Calcul Différentiel Avancé

par

Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise

Année 2017-2018

Chapitre 3
Espaces Vectoriels Normés
Espaces de Banach
1. Rappels sur les normes et distances associées

Par définition, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est un ensemble muni de deux lois $+$ et $\times$. La loi $+$ est interne (on additionne deux éléments de E pour récupérer un élement de E). La loi $\times$ est externe (à $(t, x) \in \mathbb{R} \times E$ on associe tx dans E). On demande que ces opérations vérifient que :

(0) $(E, +)$ est un groupe commutatif ;

(i) (Distributivité de $\times$ par rapport à $+$ dans $\mathbb{R}$) $\forall t, t' \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $(t + t')x = tx + t'x$;

(ii) (Distributivité de $\times$ par rapport à $+$ dans E) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x, x' \in E$, $t(x + x') = tx + tx'$;

(iii) (Associativité dans $\mathbb{R}$) $\forall t, t' \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $t(t'x) = (tt')x$;

(iv) (Neutralité) $\forall x \in E$, $1 \times x = x$.

Le vecteur nul de E est l'élément neutre de $+$.

On vérifie facilement que
(P1) $\forall x \in E$, $0 \times x = 0$;
(P2) $\forall x \in E$, $(-1) \times x = -x$ (l'inverse de x pour $+$) ;
(P3) $\forall t \in \mathbb{R}$, $t \times 0 = 0$;
(P4) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $tx = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $x = 0$.

En bref, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est un ensemble E muni d'une addition qui permet d'additionner ces éléments entres eux (comme on le fait dans $\mathbb{R}^n$), et d'une loi externe qui permet de multiplier les éléments de E par des réels (comme on le fait encore dans $\mathbb{R}^n$) ...

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une norme N sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie :
(1) $\forall x \in E$, $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(2) (inégalité triangulaire) $\forall x, y \in E$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$,
(3) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
Une norme $N(x)$ se note le plus souvent $\|x\|$, et on dit que le couple $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

Une notion plus fine que la notion de norme est celle de produit scalaire.

Définition

Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. Une application* $B : E \times E \to \mathbb{R}$ *est un produit scalaire sur* E *si elle est bilinéaire, symétrique, définie, et positive. A savoir si :*
(1) (bilinéarité) $\forall x \in E$ *l'application* $y \to B(x, y)$ *est lin'eaire sur* E*, et pour tout* $y \in E$*, l'application* $x \to B(x, y)$ *est linéaire sur* E*,*
(2) (symétrique) $\forall x, y \in E$*,* $B(x, y) = B(y, x)$*,*
(3) (définie positive) $\forall x \in E$*,* $B(x, x) \geq 0$ *avec égalité si et seulement si* $x = 0$*.*
On note souvent $\langle x, y\rangle$ *au lieu de* $B(x, y)$*, et le couple* $(E, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ *constitué d'un espace vectoriel et d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien.*

Lemme

A tout produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est associé une norme $\| \cdot \|$ par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

pour tout $x \in E$. Produit scalaire et norme associée vérifient l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$ pour tous $x, y \in E$.

Remarque : C'est Cauchy-Schwarz qui permet de démontrer que $\| \cdot \|$ est une norme (inégalité triangulaire). On démontre Cauchy-Schwarz en écrivant que pour $x, y \in E$ donnés, $\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc

$$\|y\|^2 \lambda^2 + 2\langle x, y \rangle \lambda + \|x\|^2 \geq 0$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Cauchy-Schwarz exprime alors le fait que le discriminant du trinôme est forcément négatif ou nulle.

Soit X un ensemble quelconque. On rappelle qu'une distance sur X est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ vérfiant les propriétés suivantes :
(1) $\forall x, y \in X,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(2) $\forall x, y \in X,\ d(x,y) = d(y,x)$,
(3) (inégalité triangulaire) $\forall x, y, z,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.
Le couple (X, d) constitué d'un ensemble et d'une distance est appelé espace métrique.

Lemme

Tout espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ possède une structure naturelle d'espace métrique (E, d), la distance d associée à la norme étant définie par

$$d(x,y) = \|y - x\|$$

pour tous $x, y \in E$.

Dès lors que (E, d) est un espace métrique, on récupère plusieurs notions sur E comme celles de boules ouvertes et fermées, d'ouverts, de fermés, de suites convergentes et de Cauchy, d'application continue, etc. Si a est un point de E, et si $r > 0$ est un réel strictement positif, on définit les boules ouvertes et fermées de centre a et de rayon r par $B_a(r) = \{x \in E \text{ t.q. } d(a, x) < r\}$ et $\overline{B}_a(r) = \{x \in E \text{ t.q. } d(a, x) \leq r\}$. On rappelle alors la définition suivante des ouverts et fermés.

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et d la distance associée à $\|\cdot\|$. On dit qu'un sous ensemble $\Omega \subset E$ de E est un ouvert de E si pour tout point $a \in \Omega$, il existe $r = r_a$ strictement positif, tel que $B_a(r) \subset \Omega$, où $B_a(r)$ est la boule ouverte de centre a et de rayon r définie ci-dessus. On dit qu'un sous ensemble $F \subset E$ est un fermé de E si $E \backslash F$ est un ouvert de E.

Par convention $\emptyset$ et E sont à la fois ouverts et fermés. En langage intuitif, qui peut être rendu précis : (i) un ouvert est un ensemble qui ne contient aucun des points de sa frontière, et (ii) un fermé est un ensemble qui contient tous les points de sa frontière. Un ensemble peut donc n'être ni ouvert ni fermé.

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et d la distance associée à $\|\cdot\|$. Soit $(x_n)_n$ une suite de points de E. On dit que $(x_n)_n$ converge vers un point x de E, sous entendu pour la distance d ou pour la norme $\|\cdot\|$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N, d(x_n, x) < \varepsilon \ .$$

On dit que x est la limite de la suite $(x_n)_n$ (elle est forcément unique). Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible avec le choix d'une norme, on note $x_n \to x$ ou $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$.

Les fermés sont caractérisés par la propriété suivante :

Lemme

Un sous ensemble F de E est un fermé de E si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de points de F, si $(x_n)_n$ converge dans E, alors sa limite x est forcément dans F.

En remarquant (l'argument est intuitif mais il peut être rendu précis) que tout point de la frontière d'un patatoïde peut s'écrire comme limite d'une suite de points intérieurs, ce lemme signifie juste que l'ensemble possède bien tous les points de sa frontière.

Preuve : (i) Supposons tout d'abord que F est un fermé de E, et soit $(x_n)_n$ une suite de points de F qui converge dans E vers un point x. On veut montrer que $x \in F$. Par l'absurde, si $x \notin F$, alors $x \in E \backslash F$, et comme F est un fermé, $E \backslash F$ est un ouvert. Par définition d'un ouvert, il existe alors $r > 0$ tel que $B_x(r) \subset E \backslash F$. Or par définition de la convergence de $(x_n)_n$ vers x, il doit exister N tel que $x_n \in B_x(r)$ pour $n \geq N$. Mais comme $x_n \in F$ et $B_x(r) \subset E \backslash F$, on obtient une contradiction.

Preuve suite et fin : (ii) A l'inverse, supposons que pour toute suite $(x_n)_n$ de points de F, si $(x_n)_n$ converge vers un point x dans E, alors $x \in F$. On veut montrer qu'alors F est un fermé de E. La encore, on raisonne par l'absurde. Si $E \backslash F$ n'est pas un ouvert de E, alors il existe $x \in E \backslash F$ avec la propriété que pour tout $r > 0$, $B_x(r) \cap F \neq \emptyset$. On pose $r = 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, et on fait varier n. On obtient alors une suite $(x_n)_n$ de points de F telle que $d(x_n, x) \leq 1/n$ pour tout $n \geq 1$. Donc, par définition même, $(x_n)_n$ converge vers x et, là encore, on récupère une contradiction. CQFD

Définition

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ *et* $(F, \|\cdot\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés,* d_E *la distance associée à* $\|\cdot\|_E$*, et* d_F *la distance associée a* $\|\cdot\|_F$*.*
Soient aussi $X \subset E$ *un sous ensemble de* E*,* a *un point de* X*, et* $f : X \to F$ *une application définie sur* X *et à valeurs dans* F*. On dit que* f *est continue au point* a*, sous entendu pour les distances* d_E *et* d_F*, ou pour les normes* $\|\cdot\|_E$ *et* $\|\cdot\|_F$*, si l'une des trois propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*
(i) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$,
(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in X, \ d_E(a, x) < \delta \Rightarrow d_F\big(f(a), f(x)\big) < \varepsilon$,
(iii) pour toute suite $(x_n)_n$ *de points de* X *vérifiant que* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$*, on a forcément que* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$*.*
Par extension, on dit que f *est continue sur* X *si* f *est continue en tout point de* X*.*

L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) suit du fait que (ii) n'est rien d'autre que la définition mathématique de (i). L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iii) se démontre comme dans le cas réel en remplaçant les valeurs absolues de $\mathbb{R}$ par les normes des espaces E et F.

Une remarque simple mais importante est la suivante : si $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, alors l'application norme de E dans $\mathbb{R}$, qui à x associe $\|x\|$, est continue sur E. On le voit en remarquant que $\big|\|y\| - \|x\|\big| \leq \|y - x\|$, soit encore que $\big|\|y\| - \|x\|\big| \leq d(x, y)$ où d est la distance associée à $\|\cdot\|$. (l'application est même lipschitzienne)

Lemme

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ trois espaces vectoriels normés, X est un sous ensemble de E, Y est un sous ensemble de F tel que $f(X) \subset Y$ et $a \in X$ un point de X. Si $f : X \to F$ est continue en a, et si $g : Y \to G$ est continue en $f(a)$, alors $g \circ f : X \to G$ est continue en a.

3. Compacité et dimension

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit $K \subset E$ un sous ensemble de E. On appelle recouvrement ouvert de K toute famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i$.

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, et soit $K \subset E$ un sous ensemble de E. Par défintion, K est un compact de E si de tout recouvrement ouvert de K on peut extraire un sous recouvrement qui soit fini.

En d'autres termes, $K \subset E$ est un compact de E si pour tout recouvrement ouvert $(\Omega_i)_{i\in I}$ de K, il existe un sous ensemble fini $\{i_1, \ldots, i_p\} \subset I$ tel que $K \subset \bigcup_{j=1}^{p} \Omega_{i_j}$. Un théorème important en topologie est le suivant, dit de Bolzano-Weierstrass (ici énoncé dans le cas des espaces vectoriels normés, mais il possède une version topologique).

Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, et soit $K \subset E$ un sous ensemble de E. Alors K est un compact de E si et seulement si toute suite de points de K possède une sous suite qui converge dans K.

En d'autres termes, $K \subset E$ est un compact de E si pour toute suite $(x_n)_n$ de points de K, il existe $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$, et il existe $x \in K$, tels que $x_{\varphi(n)} \to x$ lorsque $n \to +\infty$ (la notation $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ signifie "application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$").
Plusieurs propriétés importantes se rattachent à la notion de compacité. Parmi les résultats célèbres on citera le théorème de Weierstrass (l'image d'un compact par une application continue est un compact), et le théorème de Tychonoff (tout produit d'espaces compacts est compact). On pourra encore montrer le théorème suivant :

Théorème

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, et soit $K \subset E$ un sous ensemble compact de E. Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur K. Alors f est bornée et elle atteint ses bornes.

Preuve : Que f soit bornée, à savoir qu'il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in K$, suit facilement du théorème de Weierstrass (un compact de $\mathbb{R}$ est forcément borné). Montrons maintenant que f atteint son minimum (la démonstration pour le maximum est identique, ou on peut changer f en $-f$). Soit

$$m = \inf_{x \in K} f(x)$$

la borne inférieure de l'ensemble $\{f(x), x \in K\}$. Par définition, m est le plus grand des minorants de cet ensemble et donc :
(i) $\forall x \in K$, $m \leq f(x)$, et
(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in K \ / \ m \leq f(x) \leq m + \varepsilon$.
On pose $\varepsilon = 1/n$ pour $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. On obtient ainsi l'existence d'un $x_n \in K$ tel que

Preuve suite et fin : $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$,

$$m \leq f(x_n) \leq m + \frac{1}{n} \ .$$

Donc $f(x_n) \to m$ lorsque $n \to +\infty$. Comme K est un compact, il existe $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge. Notons x sa limite. Une sous suite d'une suite convergente étant convergente et de même limite, on a encore que $f(x_{\varphi(n)}) \to m$ lorsque $n \to +\infty$. Par continuité de f en x il s'ensuit que $f(x) = m$. CQFD.

Note

Même remarque qu'aux chapitres précédents, un autre résultat fréquemment associé à la compacité est que toute application continue sur un compact y est uniformément continue.

Théorème (Second théorème de Riesz)

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, et soit $B' = \overline{B}_0(1)$ la boule fermée de E de centre 0 et rayon 1. Alors E est de dimension finie si et seulement si B' est un compact de E.

Bien sûr le résultat restre valable si on remplace B' par n'importe quelle boule fermée $\overline{B}_a(r)$. En particulier tout compact dans un espace vectoriel normé de dimension infinie est d'intérieur vide (i.e ne contient aucune boule ouverte du type $B_a(r)$, $r > 0$).

Preuve : On montre que les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les fermés bornés de cet espace. En dimension finie n l'espace est homéomorphe (et même isomorphe) à $\mathbb{R}^n$ et, dans $\mathbb{R}^n$, les compacts sont précisemment les fermés bornés (ce qui se démontre par extractions successives de sous suites en utilisant le fait que les suites réelles bornées possèdent des sous suites convergentes). On utilise ici (cf. plus loin), que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. En particulier, si E est de dimension finie, alors B' est compacte.

Preuve suite : Réciproquement, supposons que B' est un compact de E. On veut montrer que E est de dimension finie. Pour cela, on commence par remarquer que $\left(B_a(\frac{1}{2})\right)_{a\in B'}$ est un recouvrement ouvert de B'. Par suite, et puisque B' est supposé compact, il existe des $a_1, \ldots, a_n \in B'$ tels que

$$B' \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{a_i}(\frac{1}{2}) \ .$$

Notons F le sous espace vectoriel de E engendré par les a_i, $F = \mathrm{Vect}(a_1, \ldots, a_n)$. Clairement, F est de dimension finie, puisque par construction, $(a_1, \ldots, a_n)$ est une famille génératrice de F. On va montrer que $E = F$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $F \neq E$. Il existe alors $x \in E \backslash F$. Notons

$$\alpha = \inf_{y\in F} \|x - y\| \ .$$

Puisque F est de dimension finie, il existe $\tilde{x} \in F$ tel que $\alpha = \|x - \tilde{x}\|$ (les fermés bornés dans F sont compacts). En particulier, $\alpha > 0$. Soit maintenant $y \in F$ tel que

Preuve suite et fin :

$$\alpha \leq \|x - y\| \leq \frac{3\alpha}{2}$$

et soit $z = \frac{1}{\|x-y\|}\big(x - y\big)$. Alors $z \in B'$, et il existe ainsi $i \in \big\{1, \ldots, n\big\}$ pour lequel $z \in B_{a_i}(\frac{1}{2})$. On remarque maintenant que

$$y' = y + \|x - y\| a_i$$

appartient à F, et que

$$x = y + \|x - y\| z \ .$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \alpha &\leq \|x - y'\| \\ &= \|x - y\|.\|z - a_i\| \\ &\leq \frac{3\alpha}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3\alpha}{4} < \alpha \end{aligned}$$

et on obtient donc une contradiction. Il s'ensuit que $E = F$. En particulier, E est de dimension finie. D'où le théorème. CQFD.

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et d la distance associée à $\|\cdot\|$. Soit aussi $(x_n)_n$ une suite de points de E. On dit que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy, sous entendu pour la distance d ou pour la norme $\|\cdot\|$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ t.q. \ \forall p, q \geq N, d(x_p, x_q) < \varepsilon \ .$$

En d'autres termes une suite $(x_n)_n$ est de Cauchy si les x_n s'accumulent les uns sur les autres quand $n \to +\infty$.

Une remarque simple est qu'une suite convergente est toujours de Cauchy. Il suffit pour le voir d'écrire que

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x) + d(x_q, x) \ ,$$

où x est la limite de la suite. Si les x_n s'accumulent sur un point x, alors ils s'accumulent les uns sur les autres.

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé complet, ou encore un espace de Banach, si toute suite de Cauchy dans E pour $\|\cdot\|$ converge dans E pour $\|\cdot\|$. Si la norme provient d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, on dit que $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace de Hilbert.

Des exemples d'espaces de Banach sont :

Ex.1 : L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien $\langle x, y\rangle = \sum_i x_i y_i$ est un espace de Hilbert.

Ex.2 : L'espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ constitué des suites réelles $(x_n)_n$ pour lesquelles la série $\sum x_n^2$ converge, muni du produit scalaire $\langle (x_n)_n, (y_n)_n\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$, est un espace de Hilbert.

Ex.3 : Si (X, d) est un espace métrique, l'espace $C_B^0(X)$ des fonctions réelles continues et bornées sur X, muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_{C^0} = \sup_{x\in X} |f(x)|$, est un espace de Banach.

Il est bien sûr des espaces qui ne sont pas de Banach. Ces espaces sont forcèment de dimension infinie (comme on le verra plus tard).

Définition

Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un espace vetoriel E sont équivalentes s'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1$$

pour tout $x \in E$.

On vérifie que l'équivalence des normes présèrvent les notions de

(1) suites convergentes et limites,

(2) suites de Cauchy.

En particulier, si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes, alors $(E, \|\cdot\|_1)$ est un Banach si et seulement si $(E, \|\cdot\|_2)$ est un Banach. Plus généralement, deux normes équivalentes présèrvent la topologie.

Théorème

Sur un espace vectoriel réel de dimension finie, deux normes sont toujours équivalentes.

Preuve : Pour simplifier, on va supposer que $E = \mathbb{R}^n$, même si la démonstration procède en fait de façon analogue pour E un espace vectoriel quelconque de dimension finie. On note $\|.\|_0$ la norme standard de $\mathbb{R}^n$, définie par

$$\|x\|_0 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2} \ .$$

Comme on s'en convaincra facilement, démontrer le théorème revient à montrer que toute norme $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^n$ est équivalente à $\|.\|_0$. Etant donnée $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, et $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on écrit que

$$\|x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \ \|e_i\| \ .$$

Preuve suite : Par suite, et si

$$M = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|$$

on obtient que pour tout $x \in E$,

$$\|x\| \leq M\big(\max_{i=1,\ldots,n} |x_i|\big) \leq M\|x\|_0 \ .$$

Il s'ensuit que l'application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\|x\|$ est continue pour $\|\cdot\|_0$. Notons S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour $\|.\|_0$:

$$S = \big\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \|x\|_0 = 1\big\} \ .$$

Clairement, S est un fermé et borné de $\mathbb{R}^n$, donc un compact de $\mathbb{R}^n$. Il s'ensuit que la restriction de f à S est bornée et qu'elle atteint ses bornes. Sachant que pour $x \in S$, $f(x) \neq 0$, puisque sinon on devrait avoir $0 \in S$, on obtient qu'il existe un réel $m > 0$ tel que pour tout $x \in S$, $f(x) \geq m$. En d'autres termes, il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in S$, $\|x\| \geq m$. Si maintenant x est un vecteur non nul quelconque de $\mathbb{R}^n$, en remarquant que $\frac{1}{\|x\|_0}x \in S$, on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \geq m\|x\|_0$.

Preuve suite et fin : Posons pour finir $\lambda = \max\left(\frac{1}{m}, M\right)$. On voit alors que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{\lambda}\|x\|_0 \leq \|x\| \leq \lambda\|x\|_0 \ .$$

D'où le théorème. CQFD.

Théorème

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.

Preuve : Soient $\|\cdot\|$ la norme de E et $\mathcal{B}$ une base de E. On note $\|\cdot\|_0$ la norme euclidienne de E définie par $\|x\|_0 = \sqrt{\sum_{i=0}^n x_i^2}$, où les x_i sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et $n = \dim(E)$. Alors $(E, \|\cdot\|_0)$ est un Banach (pour les mêmes raisons que $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne est un Banach). Comme $\|\cdot\|$ est équivalente à $\|\cdot\|_0$ d'après le théorème précédent, $(E, \|\cdot\|)$ est aussi un Banach. CQFD.

5. Applications linéaires continues

On aborde la notion importante d'application linéaire continue. Pour mémoire, une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est une application $f : E \to F$ qui vérifie que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tous $x, y \in E$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Théorème

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et soit $f : E \to F$ une application linéaire de E dans F. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes

1) f est continue sur E
2) f est continue en 0
3) $\exists M > 0 \;/\; \forall x \in E,\; \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$

où f est dite continue si elle l'est en tant qu'application de l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|_E)$ dans l'espace vectoriel normé $(F, \|.\|_F)$.

Preuve : L'implication 1) $\Rightarrow$ 2) est immédiate. Supposons maintenant que 2) a lieu. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in E, \ \|x\|_E < \eta \ \Rightarrow \ \|f(x)\|_F < \varepsilon \ .$$

En prenant $\varepsilon = 1$ dans cette relation, on obtient ainsi qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|x\|_E < \eta$ entraine $\|f(x)\|_F \leq 1$. Etant donné x un point quelconque de E, avec $x \neq 0$, on pose

$$y = \frac{\eta}{2\|x\|_E} \ x \ .$$

En remarquant que $\|y\|_E < \eta$, on obtient que $\|f(y)\|_F \leq 1$. Par linéarité de f, cela entraine que

$$\|f(x)\|_F \leq \frac{2}{\eta}\|x\|_E \ .$$

On a ainsi montré que 2) $\Rightarrow$ 3). Supposons pour finir que 3) a lieu. Etant donné $x \in E$, soit $y \in E$ quelconque. Alors

$$\|f(y) - f(x)\|_F = \|f(y - x)\|_F \ .$$

de sorte qu'avec 3) on obtient que pour tout $y \in E$, Preuve suite et fin :

$$\|f(y) - f(x)\|_F \leq M\|y - x\|_E \ .$$

Donc f est lipschitzienne, et il s'ensuit que f est continue au point x. Ainsi, 3) $\Rightarrow$ 1), et le théorème est démontré. CQFD.

Théorème

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.

Preuve : Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On note $\|.\|'_E$ la norme de E définie pour tout $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ de E par

$$\|x\|'_E = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \ .$$

Sachant que E est de dimension finie, et d'après ce qui a été dit plus haut sur l'équivalence des normes, il existe une constante réelle $C > 0$ telle que pour tout $x \in E$, $\|x\|'_E \leq C\|x\|_E$.

Preuve suite et fin : Etant donnés f une application linéaire de E dans F, on écrit que pour tout $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ de E

$$\begin{aligned}
\|f(x)\|_F &= \|\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\|_F \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.\|f(e_i)\|_F \\
&\leq \Big(\max_{i=1,\ldots,n} \|f(e_i)\|_F\Big)\|x\|'_E \\
&\leq C\Big(\max_{i=1,\ldots,n} \|f(e_i)\|_F\Big)\|x\|_E \ .
\end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'il existe un réel $M > 0$,

$$M = C\Big(\max_{i=1,\ldots,n} \|f(e_i)\|_F\Big) \ ,$$

tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$. D'après le théorème précédent, cela entraine que f est continue sur E. CQFD.

Théorème

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et soit $L_c(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. Soit $\|\cdot\|_{L_c(E,F)}$ la norme sur $L_c(E,F)$ définie par

$$\|f\|_{L_c(E,F)} = \sup_{x \in E\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} .$$

Alors non seulement $\|\cdot\|_{L_c(E,F)}$ est bien une norme sur $L_c(E,F)$, mais en plus, l'espace $(L_c(E,F), \|\cdot\|_{L_c(E,F)})$ est un espace de Banach dès que $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach.

Preuve : On vérifie facilement que $\|\cdot\|_{L_c(E,F)}$ est bien une norme. On montre que $(L_c(E,F), \|\cdot\|_{L_c(E,F)})$ est un espace de Banach dès que $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach. On considère $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L_c(E,F)$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall p, q \geq N \ , \ \|f_p - f_q\|_{L_c(E,F)} < \varepsilon \ . \qquad (1)$$

Preuve suite : En particulier, par définition même de $\|\cdot\|_{L_c(E,F)}$, on obtient avec (1) que

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall p, q \geq N \ , \ \forall x \in E \ ,$$
$$\|f_p(x) - f_q(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E \qquad (2)$$

La suite $(f_n(x))_n$ est donc de Cauchy dans $(F, \|.\|_F)$. Comme $(F, \|.\|_F)$ est un espace de Banach, elle converge dans $(F, \|.\|_F)$. On note $f(x)$ sa limite, et comme x est quelconque dans E, on récupère une application $f : E \to F$. Pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\|f(x+\lambda y) - f(x) - \lambda f(y)\|_F \\
&= \|f(x+\lambda y) - f_n(x+\lambda y) + f_n(x) + \lambda f_n(y) - f(x) - \lambda f(y)\|_F \\
&\leq \|f(x+\lambda y) - f_n(x+\lambda y)\|_F + \|f_n(x) - f(x)\|_F + |\lambda|\|f_n(y) - f(y)\|_F
\end{aligned}$$

pour tout n, puisque f_n est linéaire. En faisant tendre $n \to +\infty$, on voit que f est bien linéaire, à savoir que

$$f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

pour tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$. En faisant tendre $p \to +\infty$ dans (2), avec q et ε fixés, par exemple $\varepsilon = 1$ et $q = N$, on voit aussi

Preuve suite et fin : que pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}\|f(x)\|_F &= \|f(x) - f_q(x) + f_q(x)\|_F \\ &\leq \varepsilon \|x\|_E + \|f_q(x)\|_F \\ &\leq \left(\|f_q\|_{L_c(E,F)} + \varepsilon\right) \|x\|_E \ .\end{aligned}$$

En particulier, f est continue sur E. Reste à montrer que $(f_n)_n$ converge vers f dans $(L_c(E,F), \|\cdot\|_{L_c(E,F)})$. Pour cela on revient à (2), on fait tendre q vers l'infini, et on prend ensuite le supremum sur les $x \in E \setminus \{0\}$ dans la conclusion de (2). Alors

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall p \geq N \ , \ \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f_p(x) - f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \varepsilon \quad (3)$$

et puisque $\varepsilon > 0$ est quelconque, (3) n'exprime rien d'autre que la convergence de la suite $(f_n)_n$ vers f dans $(L_c(E,F), \|\cdot\|_{L_c(E,F)})$, à savoir une relation du type

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall p \geq N \ , \ \forall x \in E \ , \ \|f_p - f\|_{L_c(E,F)} < \varepsilon \ .$$

L'espace $(L_c(E,F), \|\cdot\|_{L_c(E,F)})$ est un espace de Banach. CQFD.

A titre de remarque, on a aussi

$$\|f\|_{L_c(E,F)} = \sup_{\{x \in E \ / \ \|x\|_E \leq 1\}} \|f(x)\|_F$$

ou encore

$$\|f\|_{L_c(E,F)} = \sup_{\{x \in E \ / \ \|x\|_E = 1\}} \|f(x)\|_F \ .$$

En fait $\|f\|_{L_c(E,F)}$ est le plus petit des réels M pour lesquels $\|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$ pour tout x.

Une autre remarque importante mais simple à démontrer est que la composée d'applications linéaires continues est encore une application linéaire continue. Le résultat se démontre en écrivant que si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont linéaires, alors pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} \|g \circ f(x)\|_G &\leq \|g\|_{L_c(F,G)} \|f(x)\|_F \\ &\leq \|g\|_{L_c(F,G)} \|f\|_{L_c(E,F)} \|x\|_E \ . \end{aligned}$$

En particulier, on voit que

$$\|g \circ f\|_{L_c(E,G)} \leq \|g\|_{L_c(F,G)} \|f\|_{L_c(E,F)} \ .$$

6. Applications multilinéaires continues

On considère $E_1, \ldots, E_n, F$ des espaces vectoriels. On considère aussi

$$f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$$

une application de $E_1 \times \ldots E_n$ dans F. L'application f est dite multilinéaire si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables. En d'autres termes, f est multilinéaire si pour tout point $(a_1, \ldots, a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, et tout $i = 1, \ldots, n$, les applications partielles $f_i = E_i \to F$ définies par

$$f_i(x) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

sont linéaires en tant qu'applications de E_i dans F. Si $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), \ldots, (E_n, \|\cdot\|_{E_n})$ sont des espaces vectoriels normés, on place sur $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ l'une des deux normes équivalentes

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_{E_i}^2} \quad \text{ou} \quad \|X\|' = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_{E_i} \qquad (\star)$$

où $X = (x_1, \ldots, x_n)$. Elles sont équivalentes, comme on le voit par exemple en montrant la double inégalité

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_{E_i} = \langle (\|x_i\|_{E_i})_i, (1)_i \rangle_{\mathbb{R}^n} \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_{E_i}^2} \text{ , et}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_{E_i}^2} \leq \sqrt{n} \max_i \|x_i\|_{E_i} \leq \sqrt{n} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_{E_i}$$

de sorte que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|X\| \leq \|X\|' \leq \sqrt{n} \|X\|$$

pour tout $X = (x_1, \ldots, x_n)$ dans $E_1 \times \cdots \times E_n$.

Théorème

Soient $(E_1, \|\cdot\|_1)$,*...*, $(E_n, \|\cdot\|_n)$, *et* $(F, \|\cdot\|_F)$ *des espaces vectoriels normés. Soit aussi* $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ *une application multilinéaire. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est continue en tout point de* $E_1 \times \cdots \times E_n$,

(ii) f *est continue à l'origine* $(0, \ldots, 0)$ *de* $E_1 \times \cdots \times E_n$,

(iii) $\exists M > 0$ *tel que* $\|f(x_1, \ldots, x_n)\|_F \leq M\|x_1\|_1 \times \cdots \times \|x_n\|_n$

pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, *où la norme placée sur* $E_1 \times \cdots \times E_n$ *qui sert à définir la continuité est l'une des normes équivalentes* $(\star)$.

Preuve : Comme dans le cas linéaire on montre que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i). Déjà, il est clair que (i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons maintenant (ii). Alors

Preuve suite :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \eta > 0 \ / \ \forall (x_1, \dots, x_n), \|(x_1, \dots, x_n)\| < \eta$$
$$\Rightarrow \|f(x_1, \dots, x_n)\|_F < \varepsilon$$

où, par exemple, $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i$. On fixe $\varepsilon = 1$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ un point quelconque de $E_1 \times \cdots \times E_n$. Si l'un des x_i est nul, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ (car $f(0) = 0$ pour une application linéaire), et (iii) est trivialement vérifié par $(x_1, \dots, x_n)$. On suppose maintenant que $x_i \neq 0$ pour tout i. Le point $(y_1, \dots, y_n)$ défini par $y_i = \frac{\eta}{2n\|x_i\|_i} x_i$ est alors tel que $\|(y_1, \dots, y_n)\| < \eta$. En particulier, $\|f(y_1, \dots, y_n)\|_F \leq 1$, et puisque f est multilinéaire,

$$f(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{\eta}{2n}\right)^n \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_i} f(x_1, \dots, x_n) \ .$$

On a ainsi obtenu que

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\|_F \leq \left(\frac{2n}{\eta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_i$$

pour tout point $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. Donc (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Preuve suite : Pour finir on suppose (iii). Soient aussi $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ deux points de $E_1 \times \cdots \times E_n$. On écrit que

$$\begin{aligned} & f(y_1, \dots, y_n) - f(x_1, \dots, x_n) \\ & = f(y_1 - x_1, y_2, \dots, y_n) + f(x_1, y_2 - x_2, y_3, \dots, y_n) \\ & + \cdots + f(x_1, \dots, x_{n-1}, y_n - x_n) \ . \end{aligned}$$

Par exemple, lorsque $n = 2$,

$$f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2) = f(y_1 - x_1, y_2) + f(x_1, y_2 - x_2) \ .$$

On fixe $X = (x_1, \dots, x_n)$. Si $\|Y - X\| \le 1$, alors $\|y_i\|_i \le 1 + \|x_i\|_i$ pour tout i, et il existe ainsi $K > 0$, $K = 1 + \max_i \|x_i\|_i$, tel que $\|x_i\|_i \le K$ et $\|y_i\|_i \le K$ pour tout i. Par suite, par inégalité triangulaire, et d'après (iii),

$$\begin{aligned} \|f(y_1, \dots, y_n) - f(x_1, \dots, x_n)\|_F & \le MK^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \|y_i - x_i\|_i \\ & = MK^{n-1} \|Y - X\| \end{aligned}$$

Preuve suite et fin : Il s'ensuit facilement que

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \eta > 0 \ / \ \forall Y, \|Y - X\| < \eta \Rightarrow \|f(Y) - f(X)\|_F < \varepsilon \ .$$

Il suffit de choisir η tel que $\eta \leq 1$ et $\eta < \varepsilon / MK^{n-1}$. Donc (iii) $\Rightarrow$ (i). Le théorème est démontré. CQFD.

Etant donnés $(E_1, \|\cdot\|_1)$,. . ., $(E_n, \|\cdot\|_n)$, et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés, on note $L_c(E_1, \ldots, E_n; F)$ l'espace des applications multilinéaires continues de $E_1, \ldots, E_n$ dans F. L'espace hérite d'une norme définie par

$$\|f\|_{L_c(E_1,\ldots,E_n;F)} = \sup_{x_i \in E_i, \|x_i\|_i \leq 1} \|f(x_1, \ldots, x_n)\|_F \ .$$

On a alors que

$$\|f(x_1, \ldots, x_n)\|_F \leq \|f\|_{L_c(E_1,\ldots,E_n;F)} \|x_1\|_1 \times \cdots \times \|x_n\|_n$$

pour tous $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.

Une définition équivalente de $\|f\|_{L_c(E_1,\ldots,E_n;F)}$ est qu'il s'agit du plus petit des réels positifs M pour lesquels

$$\|f(x_1,\ldots,x_n)\|_F \leq M\|x_1\|_1 \times \cdots \times \|x_n\|_n$$

pour tous $(x_1,\ldots,x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. On pourra vérifier que le résultat suivant a lieu. Il se démontre comme dans le cas des applications linéaires.

Théorème

Soient $(E_1, \|\cdot\|_1)$,…, $(E_n, \|\cdot\|_n)$, et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés. L'espace $\left(L_c(E_1,\ldots,E_n;F), \|\cdot\|_{L_c(E_1,\ldots,E_n;F)}\right)$ est un espace de Banach dès que $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach.

7. L'isométrie naturelle de $L_c(E, L_c(F, G))$ avec $L_c(E, F; G)$.

On commence par définir ce qu'est une isométrie vectorielle entre espaces vectoriels normés. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et f une application linéaire de E dans F. On dit que f est une isométrie vectorielle de $(E, \|\cdot\|_E)$ sur $(F, \|\cdot\|_F)$ si :

(i) f est un isomorphisme de E sur F, et

(ii) $\|f(x)\|_F = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$.

En d'autres termes, une isométrie vectorielle est un isomorphisme qui présèrve les normes. Bien sûr f est continue (car, en particulier, $\|f(x)\|_F \leq \|x\|_E$ pour tout x), et f^{-1} présèrve aussi les normes (i.e $\|f^{-1}(y)\|_E = \|y\|_F$ pour tout y). En particulier, f^{-1} est continue, et f est un isomorphisme bi-continu (qui présèrve les normes).

Théorème

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, *et* $(G, \|\cdot\|_G)$ *trois espaces vectoriels normés. L'application*

$$\Phi : L_c(E, F; G) \to L_c(E, L_c(F, G))$$

qui à $f \in L_c(E, F; G)$ *associe* $\Phi(f) \in L_c(E, L_c(F, G))$, *définie par*

$$\big(\Phi(f)(x)\big)(y) = f(x, y)$$

pour tout $x \in E$ *et tout* $y \in F$, *est une isométrie vectorielle de* $(L_c(E, F; G), \|\cdot\|_{L_c(E,F;G)})$ *sur* $(L_c(E, L_c(F, G)), \|\cdot\|_{L_c(E,L_c(F,G))})$. *En particulier, via* Φ, *l'espace* $L_c(E, F; G)$ *s'assimile naturellement à l'espace* $L_c(E, L_c(F, G))$.

On vérifie facilement que Φ est bien bijective et que l'application réciproque de Φ est l'application

$$\Phi^{-1} : L_c(E, L_c(F, G)) \to L_c(E, F; G)$$

qui à $f \in L_c(E, L_c(F, G))$ associe $\Phi^{-1}(f) \in L_c(E, F; G)$ définie par

$$\Phi^{-1}(f)(x, y) = \big(f(x)\big)(y)$$

pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$.

On démontre maintenant le théorème.

Preuve : On commence par montrer que Φ et Φ^{-1} sont bien définies. Soit f fixée, $f \in L_c(E, F; G)$. Clairement, puisque f est bilinéaire, $\Phi(f)(x) \in L(F, G)$ (i.e $\Phi(f)(x)$ est linéaire de F dans G) où $\big(\Phi(f)(x)\big)(y) = f(x, y)$. De même, on vérifie facilement que $\Phi(f) \in L(E, L(F, G))$. Comme f est continue,

$$\|f(x, y)\|_G \leq \|f\|_{L_c(E,F;G)} \|x\|_E \|y\|_F \ .$$

On en déduit que

$$\|\left(\Phi(f)(x)\right)(y)\|_G \leq \big(\|f\|_{L_c(E,F;G)} \|x\|_E\big) \|y\|_F \ .$$

Preuve suite et fin : et donc que $\Phi(f)(x) \in L_c(F,G)$, avec

$$\|\Phi(f)(x)\|_{L_c(F,G)} \leq \|f\|_{L_c(E,F;G)}\|x\|_E \ .$$

Ensuite, on tire de cette inégalité que $\Phi(f) \in L_c((E, L_c(F,G))$ et que

$$\|\Phi(f)\|_{L_c((E,L_c(F,G))} \leq \|f\|_{L_c(E,F;G)} \ . \qquad (\star)$$

Donc Φ est bien une application de $L_c(E,F;G)$ dans $L_c(E, L_c(F,G))$. Clairement, Φ est linéaire en f. Avec $(\star)$ on récupère alors que Φ est continue et que $\|\Phi\| \leq 1$. De la même façon on montre que Φ^{-1} est bien définie, qu'elle est linéaire continue, et que $\|\Phi^{-1}\| \leq 1$. Comme par ailleurs $\Phi \circ \Phi^{-1} = Id$, en passant aux normes, on trouve que

$$1 \leq \|\Phi^{-1}\| \times \|\Phi\| \ .$$

Du coup, $\|\Phi\| = 1$ et $\|\Phi^{-1}\| = 1$. En écrivant que

$$\|f\|_{L_c(E,F;G)} = \|\Phi^{-1}\big(\Phi(f)\big)\|_{L_c(E,F;G)} \leq \|\Phi^{-1}\| \times \|\Phi(f)\|_{L_c(E,L_c(F,G))} \ ,$$

on en déduit que $\|\Phi(f)\|_{L_c(E,L_c(F,G))} = \|f\|_{L_c(E,F;G)}$ et donc que Φ est bien une isométrie vectorielle. CQFD.