Calcul Différentiel Avancé

par
Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise
Année 2017-2018

Introduction
Une même histoire dans différents contextes

Calcul différentiel dans $\mathbb{R}$.
Fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$\nwarrow \nearrow$
$+$ Topologie
$\swarrow \searrow$

$\downarrow$

Calcul différentiel pour les applications
de plusieurs variables réelles.
Applications $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.

$\swarrow$ $\searrow$

Calcul différentiel dans les espaces de Banach. Applications $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$.

Calcul différentiel sur des patatoïdes.
Applications $f : M \to N$.
Géométrie Différentielle.

$\downarrow$

Eléments de Géométrie riemannienne.

Chapitre 1
Fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. Fonctions continues

Définition

Soit $D \subset \mathbb{R}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur D. Soit $a \in D$ un point de D. On dit que f est continue au point a si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in D, |x - a| < \eta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$,

(iii) pour toute suite $(x_n)_n$ de points de D vérifiant que $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$, on a forcément que $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$.

On dit que f est continue sur D lorsque f est continue en tout point de D.

(1) La limite dans (i) s'entend pour les $x \in D$, le domaine de définition de la fonction (il est toujours sous entendu que la fonction est inconnue et non définie en dehors de son domaine de définition D même si, dans les faits, il peut arriver qu'on la connaisse en dehors de D, par exemple parce qu'elle provient d'une formule explicite).
(2) Dans le cas où $D = [a, b]$ cette définition inclue les notions de continuité à droite en a et de continuité à gauche en b.
(3) Intuitivement la continuité d'une fonction réelle sur un intervalle signifie que l'on peut tracer le graphe de cette fonction "sans lever la main".
(4) On vérifie facilement avec (i) que si f et g sont deux continues en un point a, alors $f + g$, fg et $\frac{f}{g}$ (dès lors que $g(a) \neq 0$) sont aussi continues en a. De même si f est continue en a, et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.
(5) Les fonctions x^n, $\cos$, $\sin$, $\exp$, $\ln$, etc. sont continues (là où elles sont définies).

Preuve de l'équivalence de (i)-(iii) dans la définition : Le point (ii) est la traduction mathématique exacte du point (i). Par définition (i) et (ii) sont équivalents. Montrons maintenant l'équivalence de (i) et (iii). Il est déjà clair que (i) $\Rightarrow$ (iii). Supposons en effet (i) et soit $(x_n)_n$ une suite de points de D qui converge vers a. Alors $(x_n)_n$ est aussi proche que l'on veut de a pourvu que n soit suffisamment grand tandis que $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de $f(a)$ pourvu que x soit suffisamment proche de a. On en déduit facilement que $f(x_n)$ est aussi proche que l'on veut de $f(a)$ pourvu que n soit suffisamment grand. D'où l'affirmation que (i) implique (iii).

Preuve suite : Réciproquement supposons (iii) et montrons (i). Comme (i) et (ii) sont équivalentes, on peut se “borner” à montrer que (iii) $\Rightarrow$ (ii). Pour cela on va raisonner par l'absurde. On suppose donc à la fois (iii) et le contraire de (ii), à savoir :

$$\exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall \eta > 0, \exists x \in D \text{ vérifiant } |x-a| < \eta \text{ et } |f(x)-f(a)| \geq \varepsilon \ .$$

On se donne une suite $(\varepsilon_n)_n$ de réels strictement positifs qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Pour tout n on pose $\eta = \varepsilon_n$. On obtient alors une suite $(x_n)_n$ de points de D qui vérifie

$$\begin{cases} 0 \leq |x_n - a| < \varepsilon_n \ , \\ |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon \ , \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. La première de ces deux relations entraîne que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a \ .$$

Preuve fin : En ayant supposé (iii) cela implique que

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a) \ .$$

Mais cette dernière affirmation est en désaccord total avec la seconde équation du système précédent. D'où une contradiction et on a bien que (iii) $\Rightarrow$ (ii). Les trois affirmations de la définition sont bien équivalentes. CQFD

Proposition (Une application de la continuité)

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et continue sur I, et $a < b$ deux points de I. On suppose que f change de signe en a et b et donc que $f(a)f(b) < 0$. Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Preuve : Supposons que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Notons

$$J = \left\{ t \in [a, b] \ / \ \forall t' \in [a, t], f(t') < 0 \right\} \ .$$

Clairement J est un sous intervalle non vide ($a \in J$) de I. Notons c la borne droite de J. On a $a < c < b$ puisque

(i) $f(a) < 0$ et la continuité de f en a entraînent que $f < 0$ dans un intervalle du type $[a, a + \varepsilon]$, et donc $[a, a + \varepsilon] \subset J$,

(ii) $f(b) > 0$ et la continuité de f en b entraînent que $f > 0$ dans un intervalle du type $[b - \varepsilon, b]$ pour $0 < \varepsilon \ll 1$.

Preuve suite et fin : Par continuité de f en c :

(iii) si $f(c) < 0$ alors $f < 0$ dans un intervalle du type $[c, c+\varepsilon]$

(iv) si $f(c) > 0$ alors $f > 0$ dans un intervalle du type $[c-\varepsilon, c]$.

Dans le premier cas c ne serait pas la borne droite de J car on aurait en fait $[a, c+\varepsilon] \subset J$. Dans le second cas c ne serait toujours pas la borne droite de J car cette fois-ci on aurait $J \subset [a, c-\varepsilon]$. Donc, forcément, $f(c) = 0$. CQFD

(i) Il y a cachée derrière cette preuve une notion topologique importante : la connexité (les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes et les connexes de $\mathbb{R}$ sont des intervalles). Le résultat est trivialement faux si on ne suppose plus que I est un intervalle (penser au graphe de la fonction inverse $x \to \frac{1}{x}$ sur $I =]-\infty, 0[\bigcup]0, +\infty[$.
(ii) Le résultat est intuitif. Dans le tracé du graphe de f, si on part d'un point $(a, f(a))$ avec $f(a) < 0$ pour rejoindre un point $(b, f(b))$ avec $f(b) > 0$, et s'il est interdit de lever la main, alors il faudra bien couper l'axe des x à un moment. A noter : rien n'interdit de le couper plusieurs fois. La preuve ci-dessus fournit en fait la première abscisse en partant de a où f s'annule.

Théorème (Topologie et continuité (suite))

Soient $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et continue sur I. Alors f est bornée sur I et f admet un point de maximum et un point de minimum sur I.

Preuve : Cette fois-ci c'est la notion de compacité qui se cache derrière ce résultat. Les intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$ sont des compacts et donc (en topologie métrique) des ensembles ayant la propriété que toute suite de points dans l'ensemble possède une sous suite convergente). Montrons par exemple que f et majorée et possède un point de maximum dans $[a, b]$. Notons

$$M = \text{borne sup}\{f(x), x \in [a, b]\} \ .$$

On note traditionnellement $M = \sup_{x \in I} f(x)$. Par définition M est le plus petit des majorants de l'ensemble $\{f(x), x \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}$ (et possiblement, à ce stade de la preuve, on pourrait avoir $M = +\infty$). On a alors

(i) $\forall x \in [a, b],\ f(x) \leq M$

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in I$ avec $M - \varepsilon \leq f(x) \leq M$ si $M < +\infty$

(iii) $\forall R > 0$, $\exists x \in I$ avec $f(x) \geq R$ si $M = +\infty$.

Prenons une suite $(\varepsilon_n)_n$ de réels strictement positifs qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Preuve suite et fin : En prenant $\varepsilon = \varepsilon_n$ dans le cas (ii), et $R = \frac{1}{\varepsilon_n}$ dans le cas (iii), et ce pour tout n, on obtient immédiatement une suite $(x_n)_n$ de points de I qui vérifie que

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = M \ .$$

Comme I est fermé borné, il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})_n$ de $(x_n)_n$ qui est convergente. Notons $\overline{x}$ sa limite de sorte que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)} = \overline{x}$. Toute sous suite d'une suite convergente étant convergente et de même limite, on a aussi que

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = M \ .$$

Comme f est continue (en particulier en $\overline{x}$) on peut écrire (voir la première définition) que $\lim_{n \to +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(\overline{x})$. D'où $f(\overline{x}) = M$. En particulier $M < +\infty$ et, avec (i), le théorème est démontré. CQFD

Un autre résultat fréquemment associé à la compacité : si $I = [a, b]$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle définie et continue sur I, alors f est en fait uniformément continue sur I.

Corollaire

Soient $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et continue sur I. On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors soit il existe $c \in]a, b[$ un point où f atteint son minimum, soit il existe $d \in]a, b[$ un point où f atteint son maximum, soit les deux.

Preuve : Si f est constante la dernière situation est trivialement satisfaite (tous les points de l'intervalle sont à la fois des points de minimum et de maximum). Supposons que f n'est pas constante. D'après le théorème sur fonctions continues et compacité, il existe $c, d \in [a, b]$ tels que

$$f(c) = \inf_{x \in I} f(x) \quad \text{et} \quad f(d) = \sup_{x \in I} f(x) \ .$$

On ne peut avoir simultanément $c, d \in \{a, b\}$ puisque $f(a) = f(b)$ et f n'est pas constante. Donc soit $c \in \{a, b\}$ et alors $d \in]a, b[$, soit $d \in \{a, b\}$ et alors $c \in]a, b[$, soit encore $c, d \in]a, b[$. D'où le corollaire. CQFD

Définition

Soient $I =]a, b[$ *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$, $c \in]a, b[$ *un point de* I, *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction réelle définie sur* I. *On dit que* f *est dérivable au point* c *si le quotient*

$$Q(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

admet une limite lorsque x *tend vers* c *(par valeurs différentes). Lorsque cette limite existe elle et bien sûr unique, on la note* $f'(c)$ *et on dit que* $f'(c)$ *est la dérivée de* f *en* c. *La fonction* f *est dite dérivable sur* I *lorsqu'elle est dérivable en tout point de* I.

(1) "Par valeurs différentes" signifie que l'on s'interdit de prendre $x = a$ dans les x tendant vers a (pour ne pas diviser par zéro). On écrit

$$\lim_{x \to a, x \neq a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \ ,$$

mais il faudra bien se souvenir qu'il n'est absolument pas obligé que le quotient Q ait une limite lorsque x tend vers a (par valeurs différentes). Dans ce cas la fonction n'est tout simplement pas dérivable au point a.
(2) L'écriture mathématique de la limite ci-dessus est la suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in I \setminus \{a\}, |x - a| < \eta \ \Rightarrow$$
$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < \varepsilon \ .$$

(3) On vérifie facilement que si f et g sont deux fonctions dérivables en a, alors $f+g$ et fg sont aussi dérivables en a. On a trivialement que $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$. En remarquant que

$$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \ ,$$

en en anticipant sur le théorème qui suit (dérivable $\Rightarrow$ continue) on voit que

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \ .$$

De la même façon, si f et g sont dérivable en a et si $g(a) \neq 0$, alors on peut montrer que $\frac{f}{g}$ est dérivable en a de dérivée

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2} \ .$$

Enfin si f est dérivable en a, et g est dérivable en $f(a)$, alors on peut montrer que $g \circ f$ est dérivable en a de dérivée

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a) \ .$$

(4) Pour finir on a les formules uselles de dérivées $(x^n)' = nx^{n-1}$, $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$, $\exp' = \exp$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, $\tan' = 1 + \tan^2$, etc.

Théorème

Si une fonction est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point.

Preuve : Si f est dérivable en a alors le quotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite réelle lorsque $x \to a$. Or $x - a \to 0$ lorsque $x \to a$. Il est donc nécessaire pour que le quotient ait une limite réelle (et non pas $\pm\infty$) que l'on ait aussi que $f(x) - f(a) \to 0$ lorsque $x \to a$. En particulier

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \ ,$$

et cela signifie précisément (voir la première Définition) que f est continue au point a. CQFD

Théorème

Si une fonction admet un extremum local en un point, et est dérivable en ce point, alors sa dérivée en ce point est forcément nulle.

On dit encore que les extremums locaux d'une fonction dérivable sont forcément des (à rechercher parmi les) points critiques de de cette fonction. Par définition les points critiques d'une fonction dérivable f sont les x pour lesquels $f'(x) = 0$. Rappelons qu'une fonction f admet un extremum local en un point a si elle admet soit un minimum soit un maximum local en a, et rappelons que f admet un minimum local en a (resp. un maximum local en a) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que f est minimale (resp. maximale) en a sur $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

Preuve : Supposons que f a un minimum local en a et que f est dérivable en a. Alors $f(x) - f(a) \geq 0$ pour x proche de a. D'un autre côté,

$$f'(a) = \lim_{x \to a, x \neq a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ ,$$

et le dénominateur $x - a$ change de signe selon que x tende vers a en restant à la gauche de a, ou que x tende vers a en restant à la droite de a. On a donc pour Q (selon que l'on fasse tendre x vers a en restant à la gauche de a ou en restant à la doite de a) des quotients du type

$$Q = \frac{\text{quantité positive ou nulle}}{\text{quantités tantôt positives tantôt négatives}}$$

et donc $f'(a)$ devrait être à la fois négative ou nulle et positive ou nulle. La seule possibilité est que $f'(a) = 0$. Le théorème est démontré. CQFD

3.Le théorème des accroissements finis. Une conséquence simple de ce qui a été dit

Théorème (Le théorème des accroissement finis)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction rélle continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Preuve : On définit la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = (f(b) - f(a))(x - a) - (b - a)(f(x) - f(a))$$

Alors g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et elle vérifie que

$$g(a) = g(b) = 0 \ .$$

La remarque faite au Corollaire de la Section 1 donne alors l'existence d'un point $c \in]a, b[$ où g est extrémale. Donc, d'après le Théorème sur les extremums de la Section 2, $g'(c) = 0$. Or $g'(c) = f(b) - f(a) - (b - a)f'(c)$. D'où le théorème des accroissements finis. CQFD

4. Dérivées d'ordre supérieur

Dans le cas des fonctions rélles d'une variable réelle les dérivées d'ordre supérieur se définissent en boucle par la formule de récurrence

$$f^{(n)}(a) = \left(f^{(n-1)}\right)'(a) \ ,$$

à savoir la dérivée $n$ième de f au point a = la dérivée au point a de la dérivée $(n-1)$ième de f. En particulier $f''(a) = (f')'(a)$ (on note traditionnellement plutôt f'' que $f^{(2)}$, mais à partir de la dérivée troisième on va plutôt trouver les notations $f^{(3)}$, $f^{(4)}$, etc.)

Définition

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$ un point de I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On dit que f est deux fois dérivable au point a, et on note $f''(a)$ la dérivée seconde de f en a, si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ (donnée par l'hypothèse que f est dérivable sur I) est elle-même dérivable en a. On a alors $f''(a) = (f')'(a)$. On dit que f est deux fois dérivable sur I si f' est dérivable en tout point de I. On récupère alors une fonction $f'' : I \to \mathbb{R}$ à partir de laquelle on peut définir la notion de dérivée troisième, etc. Une fonction qui est n-fois dérivable sur I et dont la dérivée d'ordre n est continue sur I est dite de classe C^n.

(i) Dans cette théorie, savoir dériver une fois suffit pour savoir dériver autant de fois que l'on veut.
(ii) Si f est n fois dérivable sur I, et puisque dérivable $\Rightarrow$ continue, les fonctions f, f', f'', $f^{(3)}$, ..., $f^{(n-1)}$ sont automatiquement continues sur I. Par convention $f^{(0)} = f$.

5.Formules de Taylor. Une conséquence simple du Théorème des accroissements finis.

Théorème (Formule de Taylor-Lagrange)

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $(n+1)$ fois dérivable sur I (donc en particulier de classe C^n sur I). Pour tous points $a < b$ de I il existe une point $c \in]a, b[$ pour lequel

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!}f^{(3)}(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \ ,$$

où les $f^{(k)}$ sont les dérivées $k$ièmes de f.

Lorsque $n = 0$ on retrouve tout simplement le théorème des accroissements finis.

Preuve : On procède comme dans le cas du théorème des accroissements finis avec la construction d'une fonction "astucieuse". On pose

$$C = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) ,$$

avec la convention $X^0 = 1$ quelque soit X. On définit ensuite la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} C .$$

On a alors

$$g(a) = g(b) = f(b)$$

et donc, en vertue du Corollaire de la Section 1 et du Théorème sur les extremums de la Section 2, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Preuve suite et fin : Or

$$\begin{aligned}
g'(x) = &- \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^{(k-1)}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) \\
&- \frac{(b-x)^n}{n!} C \\
= &- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) \\
&- \frac{(b-x)^n}{n!} C \\
= &\frac{(b-x)^n}{n!} \left(f^{(n+1)}(x) - C \right) \ .
\end{aligned}$$

Ainsi il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n+1)}(c) = C$, et c'est bien la formule de Taylor-Lagrange qui était à démontrer. CQFD.

Théorème (Formule de Taylor-Young)

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$ un point de I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de $(n-1)$-fois dérivable sur I et n fois dérivable en a. Alors pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f^{(3)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \ ,$$

où la fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ est telle que $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Cette formule à l'apparence très savante ne dit rien d'autre que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}{(x-a)^n} = 0 \ ,$$

l'égalité du théorème définissant de fait la fonction ε *comme le quotient dans la limite ci-dessus. C'est le fait que* $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ *qui "dit" quelque chose.*

Preuve : On démontre la formule sous l'hypothèse plus forte que f est de classe C^n sur I. Avec la formule de Taylor-Lagrange du Théorème précédent on voit que

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)\right) \ ,$$

où pour chaque x, $a < c_x < x$ ou $x < c_x < a$ selon que x est à gauche de a ou pas. L'hypothèse que $f^{(n)}$ est continue entraîne que $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ puisque si $x \to a$ alors $c_x \to a$ par l'encadrement même de c_x. D'où la formule de Taylor-Young. CQFD.

Appendice A : Dérivées et analyse - Croissance et décroissance

Théorème

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. La fonction f est décroissante (resp. croissante) sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I (resp. $f' \geq 0$ sur I).

Là encore la notion de connexité se cache derrière ce résultat. Le résultat est évidemment faux si on ne se place plus sur un intervalle. Là encore il suffit de penser à la fonction inverse sur $]-\infty, 0[\bigcup]0, +\infty[$.

Preuve : Traitons le cas de la croissance (on passe de croissante à décroissante en changeant f en $-f$). Supposons que $f' \geq 0$ sur I. Soient $a < b$ deux points de I. Avec la formule des accroissements finis il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

et comme $f' \geq 0$ sur I on $f'(c) \geq 0$ soit $f(a) \leq f(b)$. Comme $a < b$ sont quelconques, f est croissante. Réciproquement, si f est croissante, comme pour tout $c \in I$

$$f'(c) = \lim_{x \to c, x \neq c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \, ,$$

on constate que $f'(c) \geq 0$ pour tout c en remarquant que $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ pour tout $x \neq c$ (si $x > c$ on a du "positif sur positif" et si $x < c$ on a du "négatif sur négatif", donc encore du positif). CQFD

Un grand "classique" de l'étude des fonctions réelles d'une variable réelle est la recherche d'extremums locaux. On sait déjà que ceux-ci sont à rechercher parmi les points critiques (cf. ci-dessus).

Théorème (Condition nécessaire 1)

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Les extremums locaux de f sont des points critiques de f.

Intuitivement on a envie de dire qu'en un point de maximum local c la fonction f va être croissant un peu avant c puis décroissante un peu après, et qu'en un point de minimum local la fonction f va être décroissante un peu avant ce point puis croissante un peu après. Autant il est clair que si f et décroissante un peu avant c puis croissante un peu après c alors elle va avoir un minimum local en c, autant la réciproque, que l'on trouve pourtant dans plusieurs livres, est loin d'être évidente (même chose bien sûr avec les maximums locaux) ... Et pour cause : cette réciproque est fausse.

Proposition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = x^4 \sin^2(\frac{1}{x})$$

si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. La fonction f est C^1 sur $\mathbb{R}$, elle admet un minimum en 0, et pourtant sa dérivée change constamment de signe à droite de 0, et cela aussi proche que l'on soit de 0.

Preuve : On commence par montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}$, la dérivée en tout point $x \neq 0$ étant donnée par la formule

$$f'(x) = 4x^3 \sin^2(\frac{1}{x}) - 2x^2 \sin(\frac{1}{x}) \cos(\frac{1}{x}) \ . \tag{0.1}$$

et la dérivée en 0 étant donnée par $f'(0) = 0$. La formule pour $x \neq 0$ s'obtient facilement par calcul à partir des règles de dérivation (pour les produits, les puissances, etc.) En 0 on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^3 \sin^2(\frac{1}{x})$$

et comme pour tout x, $-1 \leq \sin^2(\frac{1}{x}) \leq +1$, on en déduit que

$$\lim_{x \to 0, x \neq 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \ ,$$

ce qui prouve que f est bien dérivable en 0 (la limite existe) et que $f'(0) = 0$. Pour ce qui est de la continuité de la dérivée elle suit des règles élémentaires lorsque $x \neq 0$.

Preuve suite : Le seul problème possible est la continuité de f' en 0. Les fonctions sinus et cosinus étant bloquées entre -1 et $+1$, il suit de (0.1) que

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0) \; .$$

Donc f' est continue en 0.

On remarque maintenant que f admet un minimum en 0. C'est évident puisque $f \geq 0$ et $f(0) = 0$.

On montre pour finir que la dérivée de f change constamment de signe à droite de 0, et cela aussi proche que l'on soit de 0. Pour se faire, on va montrer qu'il existe deux suite $(x_k)_k$ et $(y_k)_k$ de points dans $\mathbb{R}^{+\star}$ (donc à droite de 0), qui tendent toutes deux vers 0 mais qui sont telles que $f'(x_k) < 0$ pour tout $k \gg 1$ (ie pour tout k grand) tandis que $f'(y_k) > 0$ pour tout $k \gg 1$.

Preuve suite encore : Pour démontrer l'existence de telles suites on reprend la formule (0.1) que l'on réecrit de la façon suivante :

$$f'(x) = 2x^2 \sin(\frac{1}{x}) \left(2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) \right) \ . \tag{0.2}$$

On définit alors les suites $(x_k)_k$ et $(y_k)_k$ par les équations

$$\frac{1}{x_k} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{et} \quad \frac{1}{y_k} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

pour $k \in \mathbb{N}$. Clairement $\lim_{k\to+\infty} x_k = 0$ et $\lim_{k\to+\infty} y_k = 0$ puisque $\lim_{k\to+\infty} 2k\pi = +\infty$. Pour $k \gg 1$, la fonction sinus étant toujours bloquée entre -1 et $+1$, à la fois $x_k \sin(\frac{1}{x_k})$ et $y_k \sin(\frac{1}{y_k})$ vont être très petits. On a par contre

$$\cos(\frac{1}{x_k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \cos(\frac{1}{y_k}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

pour tous k. Enfin, $\sin(\frac{1}{x_k}) > 0$ et $\sin(\frac{1}{y_k}) > 0$ pour tous k (les cosinus et sinus de $\pi/4$ sont tous deux positifs, le sinus de $3\pi/4$ est positif mais son cosinus est négatif).

Preuve suite et fin : En conclusion, comme on le voit sur (0.2),

$$f'(x_k) < 0 \;\; \text{et} \;\; f'(y_k) > 0$$

pour tous $k \gg 1$. CQFD.

L'étude classique des problèmes d'extremums consiste maintenant en deux théorèmes basés sur la formule de Taylor-Young à l'ordre deux.

Théorème (Précision)

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On suppose que f admet un extremum local au point c et que f est deux fois dérivable en c. Alors $f''(c) \geq 0$ s'il s'agit d'un minimum et $f''(c) \leq 0$ s'il s'agit d'un maximum.

Preuve : Comme f admet un extremum en c, forcément $f'(c) = 0$. Avec la formule de Taylor-Young à l'ordre deux on a alors que pour tout x (proche de c),

$$f(x) = f(c) + (x - c)^2 \left(\frac{1}{2} f''(c) + \varepsilon(x) \right) \ ,$$

où $\lim_{x \to c} \varepsilon(x) = 0$. Si f admet un minimum local au point c alors $f(x) \geq f(c)$ pour tout x proche de c. Donc

$$\frac{1}{2} f''(c) + \varepsilon(x) \geq 0$$

pour tout x proche de c, et en faisant tendre $x \to c$ on récupère que $f''(c) \geq 0$. Même genre de raisonnement bien sûr avec les extremums (on peut aussi changer f en $-f$), et le théorème est démontré. CQFD.

Un moyen mnémotechnique pour se souvenir du signe de $f''(c)$ en un extremum c est de penser à la fonction $f(x) = x^2$. Elle a un minimum en 0 et sa dérivée seconde $f''(0) = 2$ est positive. Donc "minimum $\to$ dérivée 2nde positive" et "maximum $\to$ dérivée 2nde négative".

Théorème (Condition suffisante)

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Soit $c \in I$ un point critique de f. On suppose que f est deux fois dérivable en c et que $f''(c) > 0$ (resp. $f''(c) < 0$). Alors f admet un minimum local strict (resp. un maximum local strict) au point c.

Par "minimum local strict" en c (resp. "maximum local strict" en c) on entend qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) > f(c)$ (resp. $f(x) < f(c)$) pour tout $x \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ avec $x \neq c$.

Preuve : Supposons par exemple $f''(c) > 0$. Comme c est un point critique de f, on obtient avec la formule de Taylor-Young à l'ordre deux que pour tout x (proche de c),

$$f(x) = f(c) + (x-c)^2 \left(\frac{1}{2} f''(c) + \varepsilon(x) \right) \ ,$$

où $\lim_{x \to c} \varepsilon(x) = 0$. Clairement, puisque $\lim_{x \to c} \varepsilon(x) = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]c-\eta, c+\eta[$, $|\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{4} f''(c)$. Mais alors, pour tout $x \in]c-\eta, c+\eta[$,

$$\frac{1}{2} f''(c) + \varepsilon(x) \geq \frac{1}{4} f''(c) > 0 \ ,$$

et donc $f(x) > f(c)$ pour tout $x \in]c-\eta, c+\eta[$ dès que $x \neq c$. D'où le théorème. CQFD