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de points de $X$, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge.*

**Théorème (Théorème de Weierstrass)**

*Soient $(X, \mathcal{O})$ et $(Y, \mathcal{O}')$ deux espaces topologiques, avec $(Y, \mathcal{O}')$ séparé, et soit $f : X \to Y$ une application continue. Si $A$ est un compact de $X$, alors $f(A)$ est un compact de $Y$.*

**Théorème (Théorème de Tychonoff)**

*Tout produit d'espaces compacts est un espace compact.*

Un espace topologique séparé $(X, \mathcal{O})$ est localement compact si tout point de $X$ possède un voisinage compact. Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace séparé, $(Y, \mathcal{O}')$ un espace localement compact, et $f : X \to Y$ une application continue. On dit que $f$ est propre si l'image réciproque par $f$ de tout compact de $Y$ est un compact de $X$. Une application injective et propre réalise un homéomorphisme sur son image.

On dit qu'un espace topologique localement compact est dénombrable à l'infini s'il est réunion dénombrable de compacts.

# 9. Recouvrements localement finis - espaces paracompacts - partitions de l'unité

Un recouvrement ouvert d'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$, i.e une famille $(U_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}$ vérifiant $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, est dit localement fini si tout point de $X$ possède un voisinage qui ne recontre qu'un nombre fini de $U_i$.

Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $(U_i)_{i \in I}$, $(V_j)_{j \in J}$ deux recouvrements ouverts de $X$. On dit que $(U_i)_{i \in I}$ est plus fin que $(V_j)_{j \in J}$ si $\forall i \in I, \exists j \in J$ tel que $U_i \subset V_j$.

**Définition**

*Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique séparé. On dit que $(X, \mathcal{O})$ est paracompact si à tout recouvrement ouvert de $X$ correspond un recouvrement ouvert plus fin qui est localement fini.*

Tout espace compact est paracompact et tout fermé d'un paracompact est paracompact.

### Définition

*Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $X$. On appelle partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ toute famille $(\eta_j)_{j\in J}$, $\eta_j : X \to [0,1]$, de fonctions continues sur $X$, à valeurs dans $[0,1]$ qui vérifie :*

*(1)* $\forall j \in J, \exists i \in I \ / \ Supp\eta_j \subset U_i$,

*(2)* $\forall x \in X, \exists V \in \mathcal{V}(x) \ / \ Supp\eta_j \cap V = \emptyset$ *sauf pour un nombre fini de* $j$,

*(3)* $\forall x \in X, \displaystyle\sum_{j\in J} \eta_j(x) = 1$,

*où* $Supp\eta_j$*, le support de* $\eta_j$*, désigne l'adhérence de l'ensemble des* $x$ *de* $X$ *qui sont tels que* $\eta_j(x) \neq 0$.

### Théorème

*Dans un espace paracompact à tout recouvrement ouvert de l'espace correspond une partition de l'unité qui lui est subordonnée.*

### Définition

*Un espace topologique* $(X, \mathcal{O})$ *est connexe s'il n'existe pas de partition de* $X$ *en deux ensembles ouverts, i.e s'il n'existe pas* $U, V \in \mathcal{O}$, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, *tels que* $U \cap V = \emptyset$ *et* $X = U \cup V$. *On peut encore dire que* $(X, \mathcal{O})$ *est connexe si* $\emptyset$ *et* $X$ *sont les seules parties de* $X$ *qui sont à la fois ouvertes et fermées.*

Une partie $A$ d'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est dite connexe si le sous espace topologique $(A, \mathcal{O}_A)$ est connexe. On montre que si $A$ est une partie connexe de $X$, alors toute partie $B$ de $X$ qui vérifie $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe.

### Définition

*Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un espace topologique et* $x \in X$. *La composante connexe de* $x$, *notée* $C(x)$, *est par définition la réunion de toutes les parties connexes de* $X$ *qui contiennent le point* $x$. *C'est une partie connexe de* $X$, *la plus grande contenant le point* $x$.

**Théorème (Théorème de Bolzano)**

*L'image d'un connexe par une application continue est encore un connexe.*

On montre que tout produit d'espaces connexes est encore un espace connexe. Par ailleurs un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est dit localement connexe si tout point de $X$ possède un système fondamental de voisinages connexes, i.e si $\forall x \in X$, $\exists \mathcal{S} \subset \mathcal{V}(x)$ telle que $\forall U \in \mathcal{S}$, $U$ est connexe, et $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists U \in \mathcal{S}$ tel que $U \subset V$.

Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $x, y$ deux points de $X$. Une application continue $\gamma : [0, 1] \to X$ qui vérifie $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$ s'appelle un chemin continu d'origine $x$ et d'extrémité $y$. Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est connexe par arcs si deux points quelconques de $X$ sont toujours joints par un chemin continu.

**Théorème**

*Un espace topologique connexe par arcs est connexe.*

**Définition**

*Un espace métrique est un couple* $(X, d)$ *où* $X$ *est un ensemble et* $d : X \times X \to \mathbf{R}^+$ *vérifie*

*(1)* $\forall x, y \in X, \ d(x, y) = d(y, x)$,

*(2)* $\forall x, y \in X, \ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

*(3)* $\forall x, y, z \in X, \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,

*L'application* $d$ *s'appelle une distance sur* $X$.

Si $A$ est une partie de $X$, la restriction de $d$ à $A$, notée $d_A$, est une distance sur $A$. $(A, d_A)$ est un espace métrique appelé sous espace métrique de $(X, d)$.

Soit $(X, d)$ un espace métrique. Pour $x \in X$ et $r > 0$, on appelle boule ouverte de centre $x$ et de rayon $r$, et on note $B_x(r)$, le sous ensemble de $X$ défini par $B_x(r) = \{y \in X \ / \ d(x, y) < r\}$.

### Théorème

*Toute distance $d$ sur $X$ induit une topologie séparée $\mathcal{O}$ sur $X$ par : $U \in \mathcal{O}$ si et seulement si $\forall x \in U$, $\exists r_x > 0$ tel que $B_x(r) \subset U$.*

Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est dit métrisable s'il existe une distance $d$ sur $X$ qui induit la topologie $\mathcal{O}$. Un produit dénombrable d'espaces métrisables est métrisable.

### Définition

*Un espace topologique séparé $(X, \mathcal{O})$ est dit régulier si : $\forall F$ fermé de $X$, $\forall x \in X \backslash F$, $\exists U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ tels que $x \in U_1$, $F \subset U_2$ et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Les espaces métriques sont toujours séparés (réguliers) et il vérifient la propriété $(\star)$ de la section 7.

**Théorème (Théorème de Stone)**

*Tout espace métrique est paracompact.*

**Théorème (Théorème d'Urysohn)**

*Un espace topologique régulier qui possède une base dénombrable pour sa topologie, est métrisable.*

**Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**

*Un espace métrique $(X, d)$ est compact si et seulement si toute suite de points de $X$ possède une sous suite convergente.*

La convergence d'une suite $(x_n)_n$ vers un point $x$ dans un espace métrique $(X, d)$ se traduit par

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, \ d(x_n, x) < \epsilon \ .$$

**Définition**

*Soient $(X, d)$ un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite de points de $X$. On dit que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall p, q \geq N,\ d(x_p, x_q) < \epsilon$$

*On dit que $(X, d)$ est complet si toute suite de Cauchy de $(X, d)$ converge.*

Toute suite convergente est de Cauchy. Tout espace métrique compact est complet. Pour tout $n$, $\mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne est complet. A isométrie près, tout espace métrique $(X, d)$ peut-être regardé comme un sous espace d'un espace métrique complet $(\overline{X}, \overline{d})$ avec $X \subset \overline{X}$, $X$ dense dans $\overline{X}$ et $\overline{d}_{|X} = d$. En particulier, un espace non complet n'est pas un espace pour lequel les suites "ne convergent pas", mais plutôt un espace "trop petit" pour contenir les limites de toutes les suites de Cauchy.