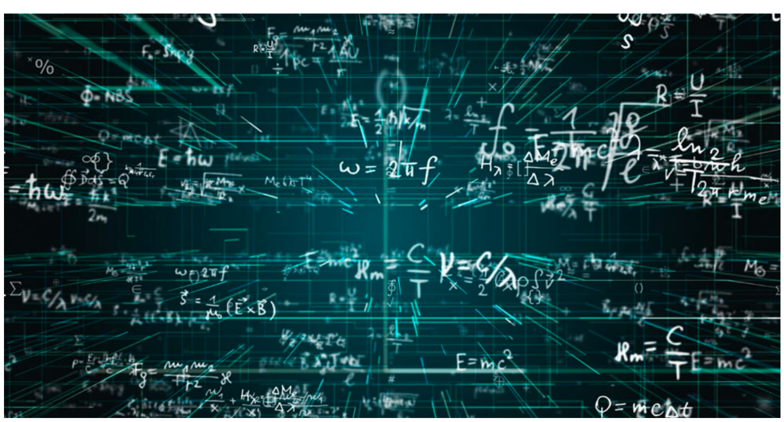
CAHIER D'EXERCICES CORRIGÉS
ALGÈBRE LINÉAIRE
ALGÈBRE BILINÉAIRE
INTÉGRATION

Licence L2
Emmanuel Hebey
Mars 2025



Contents

CHAPITRE 1

Algèbre linéaire 3 - Enoncés

Exercice 1.1. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels ?

1. $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+3z=0\}$.
2. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+3z=4\}$.
3. $E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy=0\}$.
4. $E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y=x^2\}$.

Exercice 1.2. On considère dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants (e_1, e_2, e_3, e_4). Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(e_1, 2e_2, e_3)$.
2. (e_1, e_3).
3. $(e_1, 2e_1+e_4, e_4)$.
4. $(3e_1+e_3, e_3, e_2+e_3)$.
5. $(2e_1+e_2, e_1-3e_2, e_4, e_2-e_1)$.

Exercice 1.3. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (4,1,4)$ et $v_3 = (2,-1,4)$.

1. Montrer que les familles (v_1, v_2), (v_1, v_3) et (v_2, v_3) sont libres.
2. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Exercice 1.4. Soit E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les familles $(\cos(x), \sin(x))$ et $(\cos(x), \sin(x), \sin(2x))$ sont libres.

Exercice 1.5. Soit E le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+2y-z=0\} \ .$$

Trouver une base de E.

Exercice 1.6. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par ses valeurs dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ par $f(e_1) = -2e_1+2e_3$, $f(e_2) = 3e_2$ et $f(e_3) = -4e_1+4e_3$.

1. Donner une base $\mathrm{Ker}(f)$. f est-il injectif ? Quel est son rang ?
2. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 1.7. Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que deux quelconques des propriétés suivantes entraînent la troisième.

1. $F \cap G = \{0\}$,
2. $F + G = E$,
3. $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Exercice 1.8. Soient F et G deux sous espaces vectoriels de dimension 3 de $\mathbb{R}^5$. La somme $F+G$ peut-elle être directe ?

Exercice 1.9. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient f, g deux endomorphismes de E tels que

$$E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) \ .$$

Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 1.10. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit f un endomorphisme de E tel que

$$f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_E = 0 \ ,$$

où Id_E est l'endomorphisme identité de E. Montrer que

$$\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$$

puis que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$.

Exercice 1.11. Soit A la matrice 3×3 donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et soit $B = A - \mathrm{Id}_3$. Calculer B^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.12.] Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donné par

$$T(M) = M - \mathrm{tr}(M)A \ ,$$

où $\mathrm{tr}(M)$ est la trace de M. Montrer que T est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 1$.

Exercice 1.13. Soient a, b des réels non nuls. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, à savoir qui vérifient que $AB = BA$.

Exercice 1.14. Soient (x_n), (y_n), (z_n) des suites réelles. On suppose x_0, y_0, z_0 donnés et que pour tout n,

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ y_{n+1} = 3y_n + z_n \\ z_{n+1} = 3z_n \end{cases} .$$

On pose X_n le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

(1) Ecrire le système sous la forme $X_{n+1} = AX_n$ pour une certaine matrice A que l'on explicitera. En déduire que $X_n = A^n X_0$.

(2) On pose $N = A - 3\mathrm{Id}_3$, où Id_3 est la matrice identité 3×3. Calculer les puissances N^p de N pour tout entier p.

(3) Montrer que pour tout n, $A^n = 3^n \mathrm{Id}_3 + 3^{n-1} n N + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-1} N^2$.

(4) Exprimer x_n, y_n et z_n en fonction de n, x_0, y_0 et z_0.

Exercice 1.15. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4)$ une base de F. On note $f, g \in L(E, F)$ les applications linéaires de E dans F définies par

$$\begin{aligned}
&f\big(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3\big) = \big(2x_1 + x_2 + x_3\big)\tilde{e}_1 + \big(4x_1 + 3x_3\big)\tilde{e}_2 \\
&\quad + \big(x_1 + 3x_2 + x_3\big)\tilde{e}_3 + \big(3x_1 + x_2 + 5x_3\big)\tilde{e}_4 \\
&g\big(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3\big) = \big(x_1 - x_2 + 3x_3\big)\tilde{e}_1 - \big(2x_1 + 3x_2 - x_3\big)\tilde{e}_2 \\
&\quad + \big(5x_1 - x_2\big)\tilde{e}_3 - (x_1 + x_2 - x_3)\tilde{e}_4
\end{aligned}$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

(1) Ecrire la matrice de représentation $M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$ de f dans $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$.

(2) Ecrire la matrice de représentation $M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(g)$ de g dans $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$.

Exercice 1.16. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la bases canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. En déduire que $A^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 1.17. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E. Soit $f \in \mathrm{End}(E)$ l'endomorphisme de E dont la matrice de représentation dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

(1) Que valent $f(e_1)$ et $f(e_2)$? Soit $a \in \mathbb{R}$. Que vaut $f(ae_1 + 17e_2)$?

(2) Déterminer le noyau et l'image de f.

(3) Soient $u = 2e_1 - e_2$ et $v = e_1 + e_2$. Montrer que (u, v) est une base de E. Que vaut la matrice de f dans cette base ?

(4) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des espaces supplémentaires.

Exercice 1.18. On considère les applications linéaires $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ données par $f(x, y, z) = (2x - z, 3x + y + 2z)$ pour tous $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, et par $g(x, y) = (x + y, -y, 2x - y)$ pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(1) Déterminer les matrices de représentation A et B de f et g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

(2) Calculer les matrices AB, BA et $(AB)^2$.

(3) Montrer que AB est inversible et déterminer $(AB)^{-1}$.

(4) Expliciter l'application $(f \circ g)^2$.

Exercice 1.19. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice de représentation dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On définit

$$\hat{e}_1 = e_2 + e_3, \hat{e}_2 = e_1 + e_3, \hat{e}_3 = e_1 + e_2$$

$$\hat{e}'_1 = \frac{1}{2}(e'_1 + e'_2), \hat{e}'_2 = \frac{1}{2}(e'_1 - e'_2)\ .$$

Montrer que $\hat{\mathcal{B}} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\hat{\mathcal{B}}' = (\hat{e}'_1, \hat{e}'_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de représentation de f dans ces nouvelles bases.

Exercice 1.20. On considère $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. On note f l'endomorphimse de $\mathbb{R}^3$ donné par $f(e_1) = e_3$, $f(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$ et $f(e_3) = e_3$.

(1) Ecrire la matrice de représentation de f dans (e_1, e_2, e_3). Déterminer le noyau de f.

(2) On pose $\tilde{e}_1 = e_1 - e_3$, $\tilde{e}_2 = e_1 - e_2$ et $\tilde{e}_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. La famille $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

(3) Ecrire la matrice de représentation de f dans $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$.

Exercice 1.21. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On pose $\tilde{e}_1 = 2e_1 + 3e_2$, $\tilde{e}_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$ et $\tilde{e}_3 = e_1 + e_2 + 2e_3$. Montrer que $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Que vaut la matrice de représentation de f dans cette base ?

Exercice 1.22. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. On dit que A est à diagonale dominante si $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ pour tout i. Montrer que A est inversible.

Exercice 1.23. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note $f, g \in End(E)$ les endomorphismes de E définis par

$$\begin{aligned} f\big(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3\big) &= \big(x_1 + 4x_2 + x_3\big)e_1 + \big(4x_1 + 3x_3\big)e_2 \\ &\quad + \big(-x_1 + 3x_2 - 2x_3\big)e_3 \\ g\big(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3\big) &= \big(3x_1 - x_3\big)e_1 + \big(2x_1 + 4x_2 + 2x_3\big)e_2 \\ &\quad + \big(5x_1 + 4x_2 + x_3\big)e_3 \end{aligned}$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

(1) Ecrire la matrice de représentation $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ de f dans $\mathcal{B}$.

(2) Ecrire la matrice de représentation $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g)$ de g dans $\mathcal{B}$.

(3) Calculer les déterminants $\det\big(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)\big)$ et $\det\big(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g)\big)$. Les endomorphismes f et g sont-ils inversibles ?

Exercice 1.24. Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension 3 de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ des réels. On considère l'application linéaire $f : E \to F$ définie par

$$f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (\alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha x_3)\,\tilde{e}_1 + (x_1 + x_2 + \beta x_3)\,\tilde{e}_2 \\ + (3x_1 + 2x_2 + \alpha x_3)\,\tilde{e}_3$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Ecrire la matrice de représentation de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$. Si A est cette matrice, calculer le determinant de A. Montrer que pour $\beta = 1$ l'application linéaire f est un isomorphisme de E sur F pour toutes les valeurs de α mis à part deux valeurs précises que l'on calculera. Montrer que pour $\beta = 3$ l'application linéaire f est un isomorphisme de E sur F pour tout α.

Exercice 1.25. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.26. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Lorsque $n = 2$, donner un exemple d'espace E et d'endomorphisme f de E tels que $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$. On suppose maintenant n impair. Peut-il exister un endomorphisme $f \in \mathrm{End}(E)$ de E tel que $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$?

Exercice 1.27. Soit A une matrice carrée dont tous les coefficients sont entiers, à savoir dans $\mathbb{Z}$. Montrer que A est inversible d'inverse une matrice à coefficients entiers si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.

Exercice 1.28. Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant que

$$A^3 - A^2 + A = \mathrm{Id}_n \ .$$

Montrer que A est inversible. Quelle est son inverse ? En utilisant l'exercice précédant, sachant que $\det(A) > 0$, calculer le déterminant de A si A est à coefficients entiers dans $\mathbb{Z}$

Exercice 1.29. Soit A la matrice 3×3 donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculer le rang de A.

Exercice 1.30. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ deux paramètres réels. On considère la matrice $A_{\alpha,\beta}$ réelle 3×3 donnée par

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs de α et β cette matrice est-elle inversible ? Si $\alpha = \beta = 2$, que vaut le rang de $A_{\alpha,\beta}$?

Exercice 1.31. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
Montrer que $\mathrm{Rg}(A) \geq 2$. Pour quelles valeurs de a et b va-t-on avoir que $\mathrm{Rg}(A) = 2$?

Exercice 1.32. Une matrice A est dite échelonnée (en lignes) si les deux points suivants sont vérifiés: **(i)** toute ligne non nulle de A commence avec strictement plus de zéros que la ligne précédente, **(ii)** en-dessous d'une ligne nulle, toutes les lignes sont nulles.

(1) On considère les matrices échelonnées
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$
Quel est le rang de ces matrices ?

(2) Dans le cas général montrer que le rang d'une matrice échelonnée est égal au nombre de ses lignes non nulles.

Exercice 1.33. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par
$$f(x, y, z) = (-3x - y + z, 8x + 3y - 2z, -4x - y + 2z) \ .$$
(1) Déterminer le noyau de f. L'application f est-elle injective ?
(2) Que vaut le rang de f ? L'application f est-elle surjective ?
(3) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
(4) Ecrire la matrice de représentation de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (au départ et à l'arrivée).
(5) Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on note $\tilde{e}_1 = e_2 + e_3$, $\tilde{e_2} = e_1 + e_3$ et $\tilde{e}_3 = e_1 + e_2$. Montrer que $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(6) Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathcal{B}}$. Calculer son inverse.
(7) Que vaut la matrice de représentation de f dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$ (au départ et à l'arrivée) ?

Exercice 1.34. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice réelle 3×3. On suppose que $A^2 = 4A - 3\mathrm{Id}_3$, où Id_3 est la matrice identité 3×3. On pose $B = A - 2\mathrm{Id}_3$. Calculer le déterminant de B sachant que $\det(B) \geq 0$.

Exercice 1.35. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
Que vaut le rang de A ?

Exercice 1.36. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, à savoir qui vérifient que $AB = BA$.

Exercice 1.37. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in End(E)$ deux endomorphismes de E. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 1.38. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in End(E)$ un endomorphisme de E. On suppose que $f^3 \equiv f^2$, $f \not\equiv \mathrm{Id}_E$, $f^2 \not\equiv 0$ et $f^2 \not\equiv f$.

(1) Montrer que les seules valeurs propres possibles de f sont 0 et 1.

(2) Montrer que 0 et 1 sont bien des valeurs propres de f.

(3) Montrer que f n'est pas diagonalisable.

(4) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Im}(f^2)$.

Exercice 1.39. Une matrice est dite stochastique si ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients sur chaque ligne est égale à 1. Soit A une matrice stochastique $n \times n$. Donc $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \geq 0$ pour touts $i, j = 1, \ldots, n$ et $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

(1) Montrer que si λ est valeur propre de A alors $|\lambda| \leq 1$.

(2) Montrer que 1 est valeur propre de A.

Exercice 1.40. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et soit $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme de E vérifiant que $f^2 = f$.

(1) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

(2) Soit $r = \mathrm{dimIm}(f)$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $f(e_i) = e_i$ pour tout $i \leq r$ et $f(e_i) = 0$ pour tout $i > r$. Déterminer la matrice de f dans cette base. En déduire que tout f tel que $f^2 = f$ est diagonalisable.

Exercice 1.41. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et soit $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme de E vérifiant que $f^2 = \mathrm{Id}_E$, où Id_E est l'identité de E.

(1) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.

(2) Montrer qu'il existe $s \in \{1, \ldots, n\}$ et une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de représentation de f s'écrit sous la forme

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & -I_{n-s} \end{pmatrix} ,$$

où I_s est la matrice identité $s \times s$, I_{n-s} est la matrice identité $(n-s) \times (n-s)$ et les 0 sont les matrices nulles $s \times (n-s)$ et $(n-s) \times s$. En déduire que tout f telle que $f^2 = \mathrm{Id}_E$ est diagonalisable.

Exercice 1.42. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note $f \in End(E)$ l'endomorphisme de E défini par

$$\begin{aligned} f\big(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3\big) = \big(x_1 + 4x_2 + 4x_3\big)e_1 + \big(4x_1 + 7x_2 + 8x_3\big)e_2 \\ - \big(4x_1 + 8x_2 + 9x_3\big)e_3 \end{aligned}$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.
(1) Que vaut le polynôme caractéristique de f et que valent les valeurs propres de f ?
(2) Déterminer les sous-espaces propres de f.
(3) Montrer que f est diagonalisable et donner une matrice A pour laquelle la matrice $A^{-1}M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)A$ est diagonale. Que vaut cette matrice diagonale ?

(4) Calculer $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^6$ et $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^7$.
(5) Calculer A^{-1}

Exercice 1.43. Soient $A = (a_{ij})$ une matrice. On dit que A triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour tous $i < j$, et que A est une matrice triangulaire supérieursi $a_{ij} = 0$ pour tous $i > j$.

(1) Montrer que le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est égal au produit de ses termes diagonaux.

(2) Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. Soit $f \in End(\mathbb{R}_n[X])$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par
$$f(P) = P - (X+1)P' \ .$$
Montrer que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Exercice 1.44. Soit A la matrice réelle 2×2 donnée par
$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$
On se donne $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ et on définit les suites $(x_n), (y_n)$ par
$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \frac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} = -\frac{5}{2}x_n - \frac{2}{3}y_n \ . \end{cases}$$
Déterminer (x_n) et (y_n).

Exercice 1.45. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme de E, et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme réel. Si $P(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$, $k \in \mathbb{N}$, on note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par $P(f) = \sum_{i=0}^{k} a_i f^i$ où $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $f^i = f \circ \cdots \circ f$ (i fois).

(1) Montrer que si λ est valeur propre de f, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(f)$ et que si f est diagonalisable, alors $P(f)$ l'est aussi.

(2) On suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x_1e_1 + x_2e_2) = (x_1 - \sqrt{2}x_2)e_1 + (\sqrt{2}x_1 - x_2)e_2$$
Montrer (par le simple calcul du polynôme caractéristique de f) que f n'est pas diagonalisable. Calculer ensuite $f^2 = f \circ f$ et vérifier que f^2 est diagonalisable. En déduire que pour P un polynôme, et f un endomorphisme, on peut très bien avoir que $P(f)$ est diagonalisable sans pour autant que f le soit.

Exercice 1.46. Soit A une matrice 2×2. Vérifier, "à la main", l'équation de Cayley-Hamilton en dimension 2:
$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0 \ ,$$
où 0 est la matrice nulle 2×2 et I_2 est la matrice identité 2×2.

Exercice 1.47. On considère la matrice A réelle 3×3 donnée par
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$
Calculer A^6 et A^7.

Exercice 1.48. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'endomorphisme $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -m & 1+m \end{pmatrix}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de m l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ est-il diagonalisable ?

Exercice 1.49. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'endomorphisme $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de m l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est-il diagonalisable ?

Exercice 1.50. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Diagonaliser A.

Exercice 1.51. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ donné. Pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ on note $A_{i,j}$ la matrice (dite élémentaire) dont tous les éléments sont des 0 sauf l'élément à la $i$ème ligne et $j$ème colonne qui vaut 1. Quelles matrices $A_{i,j}$ sont diagonalisables ?

Exercice 1.52. **(1)** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et soient $f, g \in End(E)$ deux endomorphismes de E. On suppose que f et g commutent, et donc que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que f laisse stables les sous espaces propres de g (si E_λ est un sous espace propre de g, alors $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$), et donc aussi que g laisse stables les espaces propres de f. En déduire que si g a n valeurs propres distinctes et si $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres de g, alors $\mathcal{B}$ diagonalise f.

(2) Soit A la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} .$$

Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (l'espace des matrices réelles 3×3) l'équation $X^2 = A$.

(3) Même question avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.53. Soit A la matrice réelle 3×3 donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -7 \\ 4 & 22 & -23 \\ 4 & 14 & -15 \end{pmatrix} .$$

Combien y a-t-il de matrices réelles M qui vérifient que $M^3 = A$?

Exercice 1.54. **(1)** Soit $a \in \mathbb{R}^\star$ un réel non nul et A_a la matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & a & -1 \\ a & 0 & -1 \\ a & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver $\alpha_a, \beta_a \in \mathbb{R}$, deux réels dépendant de a, pour lesquels on a

$$A_a^3 = \alpha_a A_a + \beta_a \mathrm{Id}_3 \ ,$$

où Id_3 est la matrice identité 3×3.

(2) On suppose $a \neq 1$. Donner une expression de A_a^{-1} en fonction de A_a^2, α_a et β_a. Dans le cas particulier $a = -1$, et si on pose $A = A_{-1}$, que vaut A^{-1} ?

Exercice 1.55. Soient $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ deux réels donnés. On construit la suite $\big((u_n, v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par la relation: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 3u_n - v_n \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

(1) Ecrire le système ci-dessus sous forme d'une équation matricielle reliant X_{n+1} à X_n. Si A est la matrice qui intervient dans cette équation, quelle relation relie X_n, A^n et X_0 ? Une fois la relation devinée, on la démontrera rigoureusement.

(2) Diagonaliser A. Trouver P inversible et D diagonale telles que $P^{-1}AP = D$.

(3) Que vaut P^{-1} ?

(4) On pose $\tilde{X}_n = P^{-1}X_n$. Quelle relation relie $\tilde{X}_n$, D^n et $\tilde{X}_0$?

(5) On pose $u_0 = 6$ et $v_0 = -4$. Que valent $\tilde{u}_6$ et $\tilde{v}_6$? Et que valent u_6 et v_6 ?

Exercice 1.56. Soient $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ deux réels donnés. On construit la suite $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par la relation: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \ .$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

(1) Ecrire l'équation de récurrence ci-dessus sous forme matricielle faisant intervenir les X_n. Relier X_n à X_0.

(2) Si A est la matrice qui intervient à la question (1), diagonaliser A. Trouver P inversible et D diagonale telles que $P^{-1}AP = D$.

(3) Que vaut P^{-1} ?

(4) On suppose $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$. Que vaut u_n pour $n \geq 2$?

CHAPITRE 2

Algèbre linéaire 3 - Corrigés

Correction de l'exercice 1.1. **(1)** Clairement $E_1 \neq \emptyset$, par exemple $(0,0,0) \in E_1$. La question maintenant est de savoir si $\forall (x,y,z), (\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \in E_1$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(x+\tilde{x}, y+\tilde{y}, z+\tilde{z}) \in E_1$ et $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in E_1$. Soient $(x,y,z), (\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \in E_1$. On a

$$(x+\tilde{x}) + (y+\tilde{y}) + 3(z+\tilde{z}) = (x+y+3z) + (\tilde{x}+\tilde{y}+3\tilde{z}) = 0+0 = 0$$

et de même, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z) \in E_1$,

$$(\lambda x) + (\lambda y) + 3(\lambda z) = \lambda(x+y+3z) = \lambda \times 0 = 0 \ .$$

Donc, $\forall (x,y,z), (\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \in E_1, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (x+\tilde{x}, y+\tilde{y}, z+\tilde{z}) \in E_1$ et $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in E_1$. Il s'ensuit que E_1 est bien un sous espace vectoriel.

(2) On se pose la même question. Comme $4+4$ n'est pas égal à 4 (contrairement à $0+0=0$) on va avoir un problème dès la somme de deux vecteurs de E_2. Le plus simple est de donner un contre exemple. On remarque que $(4,0,0), (0,4,0) \in E_2$, mais $(4,0,0)+(0,4,0) = (4,4,0)$ n'est pas dans E_2. Donc E_2 n'est pas un sous espace vectoriel. On aurait aussi pu remarquer que $(0,0,0) \notin E_2$, et comme un sous espace vectoriel contient forcément le vecteur nul, E_2 n'est pas un sous espace vectoriel.

(3) On a $(-1,-1) \in E_3$ et $(1,1) \in E_3$. Or $(-1,-1)+(1,1) = (0,0)$ n'est pas dans E_3. Donc E_3 n'est pas un sous espace vectoriel.

(4) On a $(-1,1) \in E_4$ et $(1,1) \in E_4$. Or $(-1,1)+(1,1) = (0,2)$ n'est pas dans E_4. Donc E_4 n'est pas un sous espace vectoriel. □

Correction de l'exercice 1.2. **(1)** Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. On a

$$\lambda e_1 + \mu(2e_2) + \nu e_3 = \lambda e_1 + (2\mu) e_2 + \nu e_3 + 0 e_4$$

et donc, comme (e_1,e_2,e_3,e_4) est libre, $\lambda e_1 + \mu(2e_2) + \nu e_3 = 0$ entraîne $\lambda = 0$, $2\mu = 0$, $\nu = 0$ (et $0=0$). En particulier, $\lambda e_1 + \mu(2e_2) + \nu e_3 = 0$ entraîne $\lambda = \mu = \nu = 0$. La famille est bien libre.

(2) (e_1,e_3) est une sous famille de (e_1,e_2,e_3,e_4). Elle est donc automatiquement libre.

(3) On remarque que

$$(-2)e_1 + (2e_1+e_4) + (-1)e_4 = 0 \ .$$

La famille n'est pas libre.

(4) Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. On a

$$\lambda(3e_1+e_3) + \mu e_3 + \nu(e_2+e_3) = (3\lambda)e_1 + \nu e_2 + (\lambda+\mu+\nu)e_3 + 0e_4$$

et donc, comme (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre, $\lambda(3e_1+e_3)+\mu e_3+\nu(e_2+e_3) = 0$ entraîne que $3\lambda = 0$, $\nu = 0$, $\lambda+\mu+\nu = 0$ (et $0 = 0$). En particulier, $\lambda(3e_1+e_3)+\mu e_3+\nu(e_2+e_3) = 0$ entraîne que $\lambda = \mu = \nu = 0$. La famille est bien libre.

(5) Soient $\lambda, \mu, \nu, \theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}&\lambda(2e_1 + e_2) + \mu(e_1 - 3e_2) + \nu e_4 + \theta(e_2 - e_1)\\ &= (2\lambda + \mu - \theta)e_1 + (\lambda - 3\mu + \theta)e_2 + 0e_3 + \nu e_4\end{aligned}$$

et donc, comme (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre, $\lambda(2e_1+e_2)+\mu(e_1-3e_2)+\nu e_4+\theta(e_2-e_1) = 0$ si et seulement si $2\lambda + \mu - \theta = 0$, $\lambda - 3\mu + \theta = 0$, $(0 = 0)$ et $\nu = 0$. On a bien $\nu = 0$ mais les deux équations qui nous restent ne vont pas impliquer que λ, μ et θ sont aussi nuls. Et en effet, si on prend $\lambda = \frac{2}{3}$, $\mu = 1$ et $\theta = \frac{7}{3}$, alors on a bien que $2\lambda + \mu - \theta = 0$ et $\lambda - 3\mu + \theta = 0$. En particulier,

$$\frac{2}{3}(2e_1 + e_2) + (e_1 - 3e_2) + 0e_4 + \frac{7}{3}(e_2 - e_1) = 0$$

et la famille n'est donc pas libre. □

Correction de l'exercice 1.3. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\lambda v_1 + \mu v_2 = (\lambda + 4\mu, \lambda + \mu, 4\mu)$$

et donc $\lambda v_1 + \mu v_2 = 0$ (vecteur nul de $\mathbb{R}^3$) entraîne que $\lambda + 4\mu = 0$, $\lambda + \mu = 0$ et $\mu = 0$. En particulier, $\lambda v_1 + \mu v_2 = 0$ (vecteur nul de $\mathbb{R}^3$) entraîne que $\lambda = \mu = 0$. La famille (v_1, v_2) est libre. Pour (v_1, v_3) on trouve que $\lambda v_1 + \mu v_3 = 0$ (vecteur nul de $\mathbb{R}^3$) entraîne que $\lambda + 2\mu = 0$, $\lambda - \mu = 0$ et $4\nu = 0$. Là encore on en déduit que $\lambda = \mu = 0$. Donc (v_1, v_3) est libre. Pour (v_2, v_3) on trouve que $\lambda v_2 + \mu v_3 = 0$ (vecteur nul de $\mathbb{R}^3$) entraîne que $4\lambda + 2\mu = 0$, $\lambda - \mu = 0$ et $4\lambda + 4\mu = 0$. En particulier $\lambda = \mu$ et ensuite, forcément $\lambda = \mu = 0$. La famille (v_2, v_3) est libre.

On s'intéresse maintenant à la famille (v_1, v_2, v_3). Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. On a

$$\lambda v_1 + \mu v_2 + \nu v_3 = (\lambda + 4\mu + 2\nu, \lambda + \mu - \nu, 4\mu + 4\nu)$$

et donc $\lambda v_1 + \mu v_2 + \nu v_3 = 0$ (vecteur nul de $\mathbb{R}^3$) équivaut à

$$\begin{cases}\lambda + 4\mu + 2\nu = 0\\ \lambda + \mu - \nu\\ \mu + \nu = 0\end{cases}$$

Ce système est à son tour équivalent au système

$$\begin{cases}\nu = -\mu\\ \lambda + 2\mu = 0\end{cases}$$

(les deux premières équations deviennent identiques lorsque $\nu = -\mu$). On trouve alors comme solution non nulle $\lambda = 2$, $\mu = -1$ et $\nu = 1$. En d'autres termes,

$$2v_1 - v_2 + v_3 = 0$$

(vecteur nul de $\mathbb{R}^3$). La famille (v_1, v_2, v_3) n'est pas libre. □

Correction de l'exercice 1.4. L'énoncé est un peu ambigu. Il faut comprendre que l'on vous demande de montrer que la famille des deux fonctions $(\cos, \sin)$ est libre et que la famille de trois fonctions $(\cos, \sin, f)$ est elle aussi libre, où $f(x) = \sin(2x)$ pour tout x. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda \cos + \mu \sin = 0$ signifie que $\lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0$ pour tout x. En particulier pour $x = 0$ et pour $x = \frac{\pi}{2}$ qui donnent respectivement que $\lambda = 0$ et que $\mu = 0$. Donc $\lambda \cos + \mu \sin = 0$ entraîne que $\lambda = \mu = 0$, et donc $(\cos, \sin)$ est libre. Soient maintenant $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda \cos + \mu \sin + \nu f = 0$ signifie que $\lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + \nu \sin(2x) = 0$ pour tout x. En prenant $x = 0$ on trouve $\lambda = 0$. En prenant $x = \frac{\pi}{2}$ on trouve que $\mu = 0$ (puisque $\sin(\pi) = 0$). Il reste $\nu \sin(2x) = 0$ pour tout x. En prenant $x = \frac{\pi}{4}$ on trouve $\nu = 0$. Donc $\lambda \cos + \mu \sin + \nu f = 0$ entraîne que $\lambda = \mu = \nu = 0$, et donc $(\cos, \sin, f)$ est libre. □

Correction de l'exercice 1.5. On vérifie facilement que E est bien un sous espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (comme à l'exercice 1). On écrit

$$\begin{aligned} E &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y - z = 0\right\} \\ &= \left\{(x, y, x + 2y) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x, y \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 2) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x, y \in \mathbb{R}\right\} \ . \end{aligned}$$

On voit avec cette dernière écriture que les vecteurs $u = (1, 0, 1)$ et $v = (0, 1, 2)$ forment une famille génératrice de E. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a $\lambda u + \mu v = (\lambda, \mu, \lambda + 2\mu)$ et donc $\lambda u + \mu v = 0$ (vecteur nul de $\mathbb{R}^3$) entraîne que $\lambda = 0$ et $\mu = 0$ (et $\lambda + 2\mu = 0$). Ainsi la famille (u, v) est aussi une famille libre. On en déduit que (u, v) est une base de E (génératrice + libre). □

Correction de l'exercice 1.6. (1) On a

$$\begin{aligned} f(xe_1 + ye_2 + ze_3) &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= -2(x + 2z)e_1 + 3ye_2 + 2(x + 2z)e_3 \ . \end{aligned}$$

Ainsi, $f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = 0$ si et seulement si

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y = 0 \ . \end{cases}$$

On trouve donc que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f) &= \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ x + 2z, y = 0\} \\ &= \{z(-2e_1 + e_3), z \in \mathbb{R}\} \ . \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f)$ est un droite vectorielle de base $u = -2e_1 + e_3$. On a $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$. Donc f n'est pas injective. Le théorème du rang donne que $\mathrm{rg}(f) = 3 - 1 = 2$.

(2) On sait déjà que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous espace vectoriel de dimension 2. Il suffit donc de trouver une famille libre à deux éléments dans $\mathrm{Im}(f)$ pour avoir une base de $\mathrm{Im}(f)$. On a $f(e_1) \in \mathrm{Im}(f)$ et $f(e_2) \in \mathrm{Im}(f)$ et, clairement, $(f(e_1), f(e_2))$ est libre (car e_2 n'apparaît pas dans $f(e_1)$). On peut siplifier par 2 et par 3 sans changer le caractère libre de la famille. En conclusion, $(-e_1 + e_3, e_2)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(3) On pose $v = -e_1 + e_3$ et $w = e_2$ de sorte que (v, w) est une base de $\mathrm{Im}(f)$. Dire que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ c'est dire que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour le vérifier il suffit de vérifier que (u, v, w) est libre. On a

$$\begin{aligned} \lambda u + \mu v + \nu w = 0 &\Leftrightarrow -(2\lambda + \mu)e_1 + \nu e_2 + (\lambda + \mu)e_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda - \mu = 0 \\ \nu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0 \ . \end{aligned}$$

Donc (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et on en déduit que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. $\square$

Correction de l'exercice 1.7. Supposons (1) et (2). On a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \ . \qquad (\star)$$

Donc, avec (1) et (2), $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$, et on a (3). Supposons (1) et (3). La relation $(\star)$ entraîne que $\dim(F + G) = \dim(E)$, et comme $F + G \subset E$ on obtient que $F + G = E$, donc (2). Supposons pour finir (2) et (3). La relation $(\star)$ entraîne alors que $\dim(F \cap G) = 0$ et donc que $F \cap G = \{0\}$, donc (1). Au total, deux quelconques des propriétés (1), (2), (3) entraînent la troisième. $\square$

Correction de l'exercice 1.8. Si la somme était directe on aurait $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G) = 6$. Or $6 > 5$ et comme $F + G \subset \mathbb{R}^5$ on doit aussi avoir que $\dim(F \oplus G) \leq 5$. Une contradiction. La somme de F et G ne peut être directe. $\square$

Correction de l'exercice 1.9. Soit n la dimension de E. On a

$$\begin{aligned} n &= \dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)) \\ &= \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) - \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)) \ , \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} n &= \dim(\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g)) \\ &= \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g)) - \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) \ . \end{aligned}$$

Par addition, et en vertue du théorème du rang pour f et pour g, on obtient

$$2n = 2n - \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)) - \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) \ .$$

On en déduit que $\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)) = 0$ et que $\dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) = 0$, et donc que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$ et que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0\}$. Les sommes sont donc bien directes. $\square$

Correction de l'exercice 1.10. Les racines de $x^2 - 3x + 2 = 0$ sont 1 et 2. Algébriquement on va donc avoir $(f - \mathrm{Id}_E) \circ (f - 2\mathrm{Id}_E) = 0$, ce que l'on vérifie facilement. Donc on a bien que $\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$. On montre maintenant que

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) = \{0\} \ . \qquad (\star)$$

Clairement, $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$ implique que $f(x- = x$ et $f(x) = 2x$ de sorte que $x = 2x$ et on obtient aisni que $x = 0$. On a donc bien montré $(\star)$. La somme $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$ est bien directe. On montre enfin que

$$E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) \ . \qquad (\star\star)$$

Le théorème du rang donne que

$$\dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)) + \dim(\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E)) = \dim(E) \ .$$

Comme $\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ on en déduit que

$$\dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)) + \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)) \geq \dim(E) \ .$$

Or, avec $(\star)$,

$$\begin{aligned} &\dim\left(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)\right) \\ &= \dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)) + \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)) \ . \end{aligned}$$

Comme $\dim(E) \geq \dim\left(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)\right)$, on en déduit que

$$\dim(E) = \dim\left(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)\right)$$

et donc ($\star\star$) est aussi démontrée. Au total la somme $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}_E)$ est bien directe et égale à E. $\square$

Correction de l'exercice 1.11. On a

$$B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Par suite

$$B^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

et enfin on trouve que

$$B^3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

On en déduit facilement par récurrence que $B^n=0$ (matrice nulle) pour tout $n\geq 3$. On a

$$A=\mathrm{Id}_3+B$$

et les matrices Id_3 et B commutent. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton:

$$A^n=(\mathrm{Id}_3+B)^n=\sum_{p=0}^{n}C_n^p\mathrm{Id}_3^{n-p}B^p$$

où $C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$. En vertue de ce qui a été dit sur B^n, et puisque $C_n^0=1$, $C_n^1=n$ et $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$, on trouve que

$$\begin{aligned}A^n&=\mathrm{Id}_3+nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$\square$

Correction de l'exercice 1.12. Il est clair que T est un endomorphisme car la trace est linéaire. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie n^2, il suffit de montrer que T est injective si et seulement si $\mathrm{tr}(A)\neq 1$. Si $T(M)=0$ alors $M=\mathrm{tr}(M)A$ et en prenant la trace on obtient que

$$\mathrm{tr}(M)=\mathrm{tr}(M)\mathrm{tr}(A)\ .$$

Si $\mathrm{tr}(A)\neq 1$ alors $\mathrm{tr}(M)=0$, et puisque $M=\mathrm{tr}(M)A$ si $T(M)=0$, on trouve que $M=0$. Donc $\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$ et T est bien injective (donc bijective) si $\mathrm{tr}(A)\neq 1$. Réciproquement, supposons que $\mathrm{tr}(A)=1$. Alors $A\neq 0$ et $T(A)=0$ et donc T n'est pas injective. Ainsi T est un isomorphisme si $\mathrm{tr}(A)\neq 1$ et ne l'est pas si $\mathrm{tr}(A)=1$. Cela démontre que T est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{tr}(A)\neq 1$. $\square$

Correction de l'exercice 1.13. Ecrivons B sous la forme
$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} .$$
On a
$$AB = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ az & at \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} ax & bx+ay \\ az & bz+at \end{pmatrix} .$$
On veut donc
$$\begin{cases} ax+bz = ax \\ ay+bt = bx+ay \\ at = bz+at \end{cases}$$
et on trouve ainsi que $bz = 0$ et $bt = bx$. Comme a et b sont non nuls, il faut $z = 0$ et $t = x$. Donc les matrices B qui commutent avec A sont les matrices qui s'écrivent sous la forme
$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$
pour x, y des réels. □

Correction de l'exercice 1.14. **(1)** On trouve
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
et par récurrence il est clair que $X_n = A^n X_0$ puisque la relation est vraie pour $n = 0$ et puisque si elle est vraie pour n, alors elle l'est aussi pour $n+1$ puisque $X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$.

(2) On a
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On calcule
$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ puis } N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Par suite, $N^p = 0$ pour tout $p \geq 3$.

(3) On a $A = 3\mathrm{Id}_3 + N$ et les matrices $3\mathrm{Id}_3$ et N commutent. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton. On en déduit
$$A^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 3^{n-p} N^p$$
et comme $N^p = 0$ pour $p \geq 3$ on obtient exactement la formule demandée.

(4) Comme $X_n = A^n X_0$ on trouve avec la calcul de A^n à la question précédente que
$$\begin{cases} x_n = 3^n x_0 + 3^{n-1} n y_0 + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} z_0 \\ y_n = 3^n y_0 + 3^{n-1} n z_0 \\ z_n = 3^n z_0 \end{cases}$$
pour tout n. □

Correction de l'exercice 1.15. **(1)** Comme

$$f\big(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3\big)=\big(2x_1+x_2+x_3\big)\tilde{e}_1+\big(4x_1+3x_3\big)\tilde{e}_2 \\ +\big(x_1+3x_2+x_3\big)\tilde{e}_3+\big(3x_1+x_2+5x_3\big)\tilde{e}_4$$

on calcule:

$$\begin{aligned} f(e_1)&=2\tilde{e}_1+4\tilde{e}_2+\tilde{e}_3+3\tilde{e}_4\\ f(e_2)&=\tilde{e}_1+0\tilde{e}_2+3\tilde{e}_3+\tilde{e}_4\\ f(e_3)&=\tilde{e}_1+3\tilde{e}_2+\tilde{e}_3+5\tilde{e}_4 \end{aligned}$$

Par suite:

$$M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)=\begin{pmatrix}2&1&1\\4&0&3\\1&3&1\\3&1&5\end{pmatrix}$$

(2) Comme

$$g\big(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3\big)=\big(x_1-x_2+3x_3\big)\tilde{e}_1-\big(2x_1+3x_2-x_3\big)\tilde{e}_2 \\ +\big(5x_1-x_2\big)\tilde{e}_3-\big(x_1+x_2-x_3\big)\tilde{e}_4$$

on calcule:

$$\begin{aligned} g(e_1)&=\tilde{e}_1-2\tilde{e}_2+5\tilde{e}_3-\tilde{e}_4\\ g(e_2)&=-\tilde{e}_1-3\tilde{e}_2-\tilde{e}_3-\tilde{e}_4\\ g(e_3)&=3\tilde{e}_1+\tilde{e}_2+0\tilde{e}_3+\tilde{e}_4 \end{aligned}$$

Par suite:

$$M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(g)=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-2&-3&1\\5&-1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

□

Correction de l'exercice 1.16. Notons $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On cherche les $X=xe_1+ye_2+ze_3$ pour lesquels $f(X)=0$. On cherche donc les x,y,z tels que

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

On trouve

$$\begin{cases}x+y-z=0\\-3x-3y+3z=0\\-2x-2y+2z=0\end{cases}$$

et il reste donc pour seule équation que $x+y=z$. Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f)&=\{xe_1+ye_2+ze_3\ /\ x+y=z\}\\ &=\{x(e_1+e_3)+y(e_2+e_3),x,y\in\mathbb{R}\}\end{aligned}$$

et $\mathrm{Ker}(f)$ est donc le sous espace engendré par les vecteurs $\tilde{e}_1=e_1+e_3$ et $\tilde{e}_2=e_2+e_3$. Ces vecteurs sont linéairement indépendants car

$$\lambda\tilde{e}_1+\mu\tilde{e}_2=0\Leftrightarrow\lambda e_1+\mu e_2+(\lambda+\mu)e_3=0$$

et donc, forcément, $\lambda = \mu = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(f)$ est le plan vectoriel de base $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$. Le théorème du rang permet alors d'affirmer que $\dim\mathrm{Im}(f) = 3 - 2 = 1$. Prenons $x = y = z = 1$. On a que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

de sorte que $f(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 - 3e_2 - 2e_3$ et donc, puisque $\dim\mathrm{Im}(f) = 1$, $\mathrm{Im}(f)$ est la droite vectorielle de base $\tilde{e} = e_1 - 3e_2 - 2e_3$. On a

$$\tilde{e} = (e_1 + e_3) - 3(e_2 + e_3) = \tilde{e}_1 - 3\tilde{e}_2$$

et donc $\tilde{e} \in \mathrm{Ker}(f)$. On en déduit que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Mais alors, pour tout X, $f^2(X) = f\big(f(X)\big) = 0$ puisque $f(X) \in \mathrm{Im}(f)$ et donc $f(X) \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi $f^2 = 0$ est l'endomorphisme nul. Cela implique bien sur que que $f^p = 0$ dès que $p \geq 2$. La matrice de représentation de f^p dans la base canonique n'étant rien d'autre que A^p on en déduit que $A^p = 0$ pour tout $p \geq 2$. □

Correction de l'exercice 1.17. **(1)** Par définition des matrices de représentation, $f(e_1) = e_1 + e_2$ et $f(e_2) = 2e_1 + 2e_2$. les coordonnées de $ae_1 + 17e_2$ dans (e_1, e_2) sont $(a, 17)$. Les coodonnées de $f(ae_1 + 17e_2)$ dans (e_1, e_2) sont données par

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 34 \\ a + 34 \end{pmatrix}$$

de sorte que $f(ae_1 + 17e_2) = (a + 34)(e_1 + e_2)$.

(2) On a

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ xe_1 + ye_2 \ / \ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

et on trouve donc comme seule équation $x + 2y = 0$. Donc

$$\mathrm{Ker}(f) = \{-2ye_1 + ye_2 \ , \ y \in \mathbb{R}\} = \{y(-2e_1 + e_2) \ , \ y \in \mathbb{R}\}$$

de sorte que $\mathrm{Ker}(f)$ est la droite vectorielle de vecteur directeur $-2e_1 + e_2$ ou, ce qui revient au même, $2e_1 - e_2$. Le théorème du rang donne alors que $\dim\mathrm{Im}(f) = 2 - 1 = 1$ et, pour touver une base de $\mathrm{Im}(f)$ il suffit de trouver un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(f)$. Par exemple $f(e_1) = e_1 + e_2$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(3) On vérifie que (u, v) est une base de E. Pour cela il suffit de vérifier que (u, v) est libre puisqu'elle comporte autant de vecteurs que la dimension. On a $\lambda u + \mu v = 0$ si et seulement si $(2\lambda + \mu)e_1 + (\mu - \lambda)e_2 = 0$ et on trouve donc que, nécessairement, $\lambda = \mu$ et $3\lambda = 0$ de sorte que $\lambda = \mu = 0$. La famille est bien libre, c'est donc une base. Avec la question précédente, u est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et v est une base de $\mathrm{Im}(f)$. On a $f(v) = f(e_1) + f(e_2) = 3e_1 + 3e_2 = 3v$, et donc, si $\mathcal{B}' = (u, v)$, alors

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(3) Clairement $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ puisque (u, v) base de E, $u \in \mathrm{Ker}(f)$ et $v \in \mathrm{Im}(f)$. Reste à montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Mais si $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ alors $x = au = bv$ pour des $a, b \in \mathbb{R}$ puisque u est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et v est une base de $\mathrm{Im}(f)$. Mais alors $0 = bf(v) = 3bv$ puisque $f(v) = 3v$. Donc $b = 0$, puis $a = 0$. D'où $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. La somme est ainsi directe et $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. □

Correction de l'exercice 1.18. (Corrigé sommaire) **(1)** On trouve

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) On a

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} ,$$

et

$$(AB)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = 21\mathrm{Id}_2 ,$$

où Id_2 est la matrice identité 2×2.

(3) Il suit de la question précédente que $AB \times \frac{1}{21} AB = \mathrm{Id}_2$. Donc AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{21} AB = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} .$$

(4) L'application $f \circ g$ a pour matrice de représentation AB dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Par suite $(f \circ g)^2$ a pour matrice de représentation $(AB)^2 = 21\mathrm{Id}_2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Donc $(f \circ g)^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est donnée par $(x, y) \to (21x, 21y)$. □

Correction de l'exercice 1.19. Il suffit de montrer que les famille sont libres. On a

$$\lambda \hat{e}_1 + \mu \hat{e}_2 + \nu \hat{e}_3 = 0 \Leftrightarrow (\mu + \nu)e_1 + (\lambda + \nu)e_2 + (\lambda + \mu)e_3 = 0$$

et donc on trouve

$$\begin{cases} \mu + \nu = 0 \\ \lambda + \nu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

dont on tire facilement que $\lambda = \mu = \nu = 0$. Donc $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ est libre et c'est donc bien une base de $\mathbb{R}^3$. Même genre de calculs pour montrer que $(\hat{e}_1', \hat{e}_2')$ est libre et donc une base de $\mathbb{R}^2$. On a

$$M_{\mathcal{B} \to \hat{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_{\mathcal{B}' \to \hat{\mathcal{B}}'} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La formule de changement de bases donne que

$$M_{\hat{\mathcal{B}}\hat{\mathcal{B}}'}(f) = M^{-1}_{\mathcal{B}' \to \hat{\mathcal{B}}'} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) M_{\mathcal{B} \to \hat{\mathcal{B}}} .$$

On a (il y a une formule toute prête pour l'inverse des matrices 2×2)

$$M^{-1}_{\mathcal{B}' \to \hat{\mathcal{B}}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et on trouve par multiplication des matrices que

$$M_{\hat{\mathcal{B}}\hat{\mathcal{B}}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} .$$

$\square$

Correction de l'exercice 1.20. **(1)** Par définition des matrices de représentation,

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a de plus

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

On est donc ramené au système

$$\begin{cases} -y = 0 \\ y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

et on trouve ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f) &= \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ y = 0 \text{ et } x + z = 0\} \\ &= \{x(e_1 - e_3) \ / \ x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f)$ est la droite vectorielle de base $e_1 - e_3$.

(2) On a

$$\lambda\tilde{e}_1 + \mu\tilde{e}_2 + \nu\tilde{e}_3 = 0 \ \Leftrightarrow \ (\lambda + \mu - \nu)e_1 + (\nu - \mu)e_2 + (\nu - \lambda)e_3 = 0$$

et donc

$$\begin{cases} \lambda + \mu - \nu = 0 \\ \nu - \mu = 0 \\ \nu - \lambda = 0 \end{cases} .$$

On trouve $\lambda = \mu = \nu$ avec les deux dernières équations, puis $\lambda = 0$ avec la première. Donc $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est libre. Comme on est en dimension 3 il s'agit d'une base.

(3) On a

$$M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On cherche $M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}^{-1}$. On peut soit passer par le calcul du déterminant et des mineurs, ou alors essayer d'exprimer les e_i en fonction des $\tilde{e}_i$. On a

$$\begin{cases} \tilde{e}_1 = e_1 - e_3 \\ \tilde{e}_2 = e_1 - e_2 \\ \tilde{e}_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e_3 = e_1 - \tilde{e}_1 \\ e_2 = e_1 - \tilde{e}_2 \\ \tilde{e}_3 = -e_1 + e_1 - \tilde{e}_2 + e_1 - \tilde{e}_1 \end{cases}$$

et on trouve ainsi que

$$\begin{cases} e_1 = \tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 + \tilde{e}_3 \\ e_2 = \tilde{e}_1 + \tilde{e}_3 \\ e_3 = \tilde{e}_2 + \tilde{e}_3 \end{cases} .$$

Donc

$$M^{-1}_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

Correction de l'exercice 1.21. (Corrigé sommaire) On montre que $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est une base en montrant qu'il s'agit d'une famille libre. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathcal{B}}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 47 & 54 & -9 \\ -39 & -42 & 8 \\ 22 & 24 & -4 \end{pmatrix} .$$

$\square$

Correction de l'exercice 1.22. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A. On montre que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. On aura alors f injective, donc f bijective puisqu'il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie, et donc A inversible puisque A est une matrice de représentation de f. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ de coordonnées $x_1, \dots, x_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $X \in \mathrm{Ker}(f)$ et que $X \neq 0$. Soit i tel que

$$|x_i| = \max\{|x_j|, j = 1, \dots, n\} .$$

Comme $X \neq 0$, $|x_i| > 0$. On a $f(X) = 0$. En regardant la $i$ème coordonnée de $f(X)$, on voit que

$$a_{ii}x_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}x_j = 0 .$$

Or on a que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j\right| &\leq \sum_{j\neq i}|a_{ij}||x_j|\\ &\leq |x_i|\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\\ &< |a_{ii}x_i|\ .\end{aligned}$$

On obtient ainsi une contradiction puisque d'après ce qui a été dit

$$|a_{ii}x_i| = |\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j|\ .$$

Donc forcément $X = 0$ et $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. □

Correction de l'exercice 1.23. **(1)** Comme

$$\begin{aligned}f\big(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3\big) = \big(x_1 + 4x_2 + x_3\big)e_1 + \big(4x_1 + 3x_3\big)e_2\\ + \big(-x_1 + 3x_2 - 2x_3\big)e_3\end{aligned}$$

on calcule:

$$\begin{aligned}f(e_1) &= e_1 + 4e_2 - e_3\\ f(e_2) &= 4e_1 + 0e_2 + 3e_3\\ f(e_3) &= e_1 + 3e_2 - 2e_3\end{aligned}$$

Par suite:

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1\\ 4 & 0 & 3\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

(2) Comme

$$\begin{aligned}g\big(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3\big) = \big(3x_1 - x_3\big)e_1 + \big(2x_1 + 4x_2 + 2x_3\big)e_2\\ + \big(5x_1 + 4x_2 + x_3\big)e_3\end{aligned}$$

on calcule:

$$\begin{aligned}g(e_1) &= 3e_1 + 2e_2 + 5e_3\\ g(e_2) &= 0e_1 + 4e_2 + 4e_3\\ g(e_3) &= -e_1 + 2e_2 + e_3\end{aligned}$$

Par suite:

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1\\ 2 & 4 & 2\\ 5 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

(3) On a

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1\\ 4 & 0 & 3\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix} \text{ et } M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1\\ 2 & 4 & 2\\ 5 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned}\det\left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)\right) &= 0 + 12 - 12 - 0 - 9 + 32\\ &= 23\end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned}\det\left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g)\right) &= 12 - 8 + 0 + 20 - 24 - 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Comme $\det\left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)\right) \neq 0$, f est un isomorphisme. Comme $\det\left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g)\right) = 0$, g n'est pas un isomorphisme. □

Correction de l'exercice 1.24. On a

$$\begin{aligned}f\left(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3\right) &= \left(\alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha x_3\right)\tilde{e}_1 + \left(x_1 + x_2 + \beta x_3\right)\tilde{e}_2\\ &\quad + \left(3x_1 + 2x_2 + \alpha x_3\right)\tilde{e}_3\end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned}f(e_1) &= \alpha\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 + 3\tilde{e}_3\\ f(e_2) &= \beta\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 + 2\tilde{e}_3\\ f(e_3) &= \alpha\tilde{e}_1 + \beta\tilde{e}_2 + \alpha\tilde{e}_3\end{aligned}$$

Par suite,

$$M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f) = \begin{pmatrix}\alpha & \beta & \alpha\\ 1 & 1 & \beta\\ 3 & 2 & \alpha\end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned}\det\left(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\right) &= \alpha^2 + 2\alpha + 3\beta^2 - 3\alpha - 2\alpha\beta - \alpha\beta\\ &= \alpha^2 - \alpha + 3\beta^2 - 3\alpha\beta\end{aligned}$$

Si $\beta = 1$ alors

$$\begin{aligned}\det\left(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\right) &= \alpha^2 - 4\alpha + 3\\ &= (\alpha - 1)(\alpha - 3)\end{aligned}$$

On sait que f est un isomorphisme si et seulement si $M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$ est inversible, et donc si et seulement si $\det\left(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\right) \neq 0$. Par suite, lorsque $\beta = 1$, f est un isomorphisme si et seulement si $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq 3$. Si maintenant $\beta = 3$, alors

$$\det\left(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\right) = \alpha^2 - 10\alpha + 27$$

Le discriminant Δ de ce polynôme du second degré en α vaut

$$\Delta = 10^2 - 4 \times 27 = -8$$

En particulier, $\Delta < 0$ et donc $\alpha \to \alpha^2 - 10\alpha + 27$ n'a pas de zéros dans $\mathbb{R}$. En d'autres termes, $\det\left(M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)\right) \neq 0$ pour tout α. Et donc, si $\beta = 3$, alors f est un isomorphisme pour toute valeur de α. □

Correction de l'exercice 1.25. On ne change pas le déterminant en soustrayant la ligne 1 aux lignes 2 à 4 de la matrice. La nouvelle matrice obtenue A' est donnée par

$$A' = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

On développe le déterminant suivant la dernière ligne. On trouve

$$\det(A) = \det(A') = -2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On redéveloppe suivant la dernière ligne et on trouve

$$\det(A) = \det(A') = 4\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Par suite, $\det(A) = -8$. □

Correction de l'exercice 1.26. Supposons $n = 2$ et posons $E = \mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ donné par

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Alors

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f^2) = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & d^2 + bc \end{pmatrix}$$

On veut donc

$$\begin{cases} a^2 + bc = -1 \\ b(a + d) = 0 \\ c(a + d) = 0 \\ d^2 + bc = -1 \end{cases}$$

Si on pose $a + d = 0$ le système se réduit à $a^2 + bc = -1$. On peut alors choisir $a = 1$, $d = -1$, $b = -2$ et $c = 1$. L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice de représentation dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vaut

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

vérifie alors que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$. Supposons maintenant que n est impair et que f endomorphisme tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$ existe. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $A = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ la matrice de représentation de f dans $\mathcal{B}$ (au départ et à l'arrivée). Comme $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_n$ (la matrice identité d'ordre la dimension n de E) on obtient que $A^2 = -\mathrm{Id}_n$. On a

$$\det(-\mathrm{Id}_n) = (-1)^n \ .$$

Donc $\det(A^2) = \det(A)^2 = (-1)^n$, ce qui n'est possible que si n est pair. Ainsi, en dimension impaire, il ne peut exister d'endomorphisme f tel que $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$. □

Correction de l'exercice 1.27. Supposons que $\det(A) = \pm 1$. Alors A est inversible et puisque A est à coefficients entiers, les cofacteurs de A sont aussi à coefficients entiers. Par suite A^{-1} est à coefficients entiers. Réciproquement, supposons que A est inversible et que A et A^{-1} sont toutes deux à coefficients entiers. Si n est la taille de A, alors $AA^{-1} = \mathrm{Id}_n$ et donc, en prenant le déterminant, $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$. Or $\det(A) \in \mathbb{Z}$ puisque A est à coefficients entiers et, de même, $\det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$ puisque A^{-1} est à coefficients entiers. On en déduit que $\det(A)$ divise 1 au sens de la division euclidienne, et donc que forcément $\det(A) = \pm 1$. □

Correction de l'exercice 1.28. On a $A(A^2 - A + \mathrm{Id}_n) = \mathrm{Id}_n$. Donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = A^2 - A + \mathrm{Id}_n$. Si A est à coefficients entiers, alors A^{-1} l'est aussi. D'après l'exercice précédent on doit donc avoir que $\det(A) = \pm 1$. Si $\det(A) > 0$, c'est que $\det(A) = 1$. $\square$

Correction de l'exercice 1.29. Les rangs possibles sont 0,1,2 ou 3. La seule sous matrice 3×3 de A est la matrice A elle-même. On a

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 15 + 24 + 24 - 27 - 16 - 20 = 0$$

et donc A n'est pas de rang 3. Par contre

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

est une sous matrice 2×2 de A (obtenue en supprimant les premières lignes et colonnes dans A), et

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0 \ .$$

Donc $\mathrm{Rg}(A) = 2$. $\square$

Correction de l'exercice 1.30. On calcule

$$\begin{aligned} \det A_{\alpha\beta} &= \alpha + \alpha\beta^2 + \alpha^2 - \alpha^2\beta - \alpha - \alpha\beta \\ &= \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta \\ &= \alpha(\alpha - \beta) + \alpha\beta(\beta - \alpha) \\ &= (\alpha - \beta)(\alpha - \alpha\beta) \\ &= \alpha(\alpha - \beta)(1 - \beta) \end{aligned}$$

Sachant que $A_{\alpha\beta}$ est inversible si et seulement si $\det A_{\alpha\beta} \neq 0$, on trouve que $A_{\alpha\beta}$ est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \beta$ et $\beta \neq 1$. Si $\alpha = \beta = 2$ alors A_{22} n'est pas inversible (cf. ci-dessus). Donc $\mathrm{Rg}(A_{22}) \neq 3$. Par contre, la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

est une sous matrice de A_{22}, obtenue en supprimant les 3ème lignes et colonnes dans A_{22}. On a $\det B = -2 \neq 0$. Donc $\mathrm{Rg}(A_{22}) \geq 2$. On en déduit que $\mathrm{Rg}(A_{22}) = 2$. $\square$

Correction de l'exercice 1.31. Pour montrer que $\mathrm{Rg}(A) \geq 2$ il suffit de trouver une sous matrice 2×2 dont le déterminant est non nul. Par exemple

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

est une sous matrice 2×2 de A. Son déterminant vaut $6 \neq 0$. Donc $\mathrm{Rg}(A) \geq 2$. Pour avoir que $\mathrm{Rg}(A) = 2$ il faut que tous les sous déterminants 3×3 soient nuls. On a 4 sous déterminants 3×3 possibles que l'on calcule. Les sous matrices 3×3 s'obtiennent par suppression d'une colonne de A. On calcule donc

$$\Delta_1 = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & b \\ 0 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 4(3 - b) \ ,$$

puis

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a & -1 & b \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -2a - 8b + 26 \ ,$$

puis

$$\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} a & 2 & b \\ 3 & 0 & -4 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 16a + 12b - 52 \ ,$$

puis enfin

$$\Delta_4 = \det \begin{pmatrix} a & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} = 4(1-a) \ .$$

On veut $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$. On a $\Delta_1 = 0 \Rightarrow b = 3$ et $\Delta_4 = 0 \Rightarrow a = 1$. On vérifie ensuite que les équations $\Delta_2 = 0$ et $\Delta_3 = 0$ sont bien réalisées pour ces valeurs de a et b. On trouve donc $a = 1$ et $b = 3$. □

Correction de l'exercice 1.32. Le déterminant de A vaut $-5 \neq 0$. Le rang de A est donc 3. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

est une sous matrice de B (obtenue en supprimant la 2nde colonne de B). Son déterminant vaut $-12 \neq 0$. Le rang de B vaut donc 3. Le déterminant de C vaut zéro. Donc le rang de C est au plus 2. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une sous matrice 2×2 de C (obtenue en supprimant la 3ème ligne et la 3ème colonne de C). Son déterminant vaut $1 \neq 0$. Le rang de C vaut donc 2.

(2) Notons $A = (a_{ij})$. Soit k le nombre de lignes non nulles de A. Alors

(i) $\forall i \geq k+1, \forall j, a_{ij} = 0$.

Clairement on en déduit que $\mathrm{Rg}(A) \leq k$ puisqu'une sous matrice carrée qui contiendrait plus de $k+1$ lignes aurait forcément une ligne nulle et serait donc de déterminant nul. Supposons que l'on trouve k colonnes de A formant une famille de k vecteurs linéairement indépendants. Alors, en regardant A comme la matrice de représentation d'une application linéaire entre espaces $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ (matrice de représentation que l'on prendra par exemple dans les bases canoniques de ses espaces), alors $\mathrm{Im}(f)$ contiendrait une famille libre de k vecteurs. On aurait donc $\mathrm{Rg}(f) \geq k$, et donc en particulier $\mathrm{Rg}(A) \geq k$. Soit en conclusion $\mathrm{Rg}(A) = k$, et pour résumer il suffit de trouver k colonnes de A formant une famille de vecteurs libres. Pour $1 \leq i \leq k$, on note j_i l'ordre du premier élément non nul sur la ième ligne:

(ii) $a_{ij_i} \neq 0$ et $a_{ij} = 0$ pour tout $j < j_i$.

On a alors aussi que

(iii) $a_{mj_i} = 0$ pour tout $m > i$.

On montre que les colonnes $j_1, j_2, \ldots, j_k$ sont les colonnes que nous recherchons. En considérant que la matrice A était à p lignes et q colonnes, on considère donc les vecteurs U_m, $m = 1, \ldots, k$, formés par les colonnes

$$U_j = \begin{pmatrix} a_{1j_m} \\ \vdots \\ a_{pj_m} \end{pmatrix} .$$

Supposons que

$$\sum_{m=1}^{k} \lambda_m U_m = 0 .$$

Alors

$$\sum_{m=1}^{k} \lambda_m a_{ij_m} = 0$$

pour tout $i = 1, \ldots, p$, et en fait pour tout $i = 1, \ldots, k$. D'un point de vue matriciel on a alors écrit que

$$\begin{pmatrix} a_{1j_1} & \ldots & a_{1j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{kj_1} & \ldots & a_{kj_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} .$$

La matrice carrée qui intervient dans cette équation est diagonale supérieure en raison de (iii) et sa diagonale est constituée des $a_{ij_i} \neq 0$ par (ii). Le déterminant d'une telle matrice est égal au produit des termes diagonaux (on le voit en développant suivant colonnes) et donc non nul. La matrice est ainsi inversible ce qui implique que tous les λ_m sont nuls. On a bien trouvé nos k colonnes formant une famille libre de vecteurs. $\square$

Correction de l'exercice 1.33. (1) On a $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$. On a donc le système

$$\begin{cases} -3x - y + z = 0 \\ 8x + 3y - 2z = 0 \\ -4x - y + 2z = 0 . \end{cases}$$

On a les équivalences

$$\begin{cases} 3x + y = z \\ 8x + 3y = 2z \\ 4x + y = 2z . \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = z \\ 8x + 3y = 2z \\ x = z . \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2z \\ x = z . \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f) &= \{(x, y, z) \ / \ x = z,\ y = -2z\} \\ &= \{(z, -2z, z) \ / \ z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(1, -2, 1) \ / \ z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

et on voit que $\mathrm{Ker}(f)$ est la droite vectorielle de base $(1, -2, 1)$. L'application linéaire f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Comme $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$, f n'est pas injective.

(2) Le théorème du rang nous dit que

$$\dim\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Rg}(f) = 3 \ .$$

Comme $\dim\mathrm{Ker}(f) = 1$ on voit que $\mathrm{Rg}(f) = 2$. L'application linéaire f est surjective si et seulement si $\mathrm{Rg}(f) = 3$. Donc f n'est pas surjective.

(3) Comme $\mathrm{Rg}(f) = 2$ il suffit de trouver une famille libre composée de deux vecteurs dans $\mathrm{Im}(f)$. On a $f(0,1,0) = (-1,3,-1)$ et $f(0,0,1) = (1,-2,2)$. De plus

$$\lambda(-1,3,-1) + \mu(1,-2,2) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \mu - \lambda = 0 \\ 3\lambda - 2\mu = 0 \end{cases}$$

et on trouve bien que forcément $\lambda = \mu = 0$. En conclusion, $\mathrm{Im}(f)$ est le plan vectoriel de base $((-1,3,-1),(1,-2,2))$.

(4) Par définition des matrices de représentation,

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

puisque $f(e_1) = -3e_1 + 8e_2 - 4e_3$, $f(e_2) = -e_1 + 3e_2 - e_3$ et $f(e_3) = e_1 - 2e_2 + 2e_3$.

(5) Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} & \lambda\tilde{e}_1 + \mu\tilde{e}_2 + \nu\tilde{e}_3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\mu+\nu)e_1 + (\lambda+\nu)e_2 + (\lambda+\mu)e_3 = 0 \ . \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{B}$ est une base on trouve donc que

$$\begin{cases} \mu + \nu = 0 \\ \lambda + \nu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

Il s'ensuit facilement que forcément $\lambda = \mu = \nu = 0$ (par exemple la seconde équation moins la première donnent que $\lambda = \mu$. La troisième donne ensuite $\lambda = \mu = 0$. En revenant à la première il suit $\nu = 0$). La famille $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est donc libre. Comme on est en dimension 3 et que cette famille a trois vecteurs, il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}^3$.

(6) Par définition,

$$M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Pour calculer l'inverse de cette matrice on va résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

On a les équivalences,

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} y + z = X \\ x + z = Y \\ x + y = Z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = X - z \\ x = Y - z \\ X + Y - 2z = Z \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} z = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y - \frac{1}{2}Z \\ y = \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}Z \\ x = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}Z \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On trouve donc que

$$M^{-1}_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et on a aussi que $M^{-1}_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}} = M_{\tilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}}$.

(7) La formule de changement de base donne que

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f) = M^{-1}_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}} \ .$$

On a

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 6 & 11 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

et ensuite

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 6 & 11 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 0 & -10 & -20 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} \ .$$

On trouve donc que

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \ .$$

□

Correction de l'exercice 1.34. On a

$$A^2 - 4A + 3\mathrm{Id}_3 = (A - 2\mathrm{Id}_3)^2 - \mathrm{Id}_3$$

et donc

$$\det(B)^2 = \det(\mathrm{Id}_3) = 1 \ .$$

Comme $\det(B) \geq 0$, on en déduit que $\det(B) = 1$. □

Correction de l'exercice 1.35. On commence par regarder si A est de rang 4 ou pas, et donc on commence par le calcul du déterminant de A. On développe suivant la première ligne. On a

$$\begin{aligned}\det(A) = \det\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 2 & 1 & 4\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix} - 7\det\begin{pmatrix}-2 & 1 & 5\\ -1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\\ + 2\det\begin{pmatrix}-2 & 1 & 5\\ -1 & 2 & 4\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix} - 5\det\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

et

$$\begin{array}{c}\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 2 & 1 & 4\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix} = 0\ ,\ \det\begin{pmatrix}-2 & 1 & 5\\ -1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} = 0\\ \det\begin{pmatrix}-2 & 1 & 5\\ -1 & 2 & 4\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix} = 0\ ,\ \det\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix} = 0\end{array} .$$

On en déduit que $\det(A) = 0$. Donc $\mathrm{Rg}(A) \neq 4$. On va maintenant chercher le nombre maximal de colonnes formant une famille libre dans $\mathbb{R}^4$. On sait déjà que les 4 colonnes ne forment pas une famille libre dans $\mathbb{R}^4$ (sinon le rang de la matrice serait égal à 4). Reste 4 familles de 3 colonnes à regarder. Soient λ, μ, ν des réels tels que

$$\lambda\begin{pmatrix}7\\1\\2\\4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}5\\5\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} .$$

Alors

$$\begin{cases}7\lambda + 2\mu + 5\nu = 0\\ \lambda + \mu + 5\nu = 0\\ 2\lambda + \mu + 4\nu = 0\\ 4\lambda + \mu + 2\nu = 0\end{cases}$$

On a les équivalences

$$\begin{cases}7\lambda + 2\mu + 5\nu = 0\\ \lambda + \mu + 5\nu = 0\\ 2\lambda + \mu + 4\nu = 0\\ 4\lambda + \mu + 2\nu = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6\lambda + \mu = 0\\ \lambda + \mu + 5\nu = 0\\ 2\lambda + \mu + 4\nu = 0\\ \lambda = \nu\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mu = -6\nu\\ \lambda = \nu\end{cases}$$

de sorte que

$$\begin{pmatrix}7\\1\\2\\4\end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\5\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

et la famille constituée des trois dernières colonnes n'est pas libre. On supprime maintenant la seconde colonne. Soient λ, μ, ν des réels tels que

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu + 5\nu = 0 \\ -2\lambda + \mu + 5\nu = 0 \\ -\lambda + \mu + 4\nu = 0 \\ \lambda + \mu + 2\nu = 0 \end{cases}$$

On a les équivalences

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu + 5\nu = 0 \\ -2\lambda + \mu + 5\nu = 0 \\ -\lambda + \mu + 4\nu = 0 \\ \lambda + \mu + 2\nu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu + 3\nu = 0 \\ -\lambda + \nu = 0 \\ -\lambda + \mu + 4\nu = 0 \\ \lambda + \mu + 2\nu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -3\nu \\ \lambda = \nu \end{cases}$$

de sorte que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et la famille constituée des colonnes 1, 3 et 4 n'est pas libre. On supprime alors la 3ème colonne. Soient λ, μ, ν des réels tels que

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{cases} \lambda + 7\mu + 5\nu = 0 \\ -2\lambda + \mu + 5\nu = 0 \\ -\lambda + 2\mu + 4\nu = 0 \\ \lambda + 4\mu + 2\nu = 0 \end{cases}$$

On a les équivalences

$$\begin{cases} \lambda + 7\mu + 5\nu = 0 \\ -2\lambda + \mu + 5\nu = 0 \\ -\lambda + 2\mu + 4\nu = 0 \\ \lambda + 4\mu + 2\nu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu + \nu = 0 \\ -\lambda + 2\nu = 0 \\ \lambda + 4\mu + 2\nu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -\nu \\ \lambda = 2\nu \end{cases}$$

de sorte que

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et la famille constituée des colonnes 1, 2 et 4 n'est pas libre. Reste pour finir à supprimer la dernière colonne. Soient λ, μ, ν des réels tels que

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{cases} \lambda + 7\mu + 2\nu = 0 \\ -2\lambda + \mu + \nu = 0 \\ -\lambda + 2\mu + \nu = 0 \\ \lambda + 4\mu + \nu = 0 \end{cases}$$

On a les équivalences

$$\begin{cases} \lambda + 7\mu + 2\nu = 0 \\ -2\lambda + \mu + \nu = 0 \\ -\lambda + 2\mu + \nu = 0 \\ \lambda + 4\mu + \nu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -\lambda + 2\mu + \nu = 0 \\ 3\mu + \nu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ \nu = -3\mu \end{cases}$$

de sorte que

$$-\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et la famille constituée des 3 premières colonnes n'est elle non plus pas libre. On en déduit que $\mathrm{Rg}(A) \neq 3$. Par contre, en supprimant les 2 dernières lignes et les 2 dernières colonnes de A on voit que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est une sous matrice 2×2 de A. On a $\det(B) = 15 \neq 0$ et donc $\mathrm{rg}(A) \geq 2$. On en déduit que $\mathrm{Rg}(A) = 2$. □

Correction de l'exercice 1.36. On écrit

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

On a alors que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} .$$

On veut donc que

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

ce qui donne $c = 0$ et $a = d$. Les matrices B qui commutent avec A sont donc les matrices du type

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} ,$$

où a et b sont des réels quelconques. $\square$

Correction de l'exercice 1.37. Par symétrie il suffit de montrer que si λ est valeur propre de $g\circ f$, alors λ est aussi valeur propre de $f\circ g$. Soit donc λ une valeur propre de $g\circ f$ et soit $u \neq 0$ un vecteur propre non nul associé. On a $(g\circ f)(u) = \lambda u$ et donc

$$(f \circ g \circ f)(u) = (f \circ g)\left(f(u)\right) = \lambda f(u) \ .$$

Si $f(u) \neq 0$ alors λ est valeur propre de $f \circ g$ avec $f(u)$ comme vecteur propre associé. Supposons maintenant que $f(u) = 0$. Alors $\lambda = 0$ et f n'est pas injectif (puisque $u \neq 0$). On veut en fait montrer que $f \circ g$ n'est pas injectif pour avoir que 0 est aussi valeur propre de $f \circ g$. Or $f \circ g$ injectif entraîne que g est forcément injectif, et puisque E est de dimension finie, cela entraîne à son tour que g est un isomorphisme de E. De même $f \circ g$ injectif équivaut à $f \circ g$ isomorphisme de E. Reste à remarquer que $f \circ g$ isomorphisme et g isomorphisme entraînent que f est lui aussi un isomorphisme, ce qui est impossible si f n'est pas injectif. Donc $f \circ g$ n'est pas injectif et $\lambda = 0$ est aussi valeur propre de $f \circ g$. On a démontré que dans tous les cas, si λ est valeur propre de $g \circ f$, alors λ est aussi valeur propre de $f \circ g$. $\square$

Correction de l'exercice 1.38. (1) Soit λ une valeur propre de f et soit $u \neq 0$ un vecteur propre associé. On a $f^3(u) = f^2(u)$ et donc $\lambda^3 u = \lambda^2 u$. D'où $\lambda = 0$ ou alors $\lambda = 1$.

(2) Supposons que 0 n'est pas valeur propre de f. Alors f est inversible puisque $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Mais $f^3 \equiv f^2$ implique alors que $f \equiv \mathrm{Id}_E$, ce que nous supposons faux. Donc 0 est bien valeur propre de f. Si 1 n'est pas valeur propre de f alors $f - \mathrm{Id}_E$ est inversible car, dans ce cas, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \{0\}$. On a $f^3 \equiv f^2$ et donc $(f - \mathrm{Id}_E) \circ f^2 \equiv 0$. Comme $f - \mathrm{Id}_E$ est inversible, cela entraîne que $f^2 \equiv 0$, ce que nous avons là encore supposé comme étant faux. Donc 1 est bien valeur propre de f.

(3) Si f était diagonalisable on aurait une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E composée de vecteurs propres. Donc, en vertue de ce qui a été dit plus haut, $f(e_i) = 0$ ou $f(e_i) = e_i$. Mais $f(e_i) = 0$ entraîne $f^2(e_i) = 0$ et $f(e_i) = e_i$ entraîne $f^2(e_i) = e_i$. Donc, pour tout i, $f^2(e_i) = f(e_i)$. Les endomorphismes f^2 et f coïncident donc sur une base. Ils sont donc égaux, ce que nous avons là encore supposé comme étant faux. Donc f n'est pas diagonalisable.

(4) Il est clair que $\mathrm{Ker}(f^2) \cap \mathrm{Im}(f^2) = \{0\}$ car si $y \in \mathrm{Im}(f^2)$ alors $y = f^2(x)$ pour un certain x, et si $y \in \mathrm{Ker}(f^2)$ alors $f^2(y) = 0$. Or $f^2(y) = f^4(x) = f \circ f^3(x) = f^3(x) = f^2(x) = y$ puisque $f^3 \equiv f^2$. Par suite $y = 0$. Il suffit donc de montrer que $E = \mathrm{Ker}(f^2) + \mathrm{Im}(f^2)$. On écrit que pour tout $x \in E$,

$$x = (x - f^2(x)) + f^2(x) \ .$$

On a $f^2(x) \in \mathrm{Im}(f^2)$ tandis que

$$f^2(x - f^2(x)) = f^2(x) - f^4(x) = f^2(x) - f \circ f^3(x) = f^2(x) - f^2(x) = 0$$

puisque $f^3 \equiv f^2$, et ainsi $x - f^2(x) \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Donc tout $x \in E$ s'écrit bien comme somme d'un vecteur de $\mathrm{Ker}(f^2)$ et d'un vecteur de $\mathrm{Im}(f^2)$. D'où $E = \mathrm{Ker}(f^2) + \mathrm{Im}(f^2)$ puis, comme $\mathrm{Ker}(f^2) \cap \mathrm{Im}(f^2) = \{0\}$, $E = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Im}(f^2)$. $\square$

Correction de l'exercice 1.39. **(1)** Soit λ une valeur propre de A et soit $u = (u_1, \ldots, u_n)$ un vecteur propre (non nul) associé à λ. Alors

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j = \lambda u_i$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$. Soit $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $|u_{i_0}| = \max_{i=1,\ldots,n} |u_i|$. On a $|u_{i_0}| > 0$ et

$$|\lambda||u_{i_0}| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} |u_j| \leq |u_{i_0}| \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} = |u_{i_0}| \ .$$

Donc $|\lambda| \leq 1$.

(2) On vérifie que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

puisque $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Donc 1 est bien valeur propre de A et $(1, \ldots, 1)$ est un vecteur propre associé. □

Correction de l'exercice 1.40. **(1)** Tout $x \in E$ s'écrit $x = (x - f(x)) + f(x)$ et on a que $f(x - f(x)) = f(x) - f^2(x) = 0$. Donc $x - f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$ et comme $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ on a bien que $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. Il reste à montrer que la somme est directe et donc que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Or si $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ alors $x = f(y)$ pour un certain y et $f(x) = 0$. Donc $f(f(y)) = 0$ et comme $f^2(y) = f(y)$ on a que $f(y) = 0$ puis on obtient que $x = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$ et $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

(2) On commence par remarquer que pour tout $x \in \mathrm{Im}(f)$, $f(x) = x$. En effet, si $x \in \mathrm{Im}(f)$ alors $x = f(y)$ pour un certain y et donc $f(x) = f^2(y) = f(y) = x$. Comme $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ on a que $\mathrm{dimKer}(f) = n - r$ et si $(e_1, \ldots, e_r)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$, alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. On a alors $f(e_i) = e_i$ pour tout $i = 1, \ldots, r$ puisque les $e_i \in \mathrm{Im}(f)$ pour tout $i = 1, \ldots, r$ et puisque $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{Im}(f)$. Par ailleurs, par construction, $f(e_i) = 0$ pour tout $i > r$ puisqu'alors $e_i \in \mathrm{Ker}(f)$. Dans cettte base base $\mathcal{B}$ on a

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

où I_r est la matrice identité $r \times r$ et les 0 sont les matrices nulles $r \times (n-r)$, $(n-r) \times r$ et $(n-r) \times (n-r)$. Comme cette matrice est diagonale, f est diagonalisable. □

Correction de l'exercice 1.41. **(1)** Soit $x \in E$ quelconque. On pose $x_1 = f(x) + x$ et $x_2 = x - f(x)$. On a alors $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = -x_2$. Comme $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ on voit que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$. Reste à montrer que la somme est directe et donc que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) = \{0\}$. Or si $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ alors $f(x) = x$ et $f(x) = -x$ de sorte que $2x = 0$ et donc $x = 0$. Ainsi donc $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) = \{0\}$ et la somme est directe.

(2) Soit $s = \mathrm{dimKer}(f - \mathrm{Id}_E)$. On a alors $\mathrm{dimKer}(f + \mathrm{Id}_E) = n - s$. Soit $(e_1, \ldots, e_s)$ une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et soit $(e_{s+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$. Alors

$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E puisque $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$. Pour $1 \leq i \leq s$, $f(e_i) = e_i$ et pour $s+1 \leq i \leq n$, $f(e_i) = -e_i$. On en déduit

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & -I_{n-s} \end{pmatrix} .$$

En particulier, f est diagonalisable puisque cette matrice est diagonale. $\square$

Correction de l'exercice 1.42. (1) On a

$$f\big(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3\big) = \big(x_1 + 4x_2 + 4x_3\big)e_1 + \big(4x_1 + 7x_2 + 8x_3\big)e_2 - \big(4x_1 + 8x_2 + 9x_3\big)e_3$$

On trouve

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 + 4e_2 - 4e_3 \\ f(e_2) &= 4e_1 + 7e_2 - 8e_3 \\ f(e_3) &= 4e_1 + 8e_2 - 9e_3 \end{aligned}$$

Par suite,

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \\ -4 & -8 & -9 \end{pmatrix}$$

Si P est le polynôme caractéristique de f on a

$$P(X) = \det \begin{pmatrix} 1-X & 4 & 4 \\ 4 & 7-X & 8 \\ -4 & -8 & -9-X \end{pmatrix}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P(X) &= -(X+9)(X-7)(X-1) - 8 \times 16 - 8 \times 16 \\ &\quad + 16(7-X) + 64(1-X) + 16(X+9) \\ &= -(X+9)(X-7)(X-1) - 2 \times 8 \times 16 \\ &\quad + 7 \times 16 + 64 + 9 \times 16 - 16X - 64X + 16X \\ &= -(X+9)(X-7)(X-1) - 64X + 64 \\ &= -(X-1)\left((X+9)(X-7) + 64\right) \\ &= -(X-1)(X^2 + 2X + 1) \\ &= -(X-1)(X+1)^2 \end{aligned}$$

Donc f a deux valeurs propres qui sont -1 et 1.

(2) On a

$$E_1 = \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \\ -4 & -8 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

On a les équivalences,

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = x \\ 4x + 7y + 8z = y \\ -4x - 8y - 9z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 2x + 4y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}E_1 &= \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ y + z = 0, 2x + z = 0\} \\ &= \left\{-\frac{1}{2}ze_1 - ze_2 + ze_3 \ / \ z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{z\left(-\frac{1}{2}e_1 - e_2 + e_3\right) \ / \ z \in \mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

On pose

$$\tilde{e}_1 = -\frac{1}{2}e_1 - e_2 + e_3$$

et alors E_1 est la droite vectorielle de base $(\tilde{e}_1)$. De même, on a

$$E_{-1} = \left\{xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \\ -4 & -8 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\}$$

On a les équivalences,

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = -x \\ 4x + 7y + 8z = -y \\ -4x - 8y - 9z = -z \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y + 2z = 0$$

Par suite,

$$\begin{aligned}E_{-1} &= \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ x + 2y + 2z = 0\} \\ &= \{-2(y + z)e_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-2e_1 + e_2) + z(-2e_1 + e_3) \ / \ y, z \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

On pose

$$\tilde{e}_2 = -2e_1 + e_2 \text{ et } \tilde{e}_3 = -2e_1 + e_3$$

Alors $(\tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est une famille génératrice de E_{-1}. La famille est aussi libre car

$$\begin{aligned}&\lambda\tilde{e}_2 + \mu\tilde{e}_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow -2(\lambda + \mu)e_1 + \lambda e_2 + \mu e_3 = 0\end{aligned}$$

et puisque (e_1, e_2, e_3) est une base, on trouve $\lambda = \mu = 0$. En conclusion, E_{-1} est le plan vectoriel de base $(\tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$.

(3) Clairement f est diagonalisable puisque les espaces propres sont en somme directe, puisque bien sur $E_1 + E_{-1} \subset E$ et puisque, la somme $E_1 \oplus E_{-1}$ étant directe,

$$\begin{aligned}\text{dim}E_1 + \text{dim}E_{-1} &= 1 + 2 \\ &= 3 \\ &= \text{dim}E\end{aligned}$$

de sorte que $E = E_1 \oplus E_{-1}$. De plus $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est alors une base de E et cette base diagonalise f au sens où

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si $A = M_{\mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}}$ alors

$$A^{-1}M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)A = M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$$

Par définition,

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) On a

$$A^{-1} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) A = M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$$

et donc

$$A^{-1} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^6 A = M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)^6$$

De plus

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)^6 = \begin{pmatrix} 1^6 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^6 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^6 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_3$$

Donc

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^6 &= A M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)^6 A^{-1} \\ &= A \mathrm{Id}_3 A^{-1} \\ &= A A^{-1} \\ &= \mathrm{Id}_3 \end{aligned}$$

et ensuite $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^7 = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^6 M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$.

(5) Pour calculer A^{-1} on procède ici avec les équivalences de systèmes:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On a

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 2y - 2z = X \\ -x + y = Y \\ x + z = Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2y + 2z = -X \\ -x + y = Y \\ y + z = Y + Z \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2(Y + Z) = -X \\ -x + y = Y \\ x + z = Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x = -X - 2Y - 2Z \\ y = Y + x \\ z = Y + Z - y \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2X - 4Y - 4Z \\ y = -2X - 3Y - 4Z \\ z = 2X + 4Y + 5Z \end{cases}$$

Par suite,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

et donc (cf. ci-dessus)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

□

Correction de l'exercice 1.43. **(1)** On passe facilement des matrices triangulaires supérieures aux matrices triangulaires inférieures en prenant la transposée. La transposée n'affectant pas le déterminant on peut donc se restreindre au cas des matrices triangulaires inférieures

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

En développant le déterminant suivant la première ligne on trouve que

$$\det A_n = a_{11} \det A_{n-1} \qquad (\star)$$

où A_{n-1} est la matrice triangulaire inférieure d'ordre $n-1$ obtenue à partir de A_n en supprimant la première ligne et la première colonne de A_n. Donc la matrice des a_{ij}, $i, j \geq 2$. La relation $(\star)$ permet de mettre en place une preuve par récurrence. Hypothèse de récurrence: Le déterminant d'une matrice de rang n triangulaire inférieure est égal au produit de ses termes diagonaux. Amorce: on vérifie l'hypothèse au rang $n = 1$ (cas d'un réel) ou alors on commence au rang $n = 2$ pour pouvoir véritablement parler de matrice triangulaire. On a

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = ac$$

ce qui vérifie l'hypothèse de récurrence au rang $n = 2$. Pour démontrer l'hérédité, on suppose l'hypothèse vraie au rang n. Soit A une matrice triangulaire inférieure d'ordre $n+1$. En vertue de $(\star)$, $\det(A) = a_{11}\det(B)$ où B est la matrice triangulaire inférieure d'ordre n constituée des a_{ij}, $i \geq 2$ et $j \geq 2$. Par hypothèse de récurrence,

$$\det(B) = a_{22} \times \cdots \times a_{n+1n+1}$$

Par suite

$$\det(A) = a_{11} \times \cdots \times a_{n+1n+1}$$

ce qui achève la récurrence.

(2) L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$. La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$. On calcule $f(1) = 1$ puis pour $p \geq 1$,

$$f(X^p) = X^p - p(1+X)X^{p-1} = -pX^{p-1} + (1-p)X^p \ .$$

Si on écrit les coordonnées en vecteurs colonnes on voit que

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \ f(X) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \ f(X^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \ \ldots \text{etc.}$$

La matrice $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = (a_{ij})$ de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est donc donnée par

$$a_{ij} = 0 \text{ si } i > j \ ; \ a_{ii} = 1 - i \ ; a_{ii+1} = -i \ ; a_{ij} = 0 \text{ si } j > i + 1$$

C'est donc une matrice triangulaire supérieure dont les termes sur la diagonale sont $1, 0, -1, -2, \ldots, -n+1$. En raison de (1), le polynôme caractéristique de f est donné par

$$\begin{aligned} f(X) &= \det\left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) - X\mathrm{Id}_{n+1}\right) \\ &= (-1)^{n+1}(X-1)X(X+1)(X+2)\ldots(X+n-1) \end{aligned}$$

et ces termes sur la diagonale sont précisément les valeurs propres de f. Comme il y en a $n+1$ distinctes en dimension $n+1$, c'est que f est diagonalisable. □

Correction de l'exercice 1.44. On a

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

de sorte que, par induction (ou par récurrence),

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} .$$

Pour calculer A^n on va chercher à diagonaliser A. Si P est le polynôme caractéristique de A,

$$P(X) = (X-2)(X+\frac{2}{3}) + \frac{5}{3} = X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{1}{3} = (X-1)(X-\frac{1}{3}) .$$

Il y a deux valeurs propres disctinctes qui sont 1 et $\frac{1}{3}$. Donc A est diagonalisable. On peut considérer que A est le matrice de représentation, dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$. On cherche les espaces propres. Si E_1 et $E_{1/3}$ sont les espaces propres associés à 1 et $\frac{1}{3}$,

$$E_1 = \left\{ xe_1 + ye_2 / A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} .$$

On trouve comme équation $3x + 2y = 0$ et donc E_1 est la droite vectorielle de base (vecteur directeur) $\tilde{e}_1 = -2e_1 + 3e_2$. Pour ce qui est de $E_{1/3}$ on a

$$E_{1/3} = \left\{ xe_1 + ye_2 / A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} .$$

On trouve comme équation $5x + 2y = 0$ et donc $E_{1/3}$ est la droite vectorielle de base (vecteur directeur) $\tilde{e}_2 = -2e_1 + 5e_2$. Soit

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} .$$

On a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} .$$

On calcule $\det(P) = -4$ puis

$$P^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} .$$

On a

$$\left(P^{-1}AP\right)^n = P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix} .$$

Donc

$$\begin{aligned} A^n &= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10-\frac{6}{3^n} & 4-\frac{4}{3^n} \\ -15+\frac{15}{3^n} & -6+\frac{10}{3^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Au final on a donc

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{4}\left(10-\frac{6}{3^n}\right)x_0 + \frac{1}{4}\left(4-\frac{4}{3^n}\right)y_0 \\ y_n = \frac{1}{4}\left(-15+\frac{15}{3^n}\right)x_0 + \frac{1}{4}\left(-6+\frac{10}{3^n}\right)y_0 \ . \end{cases}$$

□

Correction de l'exercice 1.45. (1) Dire que λ est valeur propre de f c'est dire qu'il existe $u \in E\backslash\{0\}$ tel que $f(u) = \lambda u$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a alors

$$f^p(u) = \lambda^p u$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P(f).(u) &= \sum_{i=0}^{k} a_i f^i(u) \\ &= \sum_{i=0}^{k} a_i \lambda^i u \end{aligned}$$

et on voit que $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(f)$. Dire que f est diagonalisable c'est dire qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E qui est constituée de vecteurs propres de f. Le petit calcul ci-dessus montre que si u est vecteur propre de f alors u est aussi vecteur propre de $P(f)$. La base $\mathcal{B}$ est donc aussi constituée de vecteurs propres de $P(f)$. Par suite $P(f)$ est diagonalisable dès que f l'est.

(2) La matrice de représentation de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Si on note Q le polynôme caractéristique de f alors

$$\begin{aligned} Q(X) &= \det\begin{pmatrix} 1-X & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1-X \end{pmatrix} \\ &= (X+1)(X-1)+2 \\ &= X^2+1 \end{aligned}$$

Donc f n'a pas de valeurs propres réelles. On en déduit que f n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. La matrice de représentation dans $\mathcal{B}$ de $f^2 = f \circ f$ est donnée (cf. cours) par $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f^2) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^2$. Donc

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f^2) &= \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$ et que, bien évidemment, f^2 est diagonalisable. Par suite, pour P un polynôme, et f un endomorphisme, on peut très bien avoir que $P(f)$ est diagonalisable sans pour autant que f le soit. □

Correction de l'exercice 1.46. Le polynôme caractéristique P d'un endomorphisme f s'écrit toujours $X^2 - \mathrm{tr}(f)X + \det(f)$ (cf. cours) et donc, en termes de matrices, si $A = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$, on obtient que

$$P(A) = A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 \ .$$

Il s'agit donc bien de vérifier que $P(A) = 0$. On écrit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ .$$

On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} \ ,$$

$\mathrm{tr}(A) = a + d$ et $\det(A) = ad - bc$. Donc

$$\begin{aligned}
&A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 \\
&= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .
\end{aligned}$$

□

Correction de l'exercice 1.47. On calcule le polynôme caractéristique de A, à savoir, étant donné E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une base de E, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f de E défini par $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = A$. Posons

$$P(X) = \det \begin{pmatrix} -1-X & 1 & 2 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 1 & -4 & -1-X \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned}
P(X) &= -(X-2)(X+1)^2 + 8 + 1 - 2(2-X) - 4(1+X) - (1+X) \\
&= -(X-2)(X+1)^2 - 3X \\
&= -(X-2)(X^2+2X+1) - 3X \\
&= -X^3 - 2X^2 - X + 2X^2 + 4X + 2 - 3X \\
&= 2 - X^3
\end{aligned}$$

Le théorème de Cayley-Hamilton nous donne alors que

$$A^3 = 2\mathrm{Id}_3$$

Par suite

$$A^6 = 4\mathrm{Id}_3 \text{ et } A^7 = A^6 A = 4A \ .$$

□

Correction de l'exercice 1.48. Soit P le polynôme caractéristique de f. On a

$$\begin{aligned}P(X) &= \det\begin{pmatrix}-X & 1\\ -m & 1+m-X\end{pmatrix}\\ &= X(X-m-1)+m\\ &= X^2-(m+1)X+m\ .\end{aligned}$$

On constate que 1 et m sont les deux racines de P. Donc

$$P(X) = (X-1)(X-m)\ .$$

Si $m \neq 1$ alors P a deux racines distinctes. En dimension deux (ce qui est le cas ici) cela entraîne que f est diagonalisable. En effet, si E_1 et E_m sont les deux espaces propres de f, alors $\dim(E_1) \geq 1$, $\dim(E_m) \geq 1$, $\dim(E_1 \oplus E_M) \leq 2$ (car $E_1 \oplus E_m \subset \mathbb{R}^2$) et, puisque la somme est directe, $\dim(E_1 \oplus E_m) = \dim(E_1) + \dim(E_m)$. Donc, forcément, $\dim(E_1) + \dim(E_m) = 2$ et f est bien diagonalisable (plus généralement si un endomorphisme a n valeurs propres distinctes en dimension n alors il est diagonalisable et chacun des espaces propres est de dimension 1, la preuve en dimension n étant identique à celle en dimension 2). Si par contre $m = 1$, alors f n'a qu'une valeur propre 1. Si f était diagonalisable il existerait une base $\tilde{\mathcal{B}}$ de $\mathbb{R}^2$ pour laquelle

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

et donc f ne serait en fait rien d'autre que l'application identité de $\mathbb{R}^2$. On devrait donc aussi avoir que $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Id}_2$. Or pour $m = 1$,

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

qui n'est pas la matrice identité. Donc, en conclusion, f est diagonalisable si et seulement si $m \neq 1$. □

Correction de l'exercice 1.49. Soit P le polynôme caractéristique de f. On a

$$\begin{aligned}P(X) &= \det\begin{pmatrix}1+m-X & 1+m & 1\\ -m & -m-X & -1\\ m & m-1 & -X\end{pmatrix}\\ &= X(X+m)(1+m-X) - m(m-1) - m(1+m)\\ &\quad + m(m+X) + (m-1)(1+m-X) - m(1+m)X\\ &= X(X+m)(1+m-X) + X - m(1+m)X - 1\\ &= X(-X^2+X+m(1+m)) + X - m(1+m)X - 1\\ &= -X^3+X^2+X-1\\ &= -(X-1)(X^2-1)\\ &= -(X-1)^2(X+1)\ .\end{aligned}$$

Les valeurs propres de f sont donc -1 et 1. Soient E_{-1} et E_1 les espaces propres associés. On sait que $\dim(E_{-1}) \geq 1$ et que (cf. cours) $\dim(E_{-1}) \leq 1$. Donc $\dim(E_{-1}) = 1$. On a aussi $\dim(E_1) \geq 1$ et (cf. cours) $\dim(E_1) \leq 2$ (car la racine 1 est de multiplicité 2). Si $\dim(E_1) = 1$ alors $\dim(E_{-1}) + \dim(E_1) < 3$

et f n'est pas diagonalisable. Si $\dim(E_1) = 2$ alors $\dim(E_{-1}) + \dim(E_1) = 3$ et f est diagonalisable. On cherche donc les m pour lesquels $\dim(E_1) = 2$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On a

$$E_1 = \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ \begin{pmatrix} m & 1+m & 1 \\ -m & -m-1 & -1 \\ m & m-1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

On écrit que

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} m & 1+m & 1 \\ -m & -m-1 & -1 \\ m & m-1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} mx + (m+1)y + z = 0 \\ mx + (m-1)y - z = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} mx + (m+1)y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

par substitution de la seconde équation à la première. On trouve donc comme système

$$\begin{cases} m(x+y) = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} .$$

Si $m \neq 0$ alors $y = -x$ et $z = -x$. Donc

$$E_1 = \{x(e_1 - e_2 - e_3), x \in \mathbb{R}\}$$

de sorte que E_1 est la droite vectorielle de base $e_1 - e_2 - e_3$. En particulier, $\dim(E_1) = 1$ et f n'est donc pas diagonalisable si $m \neq 0$. Si par contre $m = 0$, seule l'équation $y + z = 0$ "survit" et donc

$$E_1 = \{xe_1 + y(e_2 - e_3), x, y \in \mathbb{R}\} .$$

Dans ce cas E_1 est le plan vectoriel de base $(e_1, e_2 - e_3)$ puisque la famille est clairement génératrice pour E_1, mais aussi libre comme on le vérifie facilement. Dans ce cas $\dim(E_1) = 2$ et f est diagonalisable. En conclusion f est diagonalisable si et seulement si $m = 0$. □

Correction de l'exercice 1.50. Diagonaliser A c'est trouver M inversible et D diagonale telles que $M^{-1}AM = D$. On commence par calculer le polynôme caractéristique P de A. On a

$$\begin{aligned} P(X) &= \det \begin{pmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & -1 & 2-X \end{pmatrix} \\ &= -(X-2)(X-1)^2. \end{aligned}$$

Les deux valeurs propres de A sont donc 1 et 2. On note $E_1 \subset \mathbb{R}^3$ et $E_2 \subset \mathbb{R}^3$ les espaces propres associés aux valeurs propres 1 et 2. On a

$$E_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

et

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y + 2z = z$$
$$\Leftrightarrow y = x + z\ .$$

Donc

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = x + z\right\} \\ &= \{(x, x + z, z), x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 1, 0) + z(0, 1, 1), x, z \in \mathbb{R}\}\ . \end{aligned}$$

Soient $u = (1, 1, 0)$ et $v = (0, 1, 1)$. Alors (u, v) est une famille génératrice pour E_1. La famille (u, v) est libre puisque

$$\lambda u + \mu v = 0$$

entraîne que $\mu = 0$ et $\nu = 0$. Donc E_1 est le plan vectoriel de base (u, v). On a de façon analogue,

$$E_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right\}$$

et

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x\\ y = 2y\\ x - y + 2z = 2z\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0\\ y = 0\end{cases}$$

Donc

$$E_2 = \{(0, 0, z), z \in \mathbb{R}\}$$

et on voit que E_2 est la droite vectorielle de vecteur directeur $w = (0, 0, 1)$. On a $\dim(E_1) + \dim(E_2) = 3$ et donc A est diagonalisable et (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit M la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à cette base (u, v, w). Alors

$$M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

et si

$$D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

alors $M^{-1}AM = D$. □

Correction de l'exercice 1.51. Clairement $A_{i,i}$ est diagonalisable pour tout i puisque $A_{i,i}$ est diagonale. Pour $i \neq j$, $A_{i,j}$ est une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure selon que $i < j$ ou $i > j$) et le polynôme caractéristique de $A_{i,j}$ vaut donc $P(X) = (-1)^n X^n$. En particulier, $A_{i,j}$ n'a qu'une seule valeur propre qui est 0. Si $A_{i,j}$ était diagonalisable il s'agirait de la matrice nulle puisque $M^{-1}A_{i,j}M = 0$ entraîne clairement que $A = 0$. Comme $A_{i,j}$ n'est pas la matrice nulle, on en déduit que $A_{i,j}$ n'est pas diagonalisable pour $i \neq j$. Ainsi, parmi les matrices élémentaires, seules les matrice $A_{i,i}$ sont diagonalisables. $\square$

Correction de l'exercice 1.52. (1) Soit E_λ un espace propre pour g. Alors E_λ est constitué des x qui satisfont que $g(x) = \lambda x$. Pour $x \in E_\lambda$, on a

$$g\left(f(x)\right) = f\left(g(x)\right) = f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

et donc $f(x) \in E_\lambda$. Soit $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$. En d'autres termes: f stabilise les espaces propres de g et réciproquement (le problème est symétrique en f et g). Supposons maintenant que g a n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ en dimension n. Les espaces propres correspondant sont alors de dimensions 1 et si $\mathcal{B}$ est une base qui diagonalise g alors $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ où (à permutation près) $e_i \neq 0$ est un vecteur propre pour λ_i. L'espace propre E_{λ_i} est la droite vectorielle de base e_i. On a $f(e_i) \in E_{\lambda_i}$ en raison de ce qui a été dit plus haut. Donc $f(e_i) = \mu_i e_i$ pour un certain $\mu_i \in \mathbb{R}$. La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est alors la matrice diagonale constituée des μ_i. En particulier, $\mathcal{B}$ diagonalise aussi f.

(2) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note $g \in End(E)$ l'endomorphisme de E défini par $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g) = A$. On cherche $X = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ vérifiant $X^2 = A$. Si $X^2 = A$ alors $AX = XA = X^3$ et donc f et g commutent. Le polynôme caractéristique de A est donné (après calculs) par

$$P_A(X) = -X^3 + 6X^2 - 11X + 6 \ .$$

On voit que 1 est racine de ce polynôme. On trouve alors

$$P_A(X) = -(X-1)(X^2 - 5X + 6) = -(X-1)(X-2)(X-3) \ .$$

Donc g a trois valeurs propres distinctes $1, 2, 3$ en dimension 3. On en déduit que g est diagonalisable et, en vertue de ce qui a été dit ci-dessus, que si $X^2 = A$ alors f est aussi diagonalisable qui plus est dans la même base que celle qui diagonalise g. Donc, autrement dit, il existe une même matrice inversible P telle que

$$P^{-1}XP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

On a

$$P^{-1}X^2P = (P^{-1}XP)^2$$

et donc on veut $a^2 = 1$, $b^2 = 2$ et $c^2 = 3$, soit

$$\begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm\sqrt{2} \\ c = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Il y a 8 solutions en tout qui sont données par

$$X = P \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{3} \end{pmatrix} P^{-1} \ .$$

Reste à déterminer P et P^{-1} pour être complet. Pour déterminer P il faut déterminer des vecteurs directeurs des espaces propres de Un vecteur u de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{B}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1 si et seulement si

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 0 \\ 6x - 5y + 4z = 0 \\ 4x - 4y + 4z = 0 \end{cases}$$

soit encore $y = 2x$ et $z = x$. Donc $e_1 = (1, 2, 1)$ est un vecteur directeur de E_1. On fait de même pour les espaces propres E_2 et E_3 et on trouve comme possibles vecteurs directeurs $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (1, 2, 2)$. Donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Par calcul (différentes méthodes sont possibles) on trouve ensuite que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les 8 solutions de notre problème sont donc données par les 8 expressions

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

(3) On fait le même raisonnement avec B. Le polynôme caractéristique de B est donné (après calculs) par

$$P_B(X) = X(X + 2)(1 - X) - 8(1 - X) = -(X - 1)(X - 2)(X + 4) .$$

Le même raisonnement que précédemment nous amène à résoudre l'équation

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} .$$

soit encore

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} .$$

Cette équation est impossible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car il n'existe pas de réel c tel que $c^2 = -4$. L'équation $X^2 = B$ n'a pas de solution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. □

Correction de l'exercice 1.53. Soit P le polynôme caractéristique de A. Par le calcul on trouve que $P(X) = -(X - 1)(X + 1)(X - 8)$. Donc A est diagonalisable puisqu'il y a 3 valeurs propres distinctes et il existe B inversible telle que

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Clairement $AM = MA$ si $M = A^3$ et donc, BMB^{-1} est aussi une matrice diagonale (cf. exercice précédent). On cherche M sous la forme $M = B^{-1}\tilde{M}B$ avec $\tilde{M}$ matrice diagonale. Alors $M^3 = B^{-1}\tilde{M}^3 B$ et $M^3 = A$ équivaut à $\tilde{M}^3 = D$, où D est la matrice diagonale ci-dessus. Si la diagonale de $\tilde{M}$ est constituée des a, b, c on veut donc $a^3 = -1$, $b^3 = 1$ et $c^3 = 8$. Il y a une seule matrice réelle M qui vérifie $M^3 = A$, et elle est donnée par

$$M = B^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} B$$

Si on veut une forme explicite il faut calculer B et B^{-1}. □

Correction de l'exercice 1.54. (Correction sommaire) **(1)** On commence par calculer le polynôme caractéristique P de A. En développant en croix,

$$\begin{aligned} P(X) &= \det \begin{pmatrix} -X & a & -1 \\ a & -X & -1 \\ a & -1 & -X \end{pmatrix} \\ &= -X^3 + a - a^2 - aX + X + a^2 X \\ &= -X^3 + (a^2 - a + 1)X + a(1-a) \end{aligned}$$

Par Cayley-Hamilton, $P(A) = 0$ et donc $A_a^3 = \alpha_a A_a + \beta_a \mathrm{Id}_3$ avec $a_\alpha = a^2 - a + 1$ et $\beta_\alpha = a(1-a)$.

(2) Si $a \neq 1$, et comme on a aussi que $a \neq 0$, $\det(A_a) = P(0) = a(1-a)$ est non nul. Donc A_a est inversible. On a

$$A_a^3 = \alpha_a A_a + \beta_a \mathrm{Id}_3 \;\Rightarrow\; A_a(A_a^2 - \alpha_a \mathrm{Id}_3) = \beta_a \mathrm{Id}_3$$

et donc

$$A_a^{-1} = \frac{1}{\beta_a} \left(A_a^2 - \alpha_a \mathrm{Id}_3 \right) .$$

Lorsque $a = -1$, et en posant $A = A_{-1}$, on trouve $\alpha_{-1} = 3$, $\beta_{-1} = -2$,

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et ensuite

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{2} \left(-A^2 + 3\mathrm{Id}_3 \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Correction de l'exercice 1.55. (Correction sommaire) **(1)** On a

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} ,$$

soit donc $X_{n+1} = AX_n$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} .$$

On montre par récurrence que $X_n = A^n X_0$. L'amorce (cas $n = 0$) est évidente. On montre maintenant l'hérédité. On suppose la relation vraie à l'ordre n, n fixé (quelconque). On a alors

$$X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$$

et donc la propriété est aussi vraie à l'ordre $n+1$. Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) Soit P le polynôme caractéristique de A. On a

$$\begin{aligned} P(X) &= \det \begin{pmatrix} 4-X & 2 \\ 3 & -1-X \end{pmatrix} \\ &= (X+1)(X-4) - 6 \\ &= X^2 - 3X - 10 . \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation $X^2 - 3X - 10 = 0$ vaut $\Delta = 49 = 7^2$ et on trouve donc comme racines -2 et 5. Donc $P(X) = (X+2)(X-5)$. Les valeurs propres de A sont -2 et 5. On a deux valeurs propres distinctes en dimension 2 et l'on peut donc déjà affirmer que A est diagonalisable. Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a E_{-2} qui est donné par l'équation

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et on trouve donc $y = -3x$. Donc E_{-2} est la droite vectorielle de vecteur directeur $u = e_1 - 3e_2$ soit $u(1, -3)$. On a E_5 qui est donné par l'équation

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et on trouve donc $x = 2y$. Donc E_5 est la droite vectorielle de vecteur directeur $v = 2e_1 + e_2$ soit $v(2, 1)$. La famille (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$ (par théorie de la diagonalisation). Si P est la matrice de passage de (e_1, e_2) à (u, v) alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

et si $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, alors $P^{-1}AP = D$.

(3) Les matrices 2×2 s'inversent par formule de cours. On a $\det(P) = 1 + 6 = 7$ puis

$$P^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

(4) On a

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\tilde{u}_n\\ \tilde{v}_n\end{pmatrix} &= P^{-1}X_n\\ &= P^{-1}A^nX_0\\ &= (P^{-1}A^nP)P^{-1}X_0\\ &= (P^{-1}AP)^n\begin{pmatrix}\tilde{u}_0\\ \tilde{v}_0\end{pmatrix}\\ &= D^n\begin{pmatrix}\tilde{u}_0\\ \tilde{v}_0\end{pmatrix}\ .\end{aligned}$$

(5) On a ici

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\tilde{u}_0\\ \tilde{v}_0\end{pmatrix} &= P^{-1}\begin{pmatrix}6\\ -4\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ -4\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix}14\\ 14\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}\ .\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\tilde{u}_6\\ \tilde{v}_6\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}2^6 & 0\\ 0 & 5^6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}64 & 0\\ 0 & 15625\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}128\\ 31250\end{pmatrix}\end{aligned}$$

et on trouve pour finir que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}u_6\\ v_6\end{pmatrix} &= P\begin{pmatrix}\tilde{u}_6\\ \tilde{v}_6\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}128\\ 31250\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}128+62500\\ -384+31250\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}62628\\ 30866\end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

Correction de l'exercice 1.56. (Correction sommaire) **(1)** On a

$$\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_{n+2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n\\ u_{n+1}\end{pmatrix}\ ,$$

soit donc $X_{n+1} = AX_n$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} .$$

On montre par récurrence que $X_n = A^n X_0$. L'amorce (cas $n = 0$) est évidente. On montre maintenant l'hérédité. On suppose la relation vraie à l'ordre n, n fixé (quelconque). On a alors

$$X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$$

et donc la propriété est aussi vraie à l'ordre $n+1$. Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) Soit P le polynôme caractéristique de A. On a

$$\begin{aligned} P(X) &= \det \begin{pmatrix} -X & 1 \\ 2 & 3-X \end{pmatrix} \\ &= X(X-3) + 2 \\ &= X^2 - 3X + 2 \\ &= (X-1)(X-2) . \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont 1 et 2. On a deux valeurs propres distinctes en dimension 2 et l'on peut donc déjà affirmer que A est diagonalisable. Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a E_1 qui est donné par l'équation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et on trouve donc $y = x$. Donc E_1 est la droite vectorielle de vecteur directeur $u = e_1 + e_2$ soit $u(1,1)$. On a E_2 qui est donné par l'équation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et on trouve donc $y = 2x$. Donc E_2 est la droite vectorielle de vecteur directeur $v = e_1 + 2e_2$ soit $v(1,2)$. La famille (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$ (par théorie de la diagonalisation). Si P est la matrice de passage de (e_1, e_2) à (u, v) alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et si $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, alors $P^{-1}AP = D$.

(3) Les matrices 2×2 s'inversent par formule de cours. On a $\det(P) = 2 - 1 = 1$ puis

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

(4) Soit $\tilde{X}_n = P^{-1}X_n$, $\tilde{X}_n = \begin{pmatrix} \tilde{u}_n \\ \tilde{u}_{n+1} \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{u}_n \\ \tilde{u}_{n+1} \end{pmatrix} &= P^{-1}X_n \\ &= P^{-1}A^nX_0 \\ &= (P^{-1}A^nP)P^{-1}X_0 \\ &= (P^{-1}AP)^n \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 \end{pmatrix} \\ &= D^n \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

On a ici

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Par suite,

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_n \\ \tilde{u}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2^n \end{pmatrix}$$

et on trouve pour finir que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} \tilde{u}_n \\ \tilde{u}_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 2^n \\ 1 + 2^{n+1} \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

Donc $u_n = 1 + 2^n$ pour tout n. □

CHAPITRE 3

Algèbre bilinéaire - Enoncés

Exercice 3.1. On considère les applications B_1, B_2, B_3, B_4 données par

(a) $B_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $B_1(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + x_2y_2$,

(b) $B_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $B_2(x,y) = -x_1y_1 + 3x_2y_2 - x_2$,

(c) $B_3 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $B_3(x,y) = -2x_1y_1 + 3x_2y_2 - x_2y_3 + x_1y_3$,

(c) $B_4 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $B_4(x,y) = -x_1y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 + x_1y_3 + x_3y_1 - x_3y_2$,

Dire lesquelles des applications B_1, B_2, B_3, B_4 sont des applications bilinéaires. Pour celles qui sont des applications bilinéaires, lesquelles sont symétriques ? Enfin, toujours pour celles qui sont bilinéaires, écrire leur matrice de représentation dans les bases canoniques des espaces $\mathbb{R}^n$ considérés.

Exercice 3.2. On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Ces matrices sont des matrices de représentation de formes bilinéaires

$$B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

dans la bases canonique de $\mathbb{R}^n$. Expliciter n pour M et N et donner les expressions de ces applications dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3.3. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mu, \nu \in E^\star$ deux formes linéaires sur E. Montrer que $B : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $B(x,y) = \mu(x)\nu(y)$ est une forme bilinéaire sur E.

Exercice 3.4. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2 (compris). On note $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ donnée par $P_1(X) = 1$, $P_2(X) = X$ et $P_3(X) = X^2$. On considère l'application $B : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ définie par

$$B(P,Q) = P(1)Q(-1) + P(-1)Q(1) .$$

Montrer que B est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}_2[X]$. Ecrire sa matrice de représentation dans $\mathcal{B}$.

Exercice 3.5. Soit B une forme bilinéaire sur E. On note $Q(x) = B(x,x)$. Montrer l'identité de Cauchy qui stipule que

$$Q\left(Q(x)y - B(x,y)x\right) = Q(x)\left(Q(x)Q(y) - B(x,y)B(y,x)\right)$$

pour tous $x, y \in E$. On suppose que B est définie positive au sens où $B(x,x) \geq 0$ pour tout $x \in E$ avec égalité à 0 si et seulement si $x = 0$. Déduire de l'identité de Cauchy l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui stipule que

$$B(x,y)B(y,x) \leq Q(x)Q(y)$$

pour tous $x, y \in E$.

Exercice 3.6. Soit $n \geq 1$ et soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ on pose

$$B(P,Q) = \int_0^1 xP(x)Q'(x)dx \ .$$

Montrer que B est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ? Montrer qu'il existe P non nul tel que $B(P,P) = 0$. Calculer les coefficients B_{ij} de la matrice de B dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3.7. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2. On note $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ donnée par $P_1(X) = 1$, $P_2(X) = X$ et $P_3(X) = X^2$. On considère la forme bilinéaire $B : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ définie par

$$B(P,Q) = P(1)Q(-1) + P(-1)Q(1) \ .$$

Donner sa matrice de représentation dans $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{B}' = (1 - X^2, X, X^2)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer la matrice de représentation de B dans $\mathcal{B}'$.

Exercice 3.8. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2. On note $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ donnée par $P_1(X) = 1$, $P_2(X) = X$ et $P_3(X) = X^2$. On considère la forme bilinéaire $B : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ définie par

$$B(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt \ .$$

Donner sa matrice de représentation dans $\mathcal{B}$. On note $\mathcal{B}' = (1, X - 1, 1 - X + X^2)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner la matrice de représentation de B dans $\mathcal{B}'$. Même question avec $\mathcal{B}'' = (1 - X^2, X, X^2)$.

Exercice 3.9. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ deux bases de E. On note $\mathcal{B}^\star = (e_1^\star, \ldots, e_n^\star)$ et $\tilde{\mathcal{B}}^\star = (\tilde{e}_1^\star, \ldots, \tilde{e}_n^\star)$ les bases duales associées. On note aussi $A = M_{\mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathcal{B}}$ et $\tilde{A} = M_{\mathcal{B}^\star \to \tilde{\mathcal{B}}^\star}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}^\star$ à $\tilde{\mathcal{B}}^\star$. Quelle relation y a-t-il entre A et $\tilde{A}$?

Exercice 3.10. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $a \in E$, $a \neq 0$. Montrer qu'il existe $f \in E^\star$ tel que $f(a) = 1$.

Exercice 3.11. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré au plus n.

(1) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\Phi_a : P \to P(a)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(2) Soient $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. Montrer que la famille $(\Phi_{a_1}, \ldots, \Phi_{a_{n+1}})$ est une base de l'espace dual $\mathbb{R}_n[X]^\star$.

(3) Soient $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ il existe des uniques $c_1, \ldots, c_{n+1}$ tels que $\int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=1}^{n+1} c_i P(a_i)$.

Exercice 3.12. Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ qui à (x, y, z) associe

$$Q(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz \ .$$

Dire pourquoi Q est une forme quadratique. Déterminer la forme bilinéaire symétrique B associée à Q. Déterminer le rang de Q.

Exercice 3.13. Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ qui à (x, y, z) associe

$$Q(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \ .$$

Dire pourquoi Q est une forme quadratique. Déterminer la forme bilinéaire symétrique B associée à Q. Déterminer le rang de Q.

Exercice 3.14. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2. On note $Q : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par: $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$Q(P) = P'(1)^2 - P'(0)^2 \ .$$

Montrer que Q est une forme quadratique et déterminer la forme bilinéaire symétrique B associée à Q. Ecrire la matrice de représentation de B dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer le rang de Q.

Exercice 3.15. Soit $E = \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$. Montrer que E est de dimension 4 et que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ constituée des endomorphismes dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une base de E. Montrer que la fonction $Q(u) = \det(u)$ est une forme quadratique sur E. Si B est la forme bilinéaire symétrique associée à Q, écrire la matrice de B dans $\mathcal{B}$. Que vaut le rang de Q ?

Exercice 3.16. Soit $E = \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$. On considère la fonction $Q : E \to \mathbb{R}$ donnée par: $\forall u \in E$,

$$Q(u) = \mathrm{Trace}(u^2) + 2\varepsilon \det(u)$$

où $\varepsilon = \pm 1$. Montrer que Q est une forme quadratique sur E. Si B est la forme bilinéaire symétrique associée à Q, et si $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est la base canonique de E comme à l'exercice 4, écrire la matrice de B dans $\mathcal{B}$. Que vaut le rang de Q suivant que $\varepsilon = -1$ ou $\varepsilon = +1$?

Exercice 3.17. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension finie) et soit Q une forme quadratique sur E. On suppose que $Q(x) \neq 0$ pour tout $x \in E \backslash \{0\}$. Montrer qu'alors soit $Q(x) > 0$ pour tout $x \in E \backslash \{0\}$, soit $Q(x) < 0$ pour tout $x \in E \backslash \{0\}$.

Exercice 3.18. Déterminer le noyau et le cône isotrope des formes quadratiques Q et $\tilde{Q}$ sur $\mathbb{R}^3$ dont les formes bilinéaires symétriques associées sont données par les expressions $B(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$ et $\tilde{B}(x, y) = x_1 y_1 - x_3 y_3$.

Exercice 3.19. Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_2^2 - 6x_3^2 + 3x_1 x_2 - 4x_1 x_3 + 7x_2 x_3$$

(1) Pourquoi Q est-elle une forme quadratique ?

(2) Quelle est la forme bilinéaire symétrique B associée à Q ? Quelle est la matrice M de B dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?

(3) Décomposer Q en sommes et différences de carrés de façon à écrire Q sous la forme $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$ où $\tilde{Q}$ est une forme quadratique facile à manipuler et Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(4) Quelle est la signature de Q ? Quel est le rang de Q ?

(5) Déterminer le cône isotrope de Q.

Exercice 3.20. Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ qui à (x, y, z) associe
$$Q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + xz + yz \ .$$
Dire pourquoi Q est une forme quadratique. Déterminer la signature et le rang de Q.

Exercice 3.21. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2. On note $Q : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ la forme quadratique sur $\mathbb{R}_2[X]$ donnée par: $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$,
$$Q(P) = P'(1)^2 - P'(0)^2 \ .$$
Déterminer la signature et le rang de Q.

Exercice 3.22. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. On définit la fomre quadratique Q sur $\mathbb{R}_2[X]$ par
$$Q(P) = \int_0^1 xP(x)P'(x)dx$$
pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer la signature et le rang de Q.

Exercice 3.23. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par
$$Q(x, y, z) = x^2 + (1 + a)y^2 + (1 + a + a^2)z^2 + 2xy - 2ayz$$
Que vaut, suivant la valeur du réel a, la signature de Q ?

Exercice 3.24. On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices 2×2 réelles. On considère l'application $B : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par
$$B(M, N) = \frac{1}{2} \left(\mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(N) - \mathrm{Tr}(MN)\right)$$
pour tous $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, où $\mathrm{Tr}(A)$, la somme des termes diagonaux de A, est la trace de A.

(1) Montrer que B est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(2) On considère la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constituée des matrices
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Quelle est la matrice de représentation de B dans $\mathcal{B}$?

(3) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que le polynôme caractéristique de A s'écrit
$$P(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A) \ ,$$
où $\det(A)$ est le déterminant de la matrice A.

(4) Le théorème de Cayley-Hamilton affirme qu'une matrice annule son polynôme caractéristique. Démontrer ce théorème pour les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(5) Montrer que la forme quadratique associée à B est $Q(A) = \det(A)$.

(6) Montrer que
$$\det(M+N) = \det(M) + \det(N) + \mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(N) - \mathrm{Tr}(MN)$$
pour toutes matrices $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3.25. Soit $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par
$$\begin{aligned} B(x,y) &= 5x_1y_1 + 4x_2y_2 + 3x_3y_3 - (x_1y_2 + x_2y_1) \\ &\quad - 2(x_1y_3 + x_3y_1) - (x_2y_3 + x_3y_2) \ . \end{aligned}$$
Montrer que B est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.26. Soit $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ définie par $\|(x,y)\| = \max(|x|,|y|)$. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Soit $B_0(1)$ la boule de centre $(0,0)$ et de rayon 1 pour cette norme, donc $B_0(1) = \{(x,y) \ / \ \|(x,y)\| \leq 1\}$. Montrer que cette boule est en fait le carré $[-1,1] \times [-1,1]$.

Exercice 3.27. Soit $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel (de dimension infinie) constitué des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (au sens où dire qu'une fonction est de classe C^1 sur $[0,1]$ signifie que la fonction est définie sur un intervalle ouvert contenant $[0,1]$ et qu'elle est dérivable de dérivée continue sur cet intervalle plus grand). On définit
$$\langle f,g\rangle = f(0)g(0) + \int_1^1 f'(t)g'(t)dt$$
pour toutes fonctions $f,g \in E$. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

Exercice 3.28. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un réel donné. Soit $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par
$$\begin{aligned} B(x,y) &= 2x_1y_1 + 4x_2y_2 + 3x_3y_3 - 2\alpha(x_1y_2 + x_2y_1) \\ &\quad - 2(x_1y_3 + x_3y_1) - (x_2y_3 + x_3y_2) \ . \end{aligned}$$
Pour quelles valeurs de α a-t-on que B est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3.29. On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices 2×2 réelles. On considère le produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donné par
$$\langle A,B\rangle = \mathrm{trace}({}^tAB) \ .$$
On considère la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constituée des matrices
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Montrer que cette base est orthonormale pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Exercice 3.30. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, et $\mathcal{B} = (e_1,e_2)$ une base de E. On note B la forme bilinéaire sur E définie par
$$B(x,y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 - 2(x_1y_2 + x_2y_1)$$
pour tous $x = \sum_{i=1}^2 x_ie_i$ et $y = \sum_{i=1}^2 y_ie_i$. Montrer que B est un produit scalaire sur E et trouver une base orthonormée pour B.

Exercice 3.31. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, et $\mathcal{B} = (e_1,e_2)$ une base de E. Soit α un réel. On note B la forme bilinéaire sur E définie par
$$B(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 - \alpha^2(x_1y_2 + x_2y_1)$$
pour tous $x = \sum_{i=1}^2 x_ie_i$ et $y = \sum_{i=1}^2 y_ie_i$.

(1) Sous quelle condition portant sur α la forme B est-elle un produit scalaire ?
(2) On suppose $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. En utilisant Gram-Schmidt en partant de $\mathcal{B}$ trouver une base orthonormée $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ pour B.
(3) On suppose toujours que $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Soit $x = 2e_1 + 3e_2$. Quelles sont les coordonnées de x dans $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$?

Exercice 3.32. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur E. On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire. Montrer que deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux si et seulement si $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.33. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus deux. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ on pose

$$\langle P, Q\rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1) \ .$$

Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$. On considère le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ donné par $E = \mathrm{Vect}(1, X^2)$. trouver une base orthonormée de E.

Exercice 3.34. Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel (de dimension infinie) des fonctions définies et continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On munit E du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx \ .$$

Soit $F \subset E$ le sous espace vectoriel de E donné par $F = \{f \in E \ / \ f(0) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.

Exercice 3.35. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère la forme bilinéaire symétrique $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 - (x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1y_3 + x_3y_1) - (x_2y_3 + x_3y_2)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^3$, où les x_i et y_i sont les coordonnées de x et y dans la base canonique. **(1)** Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
(2) Trouver une base orthonormale pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Exercice 3.36. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et du produit scalaire euclidien défini pour tous $x, y \in \mathbb{R}^3$ par

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \ ,$$

où les x_i et y_i sont les coordonnées de x et y dans la base canonique. Soit $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme donné par

$$f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = (3x - y + z)e_1 + (2x + 5y - 3z)e_2 + (x - y + z)e_3$$

pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}^3$. Donner l'expression de l'endomorphisme adjoint $f^\star$ dans $\mathcal{B}$.

Exercice 3.37. On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices 2×2 réelles. On considère le produit scalaire

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{trace}({}^tAB)$$

et on considère la base canonique $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On rappelle (cf.

feuille 6) que (A_1, A_2, A_3, A_4) est une base orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère $f \in \mathrm{End}\,(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donné par

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+c & 2b+\alpha d \\ \alpha a - c & b+d \end{pmatrix}$$

(1) Ecrire la matrice de représentation $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ de f dans $\mathcal{B}$.

(2) Pour quelle(s) valeur(s) de α cet endomorphisme est-il symétrique ?

Exercice 3.38. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et du produit scalaire euclidien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme donné par

$$f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = (x - 2y - 2z)e_1 - (2x - y + 2z)e_2 - (2x + 2y - z)e_3$$

pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}^3$. Montrer que f est diagonalisable et qu'il existe une base orthonormale de vecteurs propres de f. Donner une telle base orthonormale de vecteurs propres de f. Que vaut la matrice de f dans cette base ?

Exercice 3.39. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et soit $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme symétrique. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de f comptées avec leur multiplicité (certains des λ_i peuvent être égaux entre eux) et on ordonne les λ_i de sorte que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Montrer que $\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$ pour tout $x \in E$.

Exercice 3.40. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est diagonalisable et trouver une matrice orthogonale P pour laquelle ${}^tPAP$ est diagonale.

Exercice 3.41. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est diagonalisable et trouver une matrice orthogonale P pour laquelle ${}^tPAP$ est diagonale.

Exercice 3.42. Soit A une matrice symétrique carrée $n \times n$. On dit que A est positive si pour tout vecteur colonne X à n lignes, ${}^tXAX \geq 0$.

(1) Montrer que A est positive si et seulement si ses valeurs propres sont toutes positives ou nulles.

(2) Montrer que si $A = (a_{ij})$ est symétrique positive alors $a_{ii} \geq 0$ pour tout i.

(3) Montrer que si A est symétrique positive, alors pour toute matrice P orthogonale (et de même taille que A), ${}^tPAP$ est aussi symétrique positive.

(4) Montrer que pour tout matrice carrée M de taille $n \times n$, et toute matrice carrée inversible P de taille $n \times n$, $\mathrm{Trace}(P^{-1}MP) = \mathrm{Trace}(M)$.

(5) Montrer que si A et B sont deux matrices $n \times n$ symétriques positives, alors nécessairement $0 \leq \mathrm{Trace}(AB) \leq \mathrm{Trace}(A)\mathrm{Trace}(B)$.

Exercice 3.43. Soit $n \geq 3$ et soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On considère u, v deux vecteurs non nuls et non colinéaires de E. Soient $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ deux réels fixés non nuls.On considère l'endomorphisme $f \in \mathrm{End}(E)$ de E donné par

$$f(x) = \alpha \langle v, x \rangle u + \beta \langle u, x \rangle v$$

pour tout $x \in E$.

(1) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

On pose $F = \mathrm{Vect}(u, v)$. Comme (u, v) est libre (puisque u et v ne sont pas colinéaires), F est de dimension 2. On note g la restriction de f à F. Alors $g \in \mathrm{End}(F)$.

(2) Soit $\lambda \neq 0$ un réel non nul. Montrer que λ est valeur propre de $g \in \mathrm{End}(F)$ si et seulement si λ est valeur propre de $f \in \mathrm{End}(E)$.

(3) Sous quelle(s) condition(s) portant sur α et β l'endomorphisme $f \in \mathrm{End}(E)$ est-il symétrique ?

(4) On suppose que f est symétrique. Alors g est aussi symétrique. Déterminer les valeurs propres de f.

Exercice 3.44. Soit A une matrice symétrique carrée $n \times n$. On suppose que A est positive à savoir que pour tout vecteur colonne X à n lignes, ${}^tXAX \geq 0$. Montrer qu'il existe B carrée $n \times n$ telle que $A = {}^tBB$.

Exercice 3.45. Une matrice A est dite nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^p = 0$.

(1) Montrer qu'une matrice symétrique nilpotente est forcément nulle.

(2) Soit A une matrice carrée nilpotente. On suppose que ${}^tAA = A{}^tA$. Montrer que A est forcément nulle.

Exercice 3.46. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes réels de degré au plus n. Pour $P, Q \in E$ on pose

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) P(x) Q(x) dx$$

et on considère $f \in \mathrm{End}(E)$ donné par $f(P) = \big((X^2 - 1)P\big)''$.

(1) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

(2) Montrer que f est symétrique pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice 3.47. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est diagonalisable et trouver une matrice orthogonale P pour laquelle ${}^tPAP$ est diagonale.

Exercice 3.48. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ par

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2} dx \ .$$

On définit aussi $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}_n[X])$ par $\varphi(P) = 2XP' - P''$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

(1) Justifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien défini et qu'il s'agit bien d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(2) Montrer que pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P, \varphi(Q) \rangle = \langle P', Q' \rangle$. En déduire que φ est symétrique pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice 3.49. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles carrées $n \times n$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire

$$\langle M, N \rangle = \mathrm{Trace}({}^tMN) \ .$$

Soit A une matrice symétrique inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme $\varphi \in \mathrm{End}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ qui à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $\varphi(M)$ donné par $\varphi(M) = AMA^{-1}$. Montrer que φ est symétrique pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice 3.50. Soit A une matrice symétrique carrée $n \times n$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de A rangées par ordre croissant. On définit la quotient de Rayleigh de A par

$$\mathcal{R}(X) = \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}$$

pour tout vecteur colonne à n lignes $X \neq 0$.

(1) Soit $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si x a pour coordonnées $x_1, \dots, x_n$ dans $\mathcal{B}$, on note X le vecteur colonne dont les ligne sont constituées des x_i. De même si y a pour coordonnées $y_1, \dots, y_n$ dans $\mathcal{B}$, on note Y le vecteur colonne dont les ligne sont constituées des y_i. Soit aussi $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice de représentation dans $\mathcal{B}$ est A, donc $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = A$. Montrer que ${}^tXAY = \langle f(x), y \rangle$ et que ${}^tXY = \langle x, y \rangle$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. En déduire que le quotient de Rayleigh de A est aussi donné par

$$\mathcal{R}(x) = \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, où $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(2) Montrer que

$$\lambda_1 = \min_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \mathcal{R}(x)$$

et que le minimum est réalisé par les $x \in E_1$, $x \neq 0$, où E_1 est l'espace propre associé à la valeur propre λ_1.

(3) Montrer que

$$\lambda_2 = \min_{x \in E_1^\perp \setminus \{0\}} \mathcal{R}(x)$$

et que le minimum est réalisé par les $x \in E_2$, $x \neq 0$, où E_1 est l'espace propre associé à la valeur propre λ_1 et E_2 est l'espace propre associé à la valeur propre λ_2.

Exercice 3.51. Soit A une matrice réelle symétrique $n \times n$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^k = \mathrm{Id}_n$ où Id_n est la matrice identité $n \times n$. Montrer qu'alors $A^2 = \mathrm{Id}_n$.

Exercice 3.52. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice réelle symétrique $n \times n$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A répétées avec leur multiplicité (donc des λ_i peuvent être égaux entre eux). Montrer que $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

Exercice 3.53. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E. Soit $a \in E$ un vecteur de norme 1 et $\mu \in \mathbb{R}$. On définit l'endomorphisme $f \in \mathrm{End}(E)$ par

$$f(x) = x + \mu \langle x, a \rangle a \ .$$

Montrer que f est symétrique. Déterminer les valeurs propres et espaces propres de f.

Exercice 3.54. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E. Soit $f : E \to E$ une application telle que $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$ pour tous $x, y \in E$. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

Exercice 3.55. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E. Soit $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme de E. On note $f^\star$ l'endomorphisme adjoint de f. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^\star \circ f)$.

Exercice 3.56. Soit A une matrice réelle symétrique $n \times n$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^k = \mathrm{Id}_n$ où Id_n est la matrice identité $n \times n$. Montrer que $A = \mathrm{Id}_n$ si k est impair, mais qu'il est impossible de dire mieux que $A^2 = \mathrm{Id}_n$ si k est pair.

Exercice 3.57. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ par

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx \ .$$

On définit aussi $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}_n[X])$ par $\phi(P) = XP'' - (X-1)P'$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

(1) Justifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien défini et qu'il s'agit bien d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(2) Montrer que φ est symétrique.

Exercice 3.58. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soient f et g deux endomorphismes symétriques de E. Montrer que $g \circ f$ est symétrique si et seulement si f et g commutent.

CHAPITRE 4

Algèbre bilinéaire - Corrigés

Correction de l'exercice 3.1. Dire que B_i est bilinéaire c'est dire que pour tous a, b dans l'espace considéré (ici $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$), les applications $x \to B_i(x, b)$ et $y \to B_i(a, y)$ sont des formes linéaires sur l'espace considéré, à savoir donc des applications linéaires de l'espace considéré dans $\mathbb{R}$. Une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ est une application de la forme $(x_1, x_2) \to Ax_1 + Bx_2$ et une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ est une application de la forme $(x_1, x_2, x_3) \to Ax_1 + Bx_2 + Cx_3$, où A, B, C sont des réels puisque la matrice de représentation (dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$) est du type $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$ pour les formes linéaires de $\mathbb{R}^2$ et $\begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix}$ pour les formes linéaires de $\mathbb{R}^3$.

(1) Clairement les applications $x \to B_1(x, b)$ et $y \to B_1(a, y)$, pour $a, b \in \mathbb{R}^2$, sont bien de ce type. Pour la première on a $(x_1, x_2) \to (b_1 - 2b_2)x_1 + b_2x_2$ et pour la seconde on a $(y_1, y_2) \to a_1y_1 + (a_2 - 2a_1)y_2$. Donc B_1 est bien bilinéaire.

(2) Pour B_2 il y a un problème en raison du terme $-x_2$. Posons par exemple $a = (1, 1)$. Alors $B_2(a, y) = -y_1 + 3y_2 - 1$ qui n'est pas linéaire. Par exemple, si $y_1 = (1, 0), y_2 = (0, 1), y = (1, 1)$, alors $y = y_1 + y_2$ et $B_2(a, y_1) = -2$, $B_2(a, y_2) = 2$, $B_2(a, y) = 1$ de sorte que $B_2(a, y) \neq B_2(a, y_1) + B_2(a, y_2)$. Donc $y \to B_2(a, y)$ n'est pas linéaire pour ce choix de a, et donc B_2 n'est pas bilinéaire.

(3) Mêmes types d'argument que en (1), on vérifie que B_3 et B_4 sont bien bilinéaires.

La question de la symétrie des formes bilinéaires considérées ne se pose que pour B_1, B_3 et B_4. Pour B_1 on voit qu'il manque un $-2x_2y_1$ pour avoir une symétrie. Posons $x = (1, 0)$ et $y = (1, 1)$. Alors $B_1(x, y) = -1$ tandis que $B_1(y, x) = +1$, et donc $B_1(x, y) \neq B_1(y, x)$ pour ces valeurs de x et y. En particulier, B_1 n'est pas symétrique. Le même genre de problème se pose pour B_3. Posons $x = (1, 1, 1)$ et $y = (1, 0, 1)$. Alors $B_3(x, y) = -2$ et $B_3(y, x) = -1$ de sorte que $B_1(x, y) \neq B_1(y, x)$ pour ces valeurs de x et y. En particulier, B_3 n'est pas symétrique. Pour B_4 on a que, pour tous x, y,

$$\begin{aligned} B_4(y, x) &= -y_1x_1 + y_2x_2 - y_2x_3 + y_1x_3 + y_3x_1 - y_3x_2 \\ &= -x_1y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 + x_1y_3 + x_3y_1 - x_3y_2 \\ &= B_4(x, y) \end{aligned}$$

et donc B_4 est symétrique. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est constituée des vecteurs $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est constituée des vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. Pour une forme bilinéaire B, sa matrice de représentation dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$ est formée des $a_{ij} = B(e_i, e_j)$. La forme bilinéaire prend alors la forme

$$B(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j \ .$$

Par identification on trouve ici que les matrices de représentation de B_1, B_3 et B_4 dans les bases canoniques des espaces $\mathbb{R}^n$ considérés sont les matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ M_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

On voit sur la lecture des matrices que seule M_4 et symétrique et donc que seule B_4 est symétrique. □

Correction de l'exercice 3.2. Pour une forme bilinéaire B, sa matrice de représentation dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$ est formée des $a_{ij} = B(e_i, e_j)$. La forme bilinéaire prend alors la forme

$$B(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j \ .$$

On trouve donc ici pour M que $n = 3$ et que

$$B(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_1y_3 + 2x_2y_1 - x_2y_3 + 3x_3y_1 - 2x_3y_2 + x_3y_3$$

et pour N que $n = 4$ et que

$$\begin{aligned} B(x,y) = &-x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_1y_3 + 4x_2y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 + 3x_2y_4 \\ &+ 2x_3y_1 - x_3y_2 + x_3y_3 + 3x_3y_4 + x_4y_1 + 3x_4y_2 - x_4y_4 \ . \end{aligned}$$

□

Correction de l'exercice 3.3. Soit $a \in E$ fixé quelconque. Pour $y, \tilde{y}$ quelconques dans E, et $t, \tilde{t} \in \mathbb{R}$ quelconques,

$$B(a, ty + \tilde{t}\tilde{y}) = \mu(a)\nu(ty + \tilde{t}\tilde{y}) = \mu(a)\left(t\nu(y) + \tilde{t}\nu(\tilde{y})\right)$$

puisque ν est linéaire. Par suite, $B(a, ty + \tilde{t}\tilde{y}) = tB(a,y) + \tilde{t}B(a,\tilde{y})$. Avec le même type de raisonnement, puisque μ est elle aussi linéaire, on montre que si $b \in E$ est fixé quelconque, alors pour $x, \tilde{x} \in E$ quelconques et $t, \tilde{t} \in \mathbb{R}$ quelconques, $B(tx + \tilde{t}\tilde{x}, b) = tB(x,b) + \tilde{t}B(\tilde{x}, b)$. Donc B est bien bilinéaire. □

Correction de l'exercice 3.4. Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ fixé quelconque. Pour $P, \tilde{P} \in \mathbb{R}_2[X]$ quelconques, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ quelconques,

$$\begin{aligned} B(\lambda P + \mu\tilde{P}, Q) &= (\lambda P(1) + \mu\tilde{P}(1))Q(-1) + (\lambda P(-1) + \mu\tilde{P}(-1))Q(1) \\ &= \lambda\left(P(1)Q(-1) + P(-1)Q(1)\right) + \mu\left(\tilde{P}(1)Q(-1) + \tilde{P}(-1)Q(1)\right) \\ &= \lambda B(P,Q) + \mu B(\tilde{P}, Q) \ . \end{aligned}$$

De même on montre que si $P \in \mathbb{R}_2[X]$ est fixé quelconque, alors pour $Q, \tilde{Q} \in \mathbb{R}_2[X]$ quelconques, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ quelconques, $B(P, \lambda Q + \mu\tilde{Q}) = \lambda B(P,Q) + \mu B(P, \tilde{Q})$. Donc

B est bien bilinéaire. La matrice de représentation de B dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est constituée des $B(P_i, P_j)$. On calcule

$$\begin{aligned} &B(P_1, P_1) = 2, B(P_1, P_2) = 0, B(P_1, P_3) = 2 \\ &B(P_2, P_1) = 0, B(P_2, P_2) = -2, B(P_2, P_3) = 0 \\ &B(P_3, P_1) = 2, B(P_3, P_2) = 0, B(P_3, P_3) = 2 \end{aligned}$$

On trouve donc que la matrice M de représentation de B dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

□

Correction de l'exercice 3.5. Pour démontrer l'identité de Cauchy on utilise la bilinéarité de B en écrivant que pour $x, y \in E$ quelconques,

$$\begin{aligned} Q\left(Q(x)y - B(x,y)x\right) &= B\left(Q(x)y - B(x,y)x, Q(x)y - B(x,y)x\right) \\ &= Q(x)^2 Q(y) - Q(x)B(x,y)B(y,x) \\ &\quad - B(x,y)Q(x)B(x,y) + B(x,y)^2 Q(x) \\ &= Q(x)^2 Q(y) - Q(x)B(x,y)B(y,x) \\ &\quad - B(x,y)^2 Q(x) + B(x,y)^2 Q(x) \\ &= Q(x)^2 Q(y) - Q(x)B(x,y)B(y,x) \\ &= Q(x)\left(Q(x)Q(y) - B(x,y)B(y,x)\right) \end{aligned}$$

qui est l'identité voulue. On suppose maintenant que B est définie positive. Alors

$$Q\left(Q(x)y - B(x,y)x\right) \geq 0 .$$

Si $Q(x) = 0$ alors $x = 0$ puisque B est définie positive, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz est trivialement satisfaite. On peut donc supposer $Q(x) \neq 0$, soit encore $Q(x) > 0$. Dans ce cas on a alors que $Q(x)Q(y) - B(x,y)B(y,x) \geq 0$, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz est encore vérifiée. Au total, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est toujours vérifiée. □

Correction de l'exercice 3.6. On vérifie facilement que pour $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ fixé quelconque, pour $P, \tilde{P} \in \mathbb{R}_2[X]$ quelconques, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ quelconques,

$$B(\lambda P + \mu\tilde{P}, Q) = \lambda B(P, Q) + \mu B(\tilde{P}, Q) .$$

De même on montre que si $P \in \mathbb{R}_2[X]$ est fixé quelconque, alors pour $Q, \tilde{Q} \in \mathbb{R}_2[X]$ quelconques, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ quelconques, $B(P, \lambda Q + \mu\tilde{Q}) = \lambda B(P, Q) + \mu B(P, \tilde{Q})$. Donc B est bien bilinéaire. On a $B(X, 1) = 0$ tandis que

$$B(1, X) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} .$$

Donc B n'est pas symétrique. On a aussi $B(1,1) = 0$ et donc il existe P non nul tel que $B(P,P) = 0$. Pour finir, on a pour $i \geq 1$ et $j \geq 1$ que

$$\begin{aligned} B_{ij} &= B(X^{i-1}, X^{j-1}) \\ &= (j-1)\int_0^1 x^{i+j-2}dx \\ &= \frac{j-1}{i+j-1} \ . \end{aligned}$$

$\square$

Correction de l'exercice 3.7. La forme bilinéaire B est symétrique. On calcule

$$\begin{aligned} &B(P_1,P_1) = 2 \ , \ B(P_1,P2) = 0 \ , \ B(P_1,P_3) = 2 \\ &B(P_2,P_1) = B(P_1,P_2) \ , \ B(P_2,P_2) = -2 \ , \ B(P_2,P_3) = 0 \\ &B(P_3,P_1) = B(P_1,P_3) \ , \ B(P_3,P_2) = B(P_2,P_3) \ , \ B(P_3,P_3) = 2 \ . \end{aligned}$$

On obtient donc que

$$M_{\mathcal{B}}(B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

Pour montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, puisqu'elle a bien autant de vecteurs que la dimension 3 de $\mathbb{R}_2[X]$, il suffit de montrer que $\mathcal{B}'$ est génératrice. Notons P'_1, P'_2, P'_3 les trois vecteurs de $\mathcal{B}'$. On le constate facilement, pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} aX^2 + bX + c &= c(1 - X^2) + bX + (a+c)X^2 \\ &= cP'_1 + bP'_2 + (a+c)P'_3 \end{aligned}$$

et $\mathcal{B}'$ est donc bien génératrice pour $\mathbb{R}_2[X]$, donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a

$$\begin{aligned} P'_1 &= P_1 - P_3 \\ P'_2 &= P_2 \\ P'_3 &= P_3 \end{aligned}$$

et donc, par définition,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

La formule de changement de bases donne alors que

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}'}(B) &= {}^tPM_{\mathcal{B}}(B)P \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

$\square$

Correction de l'exercice 3.8. La forme bilinéaire B est symétrique. On calcule

$$B(P_1,P_1)=\int_0^1 dt=1\ ,\ B(P_1,P2)=\int_0^1 tdt=\frac{1}{2}\ ,\ B(P_1,P_3)=\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}$$
$$B(P_2,P_1)=B(P_1,P_2)\ ,\ B(P_2,P_2)=\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}\ ,\ B(P_2,P_3)=\int_0^1 t^3dt=\frac{1}{4}$$
$$B(P_3,P_1)=B(P_1,P_3)\ ,\ B(P_3,P_2)=B(P_2,P_3)\ ,\ B(P_3,P_3)=\int_0^1 t^4dt=\frac{1}{5}\ .$$

On obtient donc que

$$M_{\mathcal{B}}(B)=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\ .$$

Pour montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, puisqu'elle a bien autant de vecteurs que la dimension 3 de $\mathbb{R}_2[X]$, il suffit de montrer que $\mathcal{B}'$ est génératrice. Notons P'_1,P'_2,P'_3 les trois vecteurs de $\mathcal{B}'$. On le constate facilement, pour tous $a,b,c\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}aX^2+bX+c&=a(1-X+X^2)+(a+b)(X-1)+(b+c)\times 1\\ &=(b+c)P'_1+(a+b)P'_2+aP'_3\end{aligned}$$

et $\mathcal{B}'$ est donc bien génératrice pour $\mathbb{R}_2[X]$, donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a

$$\begin{aligned}P'_1&=P_1\\ P'_2&=-P_1+P_2\\ P'_3&=P_1-P_2+P_3\end{aligned}$$

et donc, par définition,

$$P=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

La formule de changement de bases donne alors que

$$\begin{aligned}M_{\mathcal{B}'}(B)&={}^tPM_{\mathcal{B}}(B)P\\
&=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{12}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & \frac{17}{60}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{12}\\ \frac{5}{6} & -\frac{5}{12} & \frac{7}{10}\end{pmatrix}\ .\end{aligned}$$

A titre de remarque, lorsqu'on a du temps, il est toujours intéressant de vérifier ce genre de calculs. La matrice obtenue est symétrique. C'est une bonne nouvelle (elle doit l'être puisque B est symétrique). On pourrait maintenant vérifier que l'on a bien $B(P_3', P_3') = \frac{7}{10}$. On a

$$
\begin{aligned}
B(P_3', P_3') &= \int_0^1 (1 - t + t^2)^2 dt \\
&= \int_0^1 dt + \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 t^4 dt - 2\int_0^1 t dt + 2\int_0^1 t^2 dt - 2\int_0^1 t^3 dt \\
&= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \\
&= 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{7}{10}
\end{aligned}
$$

comme calculé ci-dessus. On procède de la même façon avec $\mathcal{B}''$. Pour montrer que $\mathcal{B}''$ est génératrice on remarque que

$$
\begin{aligned}
aX^2 + bX + c &= c(1 - X^2) + bX + (a + c)X^2 \\
&= cP_1'' + bP_2'' + (a + c)P_3''
\end{aligned}
$$

La matrice P est ici donnée par

$$
P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

et on a que $M_{\mathcal{B}''}(B) = {}^t P M_{\mathcal{B}}(B) P$. □

Correction de l'exercice 3.9. On note n la dimension de E. Ecrivons que $A = (a_{ij})_{i,j}$. Alors, pour tout $j = 1, \ldots, n$,

$$
\tilde{e}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \ , \tag{1}
$$

à savoir la $j$ème colonne de A est constituée des coordonnées dans $\mathcal{B}$ du vecteur $\tilde{e}_j$. On sait de plus que A est inversible (les matrices de passages sont toujours inversibles). Notons $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{i,j}$. Les $\tilde{a}_{ij}$ sont caractérisés par le fait que pour tout $j = 1, \ldots, n$,

$$
\tilde{e}_j^\star = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} e_i^\star \tag{2}
$$

puisque la $j$ème colonne de $\tilde{A}$ est composée des coordonnées de $\tilde{e}_j^\star$ dans $\mathcal{B}^\star$. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$ quelconque fixé. On écrit que

$$\begin{aligned}
\delta_{jk} &= \tilde{e}_j^\star(\tilde{e}_k) && \text{par définition} \\
&= \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ij} e_i^\star(\tilde{e}_k) && \text{en vertue de (2)} \\
&= \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ij} e_i^\star \left(\sum_{p=1}^n a_{pk} e_p \right) && \text{en vertue de (1)} \\
&= \sum_{i,p=1}^n \tilde{a}_{ij} a_{pk} e_i^\star(e_p) \\
&= \sum_{i,p=1}^n \tilde{a}_{ij} a_{pk} \delta_{ip} && \text{puisque } e_i^\star(e_p) = \delta_{ip} \text{ par définition} \\
&= \sum_{p=1}^n \tilde{a}_{pj} a_{pk}
\end{aligned}$$

où les δ_{ij} sont les symboles de Kroenecker (1 si $i = j$, 0 sinon). Si on renomme les indices j et k on a donc montré que

$$\sum_{p=1}^n \tilde{a}_{pi} a_{pj} = \delta_{ij} \tag{3}$$

pour tous $i, j = 1, \ldots, n$. Notons $b_{ij} = \tilde{a}_{ji}$ les coefficients de ${}^t\tilde{A}$, la matrice transposée de $\tilde{A}$, et notons

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^n \tilde{a}_{pi} a_{pj}$$

pour tous i, j. On a $c_{ij} = \sum_{p=1}^n b_{ip} a_{pj}$ et donc les c_{ij} sont en fait les coefficients de la matrice produit ${}^t\tilde{A}A$. On a donc, en vertue de (3), que

$${}^t\tilde{A}A = \mathrm{Id}_n \ ,$$

où Id_n est la matrice identité $n \times n$. Par suite ${}^t\tilde{A} = A^{-1}$ et donc $\tilde{A} = {}^tA^{-1}$. $\square$

Correction de l'exercice 3.10. Soit n la dimension de E. Le théorème de la base incomplète nous donne l'existence de vecteurs $e_2, \ldots, e_n$ pour lesquels $(a, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E. Alors $f = a^\star$ convient. $\square$

Correction de l'exercice 3.11. **(1)** Clairement pour touts $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\Phi_a(\lambda P_1 + \mu P_2) &= \lambda P_1(a) + \mu P_2(a) \\
&= \lambda \Phi_a(P_1) + \mu \Phi_a(P_2)
\end{aligned}$$

de sorte que Φ_a est bien linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(2) L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$. L'espace dual $\mathbb{R}_n[X]^\star$ est donc lui aussi de dimension $n+1$. La famille $(\Phi_{a_1}, \ldots, \Phi_{a_{n+1}})$ comporte $n+1$ éléments. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre pour obtenir une base de $\mathbb{R}_n[X]^\star$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ $n+1$ réels. On suppose que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \Phi_{a_k} = 0$$

dans $\mathbb{R}_n[X]^\star$. Alors pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \Phi_{a_k}(P) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(a_k) \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Pour $i = 1, \ldots, n+1$, notons P_i le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$P_i(X) = \frac{1}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n+1}(a_k - a_j)}(X - a_1)\ldots(X - a_{i-1})(X - a_{i+1})\ldots(X - a_{n+1}) \ .$$

Alors $P_i(a_i) = 1$ tandis que $P_i(a_j) = 0$ pour tout $j = 1, \ldots, n+1$ dès que $j \neq i$. Soit i quelconque fixé dans $\{1, \ldots, n+1\}$. En prenant $P = P_i$ dans (1) on obtient que $\lambda_i = 0$. Et comme i est quelconque dans $\{1, \ldots, n+1\}$ on obtient que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. La famille $P_{a_1}, \ldots, P_{a_{n+1}}$ est donc libre et donc bien une base de $\mathbb{R}_n[X]^\star$.

(3) L'application $\Phi : P \to \int_0^1 P(t)dt$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. Donc un élément de $\mathbb{R}_n[X]^\star$. En vertue de la question précédente il existe $c_1, \ldots, c_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que $\Phi = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \Phi_{a_i}$. Donc

$$\begin{aligned} \Phi(P) &= \int_0^1 P(t)dt \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} c_i \Phi_{a_i}(P) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} c_i P(a_i) \end{aligned}$$

pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$. D'où le résultat. □

Correction de l'exercice 3.12. La fonction Q est ici donnée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Elle s'exprime bien sous la forme d'un polynôme homogène de degré deux des variables coordonnées x, y, z. Si on écrit (x_1, x_2, x_3) au lieu de (x, y, z), on a

$$Q(x, y, z) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\leq j}}^{3} a_{ij} x_i x_j \ ,$$

avec $a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = -4$, $a_{22} = -2$, $a_{23} = 7$ et $a_{33} = -6$. Les B_{ij} de la matrice de B sont donnés par $B_{ii} = a_{ii}$, $B_{ij} = \frac{1}{2}a_{ij}$ et $B_{ji} = \frac{1}{2}a_{ij}$ si $i < j$. La matrice de B dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est donc la matrice

$$M_{\mathcal{B}}(B) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{7}{2} \\ -2 & \frac{7}{2} & -6 \end{pmatrix} \ .$$

Reste à déterminer le rang de cette matrice. Comme la matrice est non nulle, le rang est un des entiers 1, 2 ou 3. Le rang vaut 3 si et seulement si la matrice est inversible. On a

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}2 & \frac{3}{2} & -2\\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{7}{2}\\ -2 & \frac{7}{2} & -6\end{pmatrix} &= 24 - \frac{21}{2} - \frac{21}{2} + 8 - \frac{49}{2} + \frac{27}{2}\\ &= 0\ .\end{aligned}$$

Le rang est donc soit 1 soit 2. La matrice

$$A = \begin{pmatrix}2 & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & -2\end{pmatrix}$$

est une sous matrice de $M_{\mathcal{B}}(B)$ est son déterminant vaut $-4 - \frac{9}{4} = -\frac{25}{4} \neq 0$. Le rang est donc au moins 2. Le rang de B vaut donc 2. Donc Q est de rang 2. □

Correction de l'exercice 3.13. Même principe que ci-dessus. On trouve

$$M_{\mathcal{B}}(B) = \begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}\ .$$

Le rang vaut 3 car le déterminant de cette matrice vaut 16. □

Correction de l'exercice 3.14. On a (cf. cours) que Q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si $Q(\lambda P) = \lambda^2 Q(P)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, et si l'application $B : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ donnée par

$$B(P, \tilde{P}) = \frac{1}{2}\Big(Q(P + \tilde{P}) - Q(P) - Q(\tilde{P})\Big)$$

est bilinéaire sur $\mathbb{R}_2[X]$. Il est clair que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $Q(\lambda P) = \lambda^2 Q(P)$. On détermine maintenant B. Pour $P, \tilde{P} \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\begin{aligned}2B(P, \tilde{P}) &= \Big(P'(1) + \tilde{P}'(1)\Big)^2 - \Big(P'(0) + \tilde{P}'(0)\Big)^2 - P'(1)^2\\ &\quad + P'(0)^2 - \tilde{P}'(1)^2 + \tilde{P}'(0)^2\\ &= 2P'(1)\tilde{P}'(1) - 2P'(0)\tilde{P}'(0)\end{aligned}$$

et on obtient donc que

$$B(P, \tilde{P}) = P'(1)\tilde{P}'(1) - P'(0)\tilde{P}'(0)$$

pour tous $P, \tilde{P} \in \mathbb{R}_2[X]$. Clairement $B(P, \tilde{P})$ est linéaire en P (à $\tilde{P}$ fixé) et linéaire en $\tilde{P}$ (à P fixé). Donc Q est une forme quadratique et la forme bilinéaire symétrique associée est B. Notons $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On a donc $P_1 = 1$, $P_2 = X$ et $P_3 = X^2$. On calcule

$$\begin{aligned}&B(P_1, P_1) = 0\ ,\ B(P_1, P_2) = 0\ ,\ B(P_1, P_3) = 0\\ &B(P_2, P_2) = 1 - 1 = 0\ ,\ B(P_2, P_3) = 2\\ &B(P_3, P_3) = 4\ .\end{aligned}$$

Par symétrie on trouve donc que

$$M_{\mathcal{B}}(B) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}\ .$$

Le rang de cette matrice, donc de B et de Q, est soit 1, 2 ou 3 (puisque la matrice est non nulle). Son déterminant est clairement nul. Donc le rang ne vaut pas 3. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

est une sous matrice de $M_{\mathcal{B}}(B)$ est son déterminant vaut $-4 \neq 0$. Le rang est donc au moins 2. En conclusion le rang de B vaut donc 2 et donc Q est de rang 2. □

Correction de l'exercice 3.15. Clairement E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel que l'on peut voir comme une sous espace vectoriel de l'espace de toutes les applications de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, puisque si $u, v \in E$, $u+v \in E$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$, $\lambda u \in E$. Soit $u \in E$ quelconque. Sa matrice A de représentation dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ va s'écrire de façon unique sous la forme

$$A = aA_1 + bA_2 + cA_3 + dA_4$$

pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, et comme $aA_1 + bA_2 + cA_3 + dA_4$ est aussi la matrice de représentation de $au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a que $u = au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4$ et l'écriture est unique (puisque celle pour A l'est). On en déduit que $\mathcal{B}$ est une base de E. Dans $\mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} Q(u) &= \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= ad - bc \end{aligned}$$

et Q s'exprime bien dans B comme un polynôme homogène de degré 2 en les variables coordonnées a, b, c, d (on a l'expression $x_1x_4 - x_2x_3$ dans un langage plus classique de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4). Donc Q est une forme quadratique. On a

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^{4} a_{ij} x_i x_j \ ,$$

avec $a_{11} = 0, a_{12} = 0, a_{13} = 0, a_{14} = 1, a_{22} = 0, a_{23} = -1, a_{24} = 0, a_{33} = 0, a_{34} = 0, a_{44} = 0$. Les B_{ij} de la matrice de B sont donnés par $B_{ii} = a_{ii}$, $B_{ij} = \frac{1}{2}a_{ij}$ et $B_{ji} = \frac{1}{2}a_{ij}$ si $i < j$. La matrice de B dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E est donc la matrice

$$M_{\mathcal{B}}(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Puisque B n'est pas nulle, le rang de B vaut $1, 2, 3$ ou 4. Le déterminant de cette matrice, par développement suivant la première ligne, vaut

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2^4} \neq 0 \ .$$

Donc B et Q sont de rang 4. □

Correction de l'exercice 3.16. On procède comme ci-dessus en écrivant Q dans $\mathcal{B}$. On a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

et la trace de cette dernière matrice vaut a^2+d^2+2bc et donc, en utilisant ce qui a déjà été dit à l'exercice 4, on voit que

$$\begin{aligned} Q(a,b,c,d) &= a^2+d^2+2bc+2\varepsilon ad-2\varepsilon bc \\ &= a^2+d^2+2\varepsilon ad+2(1-\varepsilon)bc\ . \end{aligned}$$

Donc Q s'exprime bien dans B comme un polynôme homogène de degré 2 en les variables coordonnées a,b,c,d. Donc Q est une forme quadratique. On a

$$\begin{aligned} Q(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1^2+x_4^2+2\varepsilon x_1x_4+2(1-\varepsilon)x_2x_3 \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\leq j}}^{4} a_{ij}x_ix_j \end{aligned}$$

avec $a_{11}=1, a_{12}=0, a_{13}=0, a_{14}=2\varepsilon, a_{22}=0, a_{23}=2(1-\varepsilon), a_{24}=0, a_{33}=0, a_{34}=0, a_{44}=1$. Les B_{ij} de la matrice de B sont donnés par $B_{ii}=a_{ii}$, $B_{ij}=\frac{1}{2}a_{ij}$ et $B_{ji}=\frac{1}{2}a_{ij}$ si $i<j$. La matrice de B dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E est donc la matrice

$$M_{\mathcal{B}}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 1-\varepsilon & 0 \\ 0 & 1-\varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Selon que $\varepsilon=-1$ ou $\varepsilon=+1$ on récupère donc les deux matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le rang de ces matrices non nulles est $1,2,3$ ou 4. On calcule en développant suivant la première ligne

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -4+4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc le rang de M_1 n'est pas 4. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une sous matrice de M_1 et son déterminant vaut $-4 \neq 0$. Le rang de M_1 vaut donc 3, et donc le rang de Q vaut 3 lorsque $\varepsilon=-1$. Pour M_2 on peut procéder de la même façon mais on se rend compte que non seulement le déterminant de M_2 est nul mais que les déterminants des sous matrices d'ordre 3 de M_2 semblent eux aussi être nuls ainsi que les déterminants des sous matrices d'ordre 2 de M_2. On va s'y prendre différemment et étudier plutôt le rang de l'endomorphisme $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ dont la matrice de représentation dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ au départ et à l'arrivée vaut M_2. On a alors

$$f(x,y,z,t) = (x+t, 0, 0, x+t)$$

et on voit donc que le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f est donné par

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f) &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; x+t=0\right\}\\ &= \left\{(x,y,z,-x) \in \mathbb{R}^4 \;/\; x,y,z \in \mathbb{R}\right\}\\ &= \left\{x(1,0,0,-1)+y(0,1,0,0)+z(0,0,1,0) \in \mathbb{R}^4 \;/\; x,y,z \in \mathbb{R}\right\} \ .\end{aligned}$$

Si (e_1,e_2,e_3,e_4) est la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on en déduit que

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(e_1-e_4, e_2, e_3) \ .$$

La famille (e_1-e_4, e_2, e_3) est clairement libre, donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et ainsi

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = 3 \ .$$

Le théorème du rang donne ensuite que $\mathrm{Rg}(f) = 4-1 = 1$. Donc le rang de M_2 vaut 1 et ainsi le rang de Q vaut 1 lorsque $\varepsilon = 1$. □

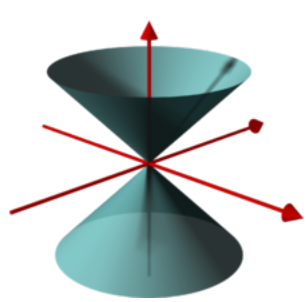
Correction de l'exercice 3.17. On suppose que $Q(x) \neq 0$ pour tout $x \in E$. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $x_0, x_1 \in E$ tels que $Q(x_0) < 0$ et $Q(x_1) > 0$. Pour $t \in [0,1]$ on définit $x_t = (1-t)x_0 + tx_1$, et on poste $f(t) = Q(x_t)$. Si B est la forme bilinéaire symétrique associée à Q, alors

$$\begin{aligned}f(t) &= B((1-t)x_0+tx_1, (1-t)x_0+tx_1)\\ &= (1-t)^2Q(x_0)+t^2Q(x_1)+2t(1-t)B(x_0,x_1) \ .\end{aligned}$$

En particulier $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue et, par hypothèse, $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que $f(t_0) = 0$. Or $f(t_0) = 0$ signifie que $Q(x_{t_0}) = 0$ ce qui est impossible sauf si $x_{t_0} = 0$. Mais si $x_{t_0} = 0$ alors $x_1 = \alpha x_0$ avec $\alpha = (t_0-1)/t_0$ et on obtient donc que $Q(x_1) = \alpha^2 Q(x_0)$, ce qui est impossible puisque nous avons supposé que $Q(x_0) < 0$ et $Q(x_1) > 0$. On a donc bien une contradiction et c'est donc que soit $Q(x) > 0$ pour tout $x \in E$, soit $Q(x) < 0$ pour tout $x \in E$. □

Correction de l'exercice 3.18. Le cône isotrope $\mathcal{C}_Q$ de Q est constitué des $x = (x_1,x_2,x_3)$ qui sont tels que $Q(x) = 0$. On a $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ et donc

$$\mathcal{C}_Q = \left\{(x_1,x_2,x_3) \;/\; x_3^3 = x_1^2 + x_2^2\right\}$$



Le noyau de $\mathcal{N}_Q$ de Q est constitué des $x = (x_1,x_2,x_3)$ qui sont tels que $B(x,y) = 0$ pour tout $y = (y_1,y_2,y_3)$. On trouve donc $\mathcal{N}_Q = \{(0,0,0)\}$. Le cône isotrope

$\mathcal{C}_{\tilde{Q}}$ de $\tilde{Q}$ est constitué des $x = (x_1, x_2, x_3)$ qui sont tels que $\tilde{Q}(x) = 0$. On a $\tilde{Q}(x) = x_1^2 - x_3^2$ et donc $\mathcal{C}_{\tilde{Q}} = \{(x_1, x_2, x_3) \ / \ x_3 = x_1 \text{ ou } x_3 = -x_1\}$. Le noyau de $\mathcal{N}_{\tilde{Q}}$ de $\tilde{Q}$ est constitué des $x = (x_1, x_2, x_3)$ qui sont tels que $\tilde{B}(x, y) = 0$ pour tout $y = (y_1, y_2, y_3)$. On trouve donc $\mathcal{N}_{\tilde{Q}} = \{(0, x_2, 0), \ x_2 \in \mathbb{R}\}$. □

Correction de l'exercice 3.19. **(1)** Q est une forme quadratique car Q est un polynôme homogène de degré 2 des variables coordonnées (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

(2) On écrit que

$$\begin{aligned} Q(X) &= 2x_1^2 - 2x_2^2 - 6x_3^2 + 3x_1x_2 - 4x_1x_3 + 7x_2x_3 \\ &= 2x_1^2 - 2x_2^2 - 6x_3^2 + \frac{3}{2}(x_1x_2 + x_2x_1) \\ &\quad - 2(x_1x_3 + x_3x_1) + \frac{7}{2}(x_2x_3 + x_3x_2) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} B(x, y) &= 2x_1y_1 - 2x_2y_2 - 6x_3y_3 + \frac{3}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) \\ &\quad - 2(x_1y_3 + x_3y_1) + \frac{7}{2}(x_2y_3 + x_3y_2) \ . \end{aligned}$$

On a

$$M = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{7}{2} \\ -2 & \frac{7}{2} & -6 \end{pmatrix} \ .$$

(3) On règle pour commencer le cas de x_1 en cherchant à l'intégrer dans un carré. On écrit que

$$\begin{aligned} Q(X) &= 2x_1^2 - 2x_2^2 - 6x_3^2 + 3x_1x_2 - 4x_1x_3 + 7x_2x_3 \\ &= 2(x_1^2 + \frac{3}{2}x_1x_2 - 2x_1x_3) - 2x_2^2 - 6x_3^2 + 7x_2x_3 \\ &= 2(x_1 + \frac{3}{4}x_2 - x_3)^2 - \frac{9}{8}x_2^2 - 2x_3^2 + 3x_2x_3 - 2x_2^2 - 6x_3^2 + 7x_2x_3 \\ &= 2(x_1 + \frac{3}{4}x_2 - x_3)^2 - \frac{25}{8}x_2^2 - 8x_3^2 + 10x_2x_3 \\ &= 2(x_1 + \frac{3}{4}x_2 - x_3)^2 - \frac{25}{8}(x_2^2 - \frac{80}{25}x_2x_3) - 8x_3^2 \\ &= 2(x_1 + \frac{3}{4}x_2 - x_3)^2 - \frac{25}{8}(x_2^2 - \frac{16}{5}x_2x_3) - 8x_3^2 \end{aligned}$$

On s'occupe maintenant de x_2. On écrit que

$$\begin{aligned} &= 2(x_1 + \frac{3}{4}x_2 - x_3)^2 - \frac{25}{8}(x_2^2 - \frac{16}{5}x_2x_3) - 8x_3^2 \\ &= 2(x_1 + \frac{3}{4}x_2 - x_3)^2 - \frac{25}{8}(x_2 - \frac{8}{5}x_3)^2 + \frac{25}{8}\left(\frac{8}{5}\right)^2 x_3^2 - 8x_3^2 \\ &= 2(x_1 + \frac{3}{4}x_2 - x_3)^2 - \frac{25}{8}(x_2 - \frac{8}{5}x_3)^2 \end{aligned}$$

On a donc $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$ où
$$\tilde{Q}(X_1, X_2, X_3) = 2X_1^2 - \frac{25}{8}X_2^2$$
et où
$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 + \frac{3}{4}x_2 - x_3, x_2 - \frac{8}{2}x_3, x_3\right)$$
Reste à vérifier que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$. La matrice A de représentation de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (au départ et à l'arrivée) est la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$
Elle est triangulaire supérieure. Son déterminant est alors le produit des termes diagonaux. Donc $\det(A) = 1$ qui est différent de 0 et donc Φ est bien un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur lui-même.

(4) La signature de Q est la même que la signature de $\tilde{Q}$. Le rang de Q est lui aussi égal au rang de $\tilde{Q}$ puisque le rang est la somme des deux termes qui composent la signature. Clairement $\tilde{Q}$ est de signature $(1, 1)$. Donc la signature de Q est $(1, 1)$ et le rang de Q est $2 = 1 + 1$.

(5) Soit $\mathcal{C}_Q$ le cône isotrope de Q et soit $\mathcal{C}_{\tilde{Q}}$ le cône isotrope de $\tilde{Q}$. Clairement,
$$u \in \mathcal{C}_Q \;\Leftrightarrow\; \Phi(u) \in \mathcal{C}_{\tilde{Q}}$$
puisque $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$, et donc $\mathcal{C}_Q = \Phi^{-1}(\mathcal{C}_{\tilde{Q}})$. Reste à caractériser $\mathcal{C}_{\tilde{Q}}$. Or $X \in \mathcal{C}_{\tilde{Q}}$ si et seulement si
$$2X_1^2 - \frac{25}{8}X_2^2 = 0$$
soit
$$X_2 = \pm\frac{4}{5}X_1 .$$
On a alors plusieurs expressions possibles:
$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_Q &= \left\{(x_1, x_2, x_3) \;/\; \left(x_2 - \frac{8}{2}x_3\right)^2 = \frac{16}{25}\left(x_1 + \frac{3}{4}x_2 - x_3\right)^2\right\} \\
&= \left\{(x_1, x_2, x_3) \;/\; x_2 - \frac{8}{2}x_3 = \frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 - \frac{4}{5}x_3\right\} \\
&\quad \bigcup \left\{(x_1, x_2, x_3) \;/\; x_2 - \frac{8}{2}x_3 = -\frac{4}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_2 + \frac{4}{5}x_3\right\} \\
&= \left\{(x_1, x_2, x_3) \;/\; \frac{4}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2 + \frac{32}{10}x_3 = 0\right\} \\
&\quad \bigcup \left\{(x_1, x_2, x_3) \;/\; \frac{4}{5}x_1 + \frac{8}{5}x_2 - \frac{48}{10}x_3 = 0\right\}
\end{aligned}$$
ou encore $\mathcal{C}_Q = \Phi^{-1}\left(\left\{(X_1, X_2, X_3) \;/\; X_2 = \pm\frac{4}{5}X_1\right\}\right)$. $\square$

Correction de l'exercice 3.20. Même principe que ci-dessus. Tout d'abord, Q est une forme quadratique car Q est un polynôme homogène de degré 2 des variables coordonnées (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$). On cherche maintenant à écrire

Q sous la forme $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$ où $\tilde{Q}$ s'écrit sous forme réduite en différence de carrés et Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On écrit:

$$\begin{aligned} Q(X) &= x^2 - 2y^2 + xz + yz \\ &= (x + \frac{z}{2})^2 - \frac{z^2}{4} - 2y^2 + yz \\ &= (x + \frac{z}{2})^2 - 2(y^2 - y\frac{z}{2}) - \frac{z^2}{4} \\ &= (x + \frac{z}{2})^2 - 2(y - \frac{z}{4})^2 + \frac{z^2}{8} - \frac{z^2}{4} \\ &= (x + \frac{z}{2})^2 - 2(y - \frac{z}{4})^2 - \frac{z^2}{8} \ . \end{aligned}$$

Soit $\tilde{Q}$ la forme quadratique donnée par

$$\tilde{Q}(u, v, w) = u^2 - 2v^2 - \frac{1}{8}w^2 \ .$$

Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\Phi(x, y, z) = \left(x + \frac{1}{2}z, y - \frac{1}{4}z, z\right) \ .$$

Alors $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$. La matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (au départ et à l'arrivée) vaut

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Son déterminant vaut $\det(M) = 1$ et donc Φ est un isomorphisme. On en déduit que la signature de Q est celle de $\tilde{Q}$ et que le rang de Q est celui de $\tilde{Q}$. La signature de $\tilde{Q}$ est clairement $(1, 2)$. La signature de Q est donc aussi $(1, 2)$. Le rang de Q est $3 = 1 + 2$. □

Correction de l'exercice 3.21. Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Pour

$$P(X) = a + bX + cX^2$$

on a

$$\begin{aligned} Q(P) &= (2c + b)^2 - b^2 \\ &= 4c^2 + 4bc \end{aligned}$$

et on a donc

$$Q(a, b, c) = 4c^2 + 4bc \ .$$

En particulier, Q s'écrivant comme un polynôme homogène de degré deux en les variables coordonnées cela confirme que Q est bien une forme quadratique. On écrit

$$\begin{aligned} Q(a, b, c) &= 4(c^2 + bc) \\ &= 4(c + \frac{b}{2})^2 - b^2 \end{aligned}$$

et on a donc $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$ où

$$\tilde{Q}(A, B, C) = 4C^2 - B^2$$

et où Φ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ donné pour $P = a + bX + cX^2$ par

$$\Phi(a,b,c) = \left(a, b, c + \frac{1}{2}b\right) .$$

La matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ (au départ et à l'arrivée) est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant vaut 1. Donc Φ est un isomorphisme et la signature de Q est égale à celle de $\tilde{Q}$. La signature de $\tilde{Q}$ vaut $(1,1)$. La signature de Q est donc $(1,1)$. Son rang est $2 = 1 + 1$. $\square$

Correction de l'exercice 3.22. Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Pour

$$P(X) = a + bX + cX^2$$

on a

$$\begin{aligned} Q(P) &= \int_0^1 x(a + bx + cx^2)(b + 2cx)dx \\ &= \int_0^1 \left(abx + (2ac + b^2)x^2 + 3bcx^3 + 2c^2x^4\right) dx \\ &= \frac{1}{2}ab + \frac{2}{3}ac + \frac{1}{3}b^2 + \frac{3}{4}bc + \frac{2}{5}c^2 \\ &= \frac{1}{3}b^2 + \frac{2}{5}c^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{2}{3}ac + \frac{3}{4}bc . \end{aligned}$$

En particulier, Q s'écrivant comme un polynôme homogène de degré deux en les variables coordonnées cela confirme que Q est bien une forme quadratique. On cherche maintenant à écrire la réduction de Q. On a

$$\begin{aligned} Q(a,b,c) &= \frac{1}{3}(b^2 + \frac{3}{2}ab + \frac{9}{4}bc) + \frac{2}{5}c^2 + \frac{2}{3}ac \\ &= \frac{1}{3}(b + \frac{3}{4}a + \frac{9}{8}c)^2 - \frac{3}{16}a^2 - \frac{27}{64}c^2 - \frac{9}{16}ac + \frac{2}{5}c^2 + \frac{2}{3}ac \\ &= \frac{1}{3}(b + \frac{3}{4}a + \frac{9}{8}c)^2 - \frac{3}{16}a^2 + \frac{5}{48}ac - \frac{7}{320}c^2 \\ &= \frac{1}{3}(b + \frac{3}{4}a + \frac{9}{8}c)^2 - \frac{3}{16}(a^2 - \frac{5}{9}ac) - \frac{7}{320}c^2 \\ &= \frac{1}{3}(b + \frac{3}{4}a + \frac{9}{8}c)^2 - \frac{3}{16}(a - \frac{5}{18}c)^2 + \frac{25}{1728}c^2 - \frac{7}{320}c^2 \\ &= \frac{1}{3}(\frac{3}{4}a + b + \frac{9}{8}c)^2 - \frac{3}{16}(a - \frac{5}{18}c)^2 - \frac{1}{135}c^2 \end{aligned}$$

et on a donc $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$ où

$$\tilde{Q}(A,B,C) = \frac{1}{3}A^2 - \frac{3}{16}B^2 - \frac{1}{135}C^2$$

et où Φ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ donné pour $P = a + bX + cX^2$ par

$$\Phi(a,b,c) = \left(\frac{3}{4}a + b + \frac{9}{8}c, a - \frac{5}{18}c, c\right) .$$

La matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ (au départ et à l'arrivée) est

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 1 & \frac{9}{8} \\ 1 & 0 & -\frac{5}{18} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant vaut, en développant suivant la dernière ligne,

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

qui est non nul. Donc Φ est un isomorphisme et la signature de Q est égale à celle de $\tilde{Q}$. La signature de $\tilde{Q}$ vaut $(1, 1)$. La signature de Q est donc $(1, 2)$. Son rang est $3 = 1 + 2$. □

Correction de l'exercice 3.23. Q est une forme quadratique car Q est un polynôme homogène de degré 2 des variables coordonnées (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$). On écrit maintenant que

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &= (x + y)^2 - y^2 + (1 + a)y^2 + (1 + a + a^2)z^2 - 2ayz \\ &= (x + y)^2 + ay^2 + (1 + a + a^2)z^2 - 2ayz \\ &= (x + y)^2 + a(y - z)^2 - az^2 + (1 + a + a^2)z^2 \\ &= (x + y)^2 + a(y - z)^2 + (1 + a^2)z^2 \end{aligned}$$

Soit Q_a la forme quadratique

$$Q_a(X, Y, Z) = X^2 + aY^2 + (1 + a^2)Z^2 \ .$$

On a $Q = Q_a \circ \Phi$ où

$$\Phi(x, y, z) = (x + y, y - z, z) \ .$$

La matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (au départ et à l'arrivée) est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant vaut $1 \neq 0$. Donc Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et par suite la signature de Q est égale à la signature de Q_a. On voit alors facilement que:

(i) Si $a > 0$ la signature de Q_a (et donc de Q) vaut $(3, 0)$

(ii) Si $a = 0$ la signature de Q_a (et donc de Q) vaut $(2, 0)$

(iii) Si $a < 0$ la signature de Q_a (et donc de Q) vaut $(2, 1)$

D'où la réponse à la question posée. □

Correction de l'exercice 3.24. **(1)** Soient

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \ .$$

On a

$$MN = \begin{pmatrix} a\tilde{a} + b\tilde{c} & a\tilde{b} + b\tilde{d} \\ c\tilde{a} + d\tilde{c} & c\tilde{b} + d\tilde{d} \end{pmatrix}$$

et donc

$$\mathrm{Tr}(MN) = a\tilde{a} + d\tilde{d} + b\tilde{c} + \tilde{b}c \ .$$

Bien que $MN \neq NM$ a priori (le produit matriciel n'est pas commutatif), on a donc quand même que $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$ pour tous $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donc B est symétrique. Pour montrer la bilinéarité de B il suffit alors de montrer que B est linéaire en M à N fixée. Le terme $\mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(N)$ ne pose aucun problème car la trace est linéaire. Pour le second terme on remarque que pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et tous $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$(\lambda M_1 + \mu M_2)\, N = \lambda M_1 N + \mu M_2 N$$

et en utilisant de nouveau la linéarité de la trace on récupère la linéraité en M à N fixée du terme $\mathrm{Tr}(MN)$. Au total, B est symétrique et B est linéaire en M à N fixée, donc B est bilinéaire symétrique.

(2) On a $\mathrm{Tr}(A_1) = 1$, $\mathrm{Tr}(A_2) = 0$, $\mathrm{Tr}(A_3) = 0$ et $\mathrm{Tr}(A_4) = 1$. On a aussi

$$\begin{aligned}
A_1^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_1A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
A_1A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_1A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
A_2^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
A_2A_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
A_3A_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(A_1^2) = 1, \mathrm{Tr}(A_1A_2) = 0, \mathrm{Tr}(A_1A_3) = 0, \mathrm{Tr}(A_1A_4) = 0, \\
&\mathrm{Tr}(A_2^2) = 0, \mathrm{Tr}(A_2A_3) = 1, \mathrm{Tr}(A_2A_4) = 0, \mathrm{Tr}(A_3^2) = 0 \\
&\mathrm{Tr}(A_3A_4) = 0, \mathrm{Tr}(A_4^2) = 1 .
\end{aligned}$$

Si les B_{ij} sont les composantes de la matrice de représentation $M_{\mathcal{B}}(B)$ de B dans $\mathcal{B}$,

$$B_{ij} = B(A_i, A_j) .$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
&B_{11} = 0, B_{12} = 0, B_{13} = 0, B_{14} = 1/2 \\
&B_{21} = B_{12}, B_{22} = 0, B_{23} = -1/2, B_{24} = 0 \\
&B_{31} = B_{13}, B_{32} = B_{23}, B_{33} = 0, B_{34} = 0 \\
&B_{41} = B_{14}, B_{42} = 24, B_{43} = B_{34}, B_{44} = 0
\end{aligned}$$

Donc

$$M_{\mathcal{B}}(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en vertue de ce qui a été calculé plus haut.

(3) Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} P(X) &= \begin{vmatrix} a-X & b \\ c & d-X \end{vmatrix} \\ &= (a-X)(d-X) - bc \\ &= X^2 - (a+d)X + ad - bc \\ &= X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)\ . \end{aligned}$$

D'où le résutlat demandé.

(4) Soit I_2 la matrice identité 2×2. On veut montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0\ .$$

Ecrivons A comme à la question précédente. On a $\mathrm{Tr}(A) = a+d$ et $\det(A) = ad-bc$. Par ailleurs,

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned} &A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I_2 \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc-a^2-ad+ad-bc & ab+bd-ab-bd \\ ac+dc-ac-dc & bc+d^2-ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ . \end{aligned}$$

D'où le résutlat demandé.

(5) La forme quadratique Q associée à B est donnée par

$$Q(A) = B(A,A)\ .$$

On obtient donc avec la question (4) et la linéarité de la trace que pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} 2Q(A) &= \mathrm{Tr}(A)^2 - \mathrm{Tr}(A^2) \\ &= \mathrm{Tr}(A)^2 - \mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}(A)A - \det(A)I_2) \\ &= \mathrm{Tr}(A)^2 - \mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}(A)A) + \mathrm{Tr}(\det(A)I_2) \\ &= \mathrm{Tr}(A)^2 - \mathrm{Tr}(A)^2 + \det(A)\mathrm{Tr}(I_2) \\ &= 2\det(A) \end{aligned}$$

de sorte que $Q(A) = \det(A)$ pour tout A, ce qui est le résutlat demandé.

(6) On sait que pour tous $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$B(M,N) = \frac{1}{2}\left(Q(M+N) - Q(M) - Q(N)\right)\ .$$

Avec la question précédente et la définition de B on obtient donc que

$$\mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(N) - \mathrm{Tr}(MN) = \det(M+N) - \det(M) - \det(N)$$

pour tous $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ce qui est là encore le résultat demandé. $\square$

Correction de l'exercice 3.25. Clairement B est bilinéaire et symétrique. Reste à démontrer que B est définie positive, à savoir que $B(x,x) \geq 0$ pour tout x et nul si et seulement si $x = 0$. On a

$$\begin{aligned} B(x,x) &= 5x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + 4x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^3 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + 2(x_1 - x_3)^2 + 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + 2(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 \end{aligned}$$

et donc $B(x,x) \geq 0$ pour tout x. De plus $B(x,x) = 0$ si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, x_1 - x_3 = 0, x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 = 0, x_2 = 0 \end{cases}$$

Donc $B(x,x) = 0$ si et seulement si $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ et donc si et seulement si $x = 0$ (en tant que vecteur). □

Correction de l'exercice 3.26. Clairement $\|\cdot\|$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Il est tout aussi clair que $\|(x,y)\| = 0$ si et seulement si $(x,y) = (0,0)$ et que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda(x,y)\| = |\lambda| \times \|(x,y)\|$. Pour finir de montrer que $\|\cdot\|$ est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$ il reste à montrer que $\|\cdot\|$ vérifie l'inégalité triangulaire. On a

$$\begin{aligned} \|(x,y) + (\tilde{x},\tilde{y})\| &= \|(x + \tilde{x}, y + \tilde{y})\| \\ &= \max(|x + \tilde{x}|, |y + \tilde{y}|) \end{aligned}$$

et, clairement, pour tous $x, \tilde{x}, y, \tilde{y}$,

$$\begin{aligned} |x + \tilde{x}| &\leq |x| + |\tilde{x}| \leq \max(|x|, |y|) + \max(|\tilde{x}|, |\tilde{y}|) \\ |y + \tilde{y}| &\leq |y| + |\tilde{y}| \leq \max(|x|, |y|) + \max(|\tilde{x}|, |\tilde{y}|) \ . \end{aligned}$$

Par suite,

$$\|(x,y) + (\tilde{x},\tilde{y})\| \leq \|(x,y)\| + \|(\tilde{x},\tilde{y})\|$$

ce qui constitue l'inégalité triangulaire que nous voulions démontrer. Donc $\|\cdot\|$ est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$. Pour ce qui est de la question qui suit, il est clair que $B_0(1) \leq [-1,1] \times [-1,1]$ puisque $(x,y) \in B_0(1)$ entraîne que $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$. Réciproquement, si (x,y) est tel que $(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1]$ alors $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$, et donc $\|(x,y)\| \leq 1$ de sorte que $(x,y) \in B_0(1)$. Donc

$$B_0(1) = [-1,1] \times [-1,1] \ .$$

Les “boules sont des carrés” pour cette norme. □

Correction de l'exercice 3.27. Il est clair que B est bilinéaire symétrique sur $E \times E$. Il reste à démontrer que B est définie positive. On a

$$B(f,f) = f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \ .$$

Donc $B(f,f) \geq 0$ pour toute fonction $f \in E$ puisque $(f')^2 \geq 0$. Si maintenant $B(f,f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et

$$\int_0^1 f'(t)^2 dt = 0 \ .$$

De cette dernière relation on tire, puisque $(f')^2 \geq 0$ et pusique f' est continue, que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Par suite f est constante sur $[0,1]$. Et comme

$f(0) = 0$ c'est que f est la fonction nulle. Donc B est bien définie positive. C'est un produit scalaire sur E. $\square$

Correction de l'exercice 3.28. Clairement B est bilinéaire symétrique. Il reste à déterminer pour quels α la forme bilinéaire symétrique B est définie positive. A priori on ne voit pas d'astuce simple et immédiate qui réglerait le problème. On va donc réduire $B(x,x)$ comme on réduisait les formes quadratiques. Au final il faudra que Q soit de signature $(3,0)$ pour que B soit définie positive. On a

$$\begin{aligned}
B(x,x) &= 2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 - 4\alpha x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3 \\
&= 2(x_1^2 - 2\alpha x_1x_2 - 2x_1x_3) + 4x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_2x_3 \\
&= 2(x_1 - \alpha x_2 - x_3)^2 - 2\alpha^2x_2^2 - 2x_3^2 - 4\alpha x_2x_3 \\
&\quad + 4x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_2x_3 \\
&= 2\left(x_1 - \alpha x_2 - x_3\right)^2 + 2(2-\alpha^2)x_2^2 - 2(1+2\alpha)x_2x_3 + 3x_3^2 \\
&= 2\left(x_1 - \alpha x_2 - x_3\right)^2 + 2(2-\alpha^2)\left(x_2^2 - \frac{1+2\alpha}{2-\alpha^2}x_2x_3\right) + 3x_3^2 \\
&= 2\left(x_1 - \alpha x_2 - x_3\right)^2 + 2(2-\alpha^2)\left(x_2 - \frac{1+2\alpha}{2(2-\alpha^2)}x_3\right)^2 \\
&\quad + 3x_3^2 - \frac{(1+2\alpha)^2}{2(2-\alpha^2)}x_3^2 \\
&= 2\left(x_1 - \alpha x_2 - x_3\right)^2 + 2(2-\alpha^2)\left(x_2 - \frac{1+2\alpha}{2(2-\alpha^2)}x_3\right)^2 \\
&\quad + 3\left(1 - \frac{(1+2\alpha)^2}{6(2-\alpha^2)}\right)x_3^2
\end{aligned}$$

si $\alpha^2 \neq 2$, donc si $\alpha \neq \pm\sqrt{2}$, et

$$\begin{aligned}
B(x,x) &= 2\left(x_1 - \alpha x_2 - x_3\right)^2 + 3x_3^2 - 2(1+2\alpha)x_2x_3 \\
&= 2\left(x_1 - \alpha x_2 - x_3\right)^2 + 3\left(x_3^2 - \frac{2}{3}(1+2\alpha)x_2x_3\right) \\
&= 2\left(x_1 - \alpha x_2 - x_3\right)^2 - \frac{(1+2\alpha)^2}{3}x_2^2 + 3\left(x_3 - \frac{1}{3}(1+2\alpha)x_2\right)^2
\end{aligned}$$

si $\alpha^2 = 2$, donc si $\alpha = \pm\sqrt{2}$. Dans ce dernier cas de figure, si on choisit (x_1, x_2, x_2) tel que $x_2 = 1$,

$$x_3 = \frac{1+2\alpha}{3} \text{ et } x_1 = \alpha + \frac{1+2\alpha}{3}$$

alors

$$B(x,x) = -\frac{(1+2\alpha)^2}{3}$$

qui est strictement négatif. Donc B n'est pas positive et B n'est certainement pas un produit scalaire si $\alpha^2 = 2$, donc si $\alpha = \pm\sqrt{2}$. Si maintenant $\alpha^2 \neq \pm 2$, on revient au premier calcul. Si $\alpha^2 > 2$ on voit en prenant $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ et $x_1 = \alpha$ que

$$B(x,x) = 2(2-\alpha^2) < 0\ .$$

Là encore B n'est pas un produit scalaire pusiqu'elle n'est même pas positive. Supposons maintenant que $\alpha^2 < 2$, soit $\alpha \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. Alors $2 - \alpha^2 > 0$ et il nous faut maintenant étudier le signe du facteur de x_3^2. On a

$$\begin{aligned}1-\frac{(1+2\alpha)^2}{6(2-\alpha^2)}>0 &\Leftrightarrow \frac{(1+2\alpha)^2}{6(2-\alpha^2)}<1\\ &\Leftrightarrow (1+2\alpha)^2<6(2-\alpha^2)\\ &\Leftrightarrow 10\alpha^2+4\alpha-11<0\ .\end{aligned}$$

Le discriminant Δ du polynôme $10X^2+4X-11$ vaut $\Delta=456$ et donc, pour que l'inégalité soit vérifiée il faut que α se situe entre les deux racines de ce polynôme, soit

$$-\frac{4+\sqrt{456}}{20}<\alpha<\frac{-4+\sqrt{456}}{20}\ .$$

On a $\frac{-4+\sqrt{456}}{20}<\sqrt{2}$ et $\frac{4+\sqrt{456}}{20}<\sqrt{2}$. On a donc

$$\begin{aligned}&(1)\ 1-\frac{(1+2\alpha)^2}{6(2-\alpha^2)}>0 \text{ si } \alpha\in\left]-\frac{4+\sqrt{456}}{20},\frac{-4+\sqrt{456}}{20}\right[\\ &(2)\ 1-\frac{(1+2\alpha)^2}{6(2-\alpha^2)}=0 \text{ si } \alpha=-\frac{4+\sqrt{456}}{20} \text{ ou } \alpha=\frac{-4+\sqrt{456}}{20}\\ &(3)\ 1-\frac{(1+2\alpha)^2}{6(2-\alpha^2)}<0 \text{ si } \alpha<-\frac{4+\sqrt{456}}{20} \text{ ou } \alpha>\frac{-4+\sqrt{456}}{20}\end{aligned}$$

Dans le premier cas, $B(x,x)\geq 0$ pour tout x, et $B(x,x)=0$ si et seulement si

$$\begin{cases}x_1-\alpha x_2-x_3=0\\ x_2-\frac{1+2\alpha}{2(2-\alpha^2)}x_3=0\\ x_3=0\end{cases}$$

et donc si et seulement si $x_1=x_2=x_3=0$, soit si et seulement si $x=0$. Donc B est bien définie positive, et donc bien un produit scalaire, dans le cas (1). Dans le cas (2), on a bien que $B(x,x)\geq 0$ pour tout x (en tant que somme de deux carrés) mais en prenant $x_3=1$,

$$x_2=\frac{1+2\alpha}{2(2-\alpha^2)} \text{ et } x_1=\alpha\frac{1+2\alpha}{2(2-\alpha^2)}+1\ ,$$

on obtient que $B(x,x)=0$ alors que $x\neq 0$ puisque sa troisième coordonnée $x_3=1$. Donc B n'est pas définie positive et n'est donc pas un produit scalaire. Dans le cas (3), en prenant $x_3=1$,

$$x_2=\frac{1+2\alpha}{2(2-\alpha^2)} \text{ et } x_1=\alpha\frac{1+2\alpha}{2(2-\alpha^2)}+1\ ,$$

on obtient que

$$B(x,x)=3\left(1-\frac{(1+2\alpha)^2}{6(2-\alpha^2)}\right)<0\ .$$

Donc B n'est pas positive et B n'est certainement pas un produit scalaire. En conclusion, B est un produit scalaire si et seulement si

$$\alpha\in\left]-\frac{4+\sqrt{456}}{20},\frac{-4+\sqrt{456}}{20}\right[\ .$$

$\square$

Remarque: On aurait aussi pu conclure différement à partir des deux expressions réduites de $Q(x) = B(x,x)$ en écrivant que $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$, avec Φ isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et

$$\tilde{Q}(X,Y,Z) = 2X^2 + 2(2-\alpha^2)Y^2 + 3\left(1 - \frac{(1+2\alpha)^2}{6(2-\alpha^2)}\right) Z^2 \text{ si } \alpha^2 \neq 2$$
$$\tilde{Q}(X,Y,Z) = 2X^2 - \frac{(1+2\alpha)^2}{3} Y^2 + 3Z^2 \text{ si } \alpha^2 = 2$$

Comme Φ est un isomorphisme, B est définie positive si et seulement si $\tilde{Q}(X,Y,Z) > 0$ pour tout $(X,Y,Z) \neq (0,0,0)$. Pour cela il faut (et il suffit) que $\tilde{Q}$ soit de signature $(3,0)$. On veut donc que $2 - \alpha^2 > 0$ et que

$$1 - \frac{(1+2\alpha)^2}{6(2-\alpha^2)} > 0$$

dans le premier cas. Dans le second cas, $-\frac{(1+2\alpha)^2}{3} < 0$ et $\tilde{Q}$ est donc de signature $(2,1)$, ce qui empêche B d'être définie positive. On retrouve alors les calculs faits ci-dessus pour aboutir à la conclusion $\alpha \in \left]-\frac{4+\sqrt{456}}{20}, \frac{-4+\sqrt{456}}{20}\right[$.

Correction de l'exercice 3.29. On a

$$\begin{aligned}
{}^tA_1A_1 &= \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\\
{}^tA_1A_2 &= \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\\
{}^tA_1A_3 &= \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\
{}^tA_1A_4 &= \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\
{}^tA_2A_2 &= \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\\
{}^tA_2A_3 &= \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\
{}^tA_2A_4 &= \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\
{}^tA_3A_3 &= \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\\
{}^tA_3A_4 &= \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\\
{}^tA_4A_4 &= \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc, en passant aux traces,

$$\begin{aligned}
&\langle A_1, A_1\rangle = 1, \langle A_2, A_2\rangle = 1\\
&\langle A_3, A_3\rangle = 1, \langle A_4, A_4\rangle = 1\\
&\langle A_1, A_2\rangle = 0, \langle A_1, A_3\rangle = 0, \langle A_1, A_4\rangle = 0\\
&\langle A_2, A_3\rangle = 0, \langle A_2, A_4\rangle = 0, \langle A_3, A_4\rangle = 0\ .
\end{aligned}$$

La base $\mathcal{B}$ est bien une base orthonormale pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$. □

Correction de l'exercice 3.30. On vérifie facilement que B est bilinéaire symétrique. Reste à montrer que B est définie positive. On a

$$\begin{aligned} B(x,x) &= 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 \\ &= 2(x_1 - x_2)^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $B(x,x) \geq 0$ pour tout x et que $B(x,x) = 0$ si et seulement si $x_1 = x_2$ et $x_2 = 0$, et donc si et seulement si $x_1 = x_2 = 0$. Donc B est bien définie positive. Par suite B est un produit scalaire. On utilise Gram-Schmidt en partant de $\mathcal{B}$. Si $\|\cdot\|$ est la norme associée à B, alors

$$\|e_1\|^2 = B(e_1, e_1) = 2 \ .$$

On pose

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \ .$$

On calcule

$$B(e_2, \tilde{e}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} B(e_1, e_2) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \ .$$

On pose

$$x = e_2 - B(e_2, \tilde{e}_1)\tilde{e}_1 = (1,1) \ .$$

On a $\|x\| = 1$ et on pose

$$\tilde{e}_2 = x = e_2 - B(e_2, \tilde{e}_1)\tilde{e}_1 = (1,1) \ .$$

Alors $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est une base orthonormée pour $\mathcal{B}$. □

Correction de l'exercice 3.31. **(1)** On vérifie sans difficulté que B est bilinéaire symétrique. Reste à déterminer sous quelle(s) condition(s) portant sur α a-t-on que B est définie positive. On a

$$\begin{aligned} B(x,x) &= x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha^2 x_1 x_2 \\ &= \alpha^2(x_1 - x_2)^2 + (1 - \alpha^2)(x_1^2 + x_2^2) \ . \end{aligned}$$

Si $|\alpha| < 1$, et donc si $\alpha^2 < 1$, alors $B(x,x) \geq 0$ pour tout x et $B(x,x) = 0$ si et seulement si $x = 0$. Si $|\alpha| = 1$, donc si $\alpha^2 = 1$, alors $B(x,x) \geq 0$ pour tout x mais il y a des vecteurs isotropes (non nuls). Par exemple $x = (1,1)$ est isotrope. Si $|\alpha| > 1$, et donc si $\alpha^2 > 1$, alors B n'est même plus positive. Par exemple, si $x = (1,1)$, alors $B(x,x) = 2(1-\alpha^2)$ est strictement négatif. En conclusion, B est un produit scalaire si et seulement si $|\alpha| < 1$.

(2) On pose $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On a $0 < \alpha < 1$. Donc B est un produit scalaire. Si $\|\cdot\|$ est la norme associée à B, alors $\|e_1\|^2 = B(e_1, e_1) = 1$. On pose $\tilde{e}_1 = e_1 = (1,0)$. On calcule $B(e_2, \tilde{e}_1) = -\frac{1}{2}$. On pose

$$x = e_2 - B(e_2, \tilde{e}_1)\tilde{e}_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \ .$$

On calcule $\|x\|^2 = B(x,x) = \frac{3}{4}$ et on pose

$$\tilde{e}_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \ .$$

Alors $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est une base orthonormée pour $\mathcal{B}$.

(3) Les coordonnées de x dans $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ sont

$$\begin{cases} x_1 = B(x, \tilde{e}_1) \\ x_2 = B(x, \tilde{e}_2) \end{cases}$$

On trouve donc

$$\begin{aligned} x_1 &= B(2e_1 + 3e_2, \tilde{e}_1) \\ &= 2B(e_1, e_1) + 3B(e_2, e_1) \\ &= 2 - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

En vertue de ce qui a été dit plus haut,

$$e_2 = -\frac{1}{2}\tilde{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{e}_2$$

et donc, puisque $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est orthonormée pour B,

$$\begin{aligned} x_2 &= B(2e_1 + 3e_2, \tilde{e}_2) \\ &= 2B(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) + 3B(e_2, \tilde{e}_2) \\ &= 3B(-\frac{1}{2}\tilde{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{e}_2, \tilde{e}_2) \\ &= -\frac{3}{2}B(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) + \frac{3\sqrt{3}}{2}B(\tilde{e}_2, \tilde{e}_2) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \ . \end{aligned}$$

On aurait bien sûr aussi pu procéder par calcul direct à partir de la formule $e_2 = -\frac{1}{2}\tilde{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{e}_2$ pour écrire que

$$2e_1 + 3e_2 = 2\tilde{e}_1 - \frac{3}{2}\tilde{e}_1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\tilde{e}_2 = \frac{1}{2}\tilde{e}_1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\tilde{e}_2 \ .$$

Le calcul ici est grandement simplifié par le fait que $\tilde{e}_1 = e_1$. □

Correction de l'exercice 3.32. Supposons que $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \|x + \lambda y\| \geq \|x\| &\Leftrightarrow \|x + \lambda y\|^2 \geq \|x\|^2 \\ &\Leftrightarrow 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Supposons $\langle x, y\rangle > 0$. Pour $\lambda < 0$ suffisamment proche de zéro on a alors que $2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 < 0$ puisque

$$2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 = 2\lambda\left(\langle x, y\rangle + \frac{\lambda}{2}\|y\|^2\right)$$

et $\langle x, y\rangle + \frac{\lambda}{2}\|y\|^2 > 0$ pour λ suffisamment proche de zéro. Supposons $\langle x, y\rangle < 0$. Pour $\lambda > 0$ suffisamment proche de zéro on obtient cette fois-ci que $2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 < 0$. Donc forcément $\langle x, y\rangle = 0$. Réciproquement, si $\langle x, y\rangle = 0$ alors $2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0$ pour tout λ et donc $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ pour tout λ. □

Correction de l'exercice 3.33. On a là une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}_2[X]$. Il faut montrer qu'elle est définie positive. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\langle P, P\rangle = P(-1)^2 + P(0)^2 + P(1)^2$$

et donc $\langle P, P\rangle \geq 0$ pour tout P. De plus, si $\langle P, P\rangle = 0$ pour un P, alors $P(-1) = P(0) = P(1) = 0$ et donc P a trois racines distinctes. Or un polynôme de degré deux autre que le polynôme nul a au plus deux racines distinctes. Donc, forcément, P est le polynôme nul et $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est définie positive. On a donc bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$. On orthonormalise maintenant $(1, X^2)$ avec le procédé de Gram-Schmidt. On a $\langle 1, 1\rangle = 3$. On pose $P_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Alors $\langle P_1, P_1\rangle = 1$. On pose maintenant

$$P = X^2 - \langle P_1, X^2\rangle P_1 \ .$$

Alors $\langle P_1, P\rangle = 0$. On a $\langle P_1, X^2\rangle = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Donc

$$P = X^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} P_1$$

et $\langle P, P\rangle = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. On pose

$$P_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} P \ .$$

Alors $\langle P_1, P_2\rangle = 0$ et $\langle P_2, P_2\rangle = 1$. Le procédé de Gram-Schmidt donne $\mathrm{Vect}(P_1, P_2) = \mathrm{Vect}(1, X^2)$ et donc (P_1, P_2) est bien une base orthonormée de E. □

Correction de l'exercice 3.34. Soit $f \in F^\perp$. Clairement, si $g(x) = xf(x)$, alors $g \in F$. Donc, forcément, $\langle f, g\rangle = 0$. Or

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 x f(x)^2 dx \ .$$

Par continuité, et puisque $xf(x)^2 \geq 0$ sur $[0, 1]$, on doit donc avoir que $xf(x)^2 = 0$ pour tout x. Donc f est la fonction nulle. D'où $F^\perp = \{0\}$. □

Correction de l'exercice 3.35. **(1)** Il est clair que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est une forme bilinéaire et symétrique. Il reste à vérifier qu'elle est bien définie positive. On a

$$\begin{aligned}
\langle x, x\rangle &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \\
&= (x_1 - x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \\
&= (x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 \\
&= (x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2
\end{aligned}$$

pour tout x. Par suite $\langle x, x\rangle \geq 0$ pour tout x et $\langle x, x\rangle = 0$ si et seulement si $x_1 = x_2$, $x_1 + x_3 = 0$, $x_2 = x_3$ et $x_3 = 0$, ce qui revient à dire que $\langle x, x\rangle = 0$ si et seulement si $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ et donc si et seulement si $x = 0$. Donc $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est définie positive et il s'agit bien d'un produit scalaire.

(2) On utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour orthonormaliser (e_1, e_2, e_3). On a $\|e_1\|^2 = 2$. On pose

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 \ , \ \text{et donc } \tilde{e}_1(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0) \ ,$$

où la notation $u(x,y,z)$ signifie ici que le vecteur u a pour coordonnées x,y,z dans la base canonique (celle dans laquelle nous avons les expressions de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et $\|\cdot\|$). On a $\langle e_2,\tilde{e}_1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. On pose

$$u = e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{e}_1 \text{ , et donc } u(\frac{1}{2},1,0) \text{ .}$$

On a

$$\|u\|^2 = 2(\frac{1}{2})^2 + 2 - 2(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \text{ .}$$

On pose

$$\tilde{e}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}u \text{ , et donc } \tilde{e}_2(\frac{1}{\sqrt{6}},\sqrt{\frac{2}{3}},0) \text{ .}$$

On a

$$\langle e_3,\tilde{e}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \langle e_3,\tilde{e}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} - \sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \text{ .}$$

On pose

$$v = e_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\tilde{e}_2 \text{ , et donc } v(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1) \text{ .}$$

On a

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &= 2(\frac{1}{3})^2 + 2(\frac{1}{3})^2 + 3 + 2(\frac{1}{3})(\frac{1}{3}) - 2(\frac{1}{3}) - 2(\frac{1}{3}) \\ &= \frac{2}{3} + 3 - \frac{4}{3} \\ &= \frac{7}{3} \text{ .}\end{aligned}$$

On pose

$$\tilde{e}_3 = \sqrt{\frac{3}{7}}v \text{ , et donc } \tilde{e}_3(-\frac{1}{\sqrt{21}},\frac{1}{\sqrt{21}},\sqrt{\frac{3}{7}}) \text{ .}$$

La famille $(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$. □

Correction de l'exercice 3.36. On a

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ .}$$

La base $\mathcal{B}$ est orthonormale pour le produit scalaire euclidien. On a donc (cf . cours)

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f^\star) = {}^tM_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$$

ce qui donne que

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f^\star) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ .}$$

et donc que

$$f^\star(xe_1 + ye_2 + ze_3) = (3x + 2y + z)e_1 - (x - 5y + z)e_2 + (x - 3y + z)e_3$$

pour tous $x,y,z \in \mathbb{R}^3$. □

Correction de l'exercice 3.37. **(1)** On calcule

$$\begin{aligned} f(A_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = A_1 + \alpha A_3 \\ f(A_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2A_2 + A_4 \\ f(A_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A_1 - A_3 \\ f(A_4) &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha A_2 + A_4 \ . \end{aligned}$$

Par suite,

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

(2) La base $\mathcal{B}$ est orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Par suite f est symétrique si et seulement si $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ est symétrique puisque (cf. cours) $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f^\star) = {}^tM_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ et donc $f = f^\star$ si et seulement si $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = {}^tM_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$. Donc f est symétrique si et seulement si $\alpha = 1$. □

Correction de l'exercice 3.38. On a

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

La matrice $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ est symétrique et $\mathcal{B}$ est orthonormale. Donc f est un endomorphisme symétrique. En vertue du théorème spectral il est donc diagonalisable et il existe une base orthonormale de vecteurs propres de f. Soit P le polynôme caractéristique de f. On a

$$\begin{aligned} P(x) &= \det \begin{pmatrix} 1-x & -2 & -2 \\ -2 & 1-x & -2 \\ -2 & -2 & 1-x \end{pmatrix} \\ &= (1-x)^3 - 8 - 8 - 4(1-x) - 4(1-x) - 4(1-x) \\ &= (1-x)^3 - 16 - 12(1-x) \\ &= -x^3 + 3x^2 + 9x - 27 \ . \end{aligned}$$

On remarque que 3 est racine. En factorisant par $x - 3$ on trouve

$$\begin{aligned} P(x) &= -(x-3)(x^2-9) \\ &= -(x-3)^3(x+3) \ . \end{aligned}$$

Les valeurs propres de f sont donc -3 (valeur propre simple) et 3 (valeur propre double). On note E_{-3} et E_3 les espaces propres correspondants. On a

$$E_{-3} = \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

On a

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = z \\ -x + 2y = z \\ x + y = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = z \\ 3y = 3z\ (2L_2 + L_1) \\ x + y = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = z \end{cases}$$

Donc

$$E_{-3} = \{x(e_1 + e_2 + e_3), x \in \mathbb{R}\}$$

et E_{-3} est la droite vectorielle de base $u = e_1 + e_2 + e_3$, soit $u(1,1,1)$. De même,

$$E_3 = \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

Donc

$$\begin{aligned} E_3 &= \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ x + y + z = 0\} \\ &= \{xe_1 + ye_2 - (x+y)e_3 \ / \ x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(e_1 - e_3) + y(e_2 - e_3) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\} \ . \end{aligned}$$

Soient $v = e_1 - e_3$ et $w = e_2 - e_3$. Alors

$$E_3 = \mathrm{Vect}(v, w) \ , \ v(1, 0, -1) \ , \ w(0, 1, -1)$$

Il est facile de vérifier que (v, w) est une famille libre. En effet,

$$\lambda v + \mu w = 0 \Leftrightarrow \lambda e_1 + \mu e_2 - (\lambda + \mu)e_3 = 0$$

et on trouve donc que $\lambda = \mu = 0$ puisque (e_1, e_2, e_3) est une base. Donc (v, w) est à la fois libre et génératrice pour E_3. C'est donc une base de E_3. Pour obtenir une base orthonormale qui diagonalise f on va normaliser u (pour obtenir un vecteur colinéaire de norme 1) et orthonormaliser (v, w) avec le procédé de Gram-Schmidt (et on se rappelle que cela suffit puisque les espaces propres d'un endomorphisme symétriques sont deux à deux orthogonaux). On a $\|u\|^2 = 3$. On pose

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} u \ , \ \text{ et donc } \tilde{e}_1(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \ .$$

On a $\|v\|^2 = 2$. On pose

$$\tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ , \ \text{ et donc } \tilde{e}_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \ .$$

On calcule $\langle w, \tilde{e}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On pose

$$U = w - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{e}_2 \ , \text{ et donc } U(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}) \ .$$

On calcule $\|U\|^2 = \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$. On pose

$$\tilde{e}_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}U \ , \text{ et donc } \tilde{e}_3(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) \ .$$

Alors $\tilde{e}_1$ est de norme 1 et $(\tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est une base orthonormale de E_3. Comme déjà dit E_{-3} et E_3 sont orthogonaux entre eux. Donc $\langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \rangle = 0$ et $\langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_3 \rangle = 0$. Par suite $\tilde{B} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ (on peut soit utiliser comme argument que $\mathbb{R}^3 = E_{-3} \oplus E_3$ puisque l'on sait que f est diagonalisable, et on utilise donc là un argument tiré du cours d'algèbre linéaire, soit utiliser comme argument que $\tilde{\mathcal{B}}$ est une famille orthonormale composée de 3 vecteurs en dimension 3). Elle est constituée de vecteurs propres de f puisque $\tilde{e}_1 \in E_{-3}$ et $\tilde{e}_2, \tilde{e}_3 \in E_3$. Dans cette base,

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

□

Correction de l'exercice 3.39. Le théorème spectral nous donne l'existence d'une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f, à savoir vérifiant que $f(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Soit $x \in E$ quelconque. On note x_i les coordonnées de x dans cette base. On a

$$\begin{aligned} f(\sum_{i=1}^n x_i e_i) &= \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \langle f(x), x \rangle &= \langle f(\sum_{i=1}^n x_i e_i), \sum_{j=1}^n x_j e_j \rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^n x_i f(e_i), \sum_{j=1}^n x_j e_j \rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \end{aligned}$$

puisque $(e_1,\dots,e_n)$ est orthonormale. Pour tout i, $\lambda_1 x_i^2 \le \lambda_i x_i^2 \le \lambda_n x_i^2$, et donc

$$\begin{aligned}\lambda_1\|x\|^2 &= \sum_{i=1}^n \lambda_1 x_i^2\\ &\le \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2\\ &= \langle f(x),x\rangle\\ &\le \sum_{i=1}^n \lambda_n x_i^2\\ &= \lambda_n\|x\|^2 \ .\end{aligned}$$

D'où l'inégalité demandée. □

Correction de l'exercice 3.40. La matrice A est symétrique, donc diagonalisable et il existe P orthogonale telle que ${}^tPAP$ est diagonale. Soient $E=\mathbb{R}^3$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (elle est orthonormée) et $f\in\mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)=A \ .$$

Alors f est symétrique et le théorème spectral nous dit que f est diagonalisable, qui plus est dans une base orthonormée $\tilde{\mathcal{B}}$ pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$. La matrice orthogonale P recherchée est alors donnée par $P=M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}$ (cours). On cherche donc $\tilde{\mathcal{B}}$. On calcule le polynôme caractéristique de f. Il est donné (développement en étoile) par

$$\begin{aligned}P(X) = \det&\begin{pmatrix}2-X & 2 & -2\\ 2 & 5-X & -4\\ -2 & -4 & 5-X\end{pmatrix}\\ &= -(X-2)(X-5)^2+16+16-4(5-X)-16(2-X)-4(5-X)\\ &= -(X-2)(X-5)^2+24X-40\\ &= -(X-2)(X^2-10X+25)+24X-40\\ &= -X^3+10X^2-25X+2X^2-20X+50+24X-40\\ &= -X^3+12X^2-21X+10 \ .\end{aligned}$$

On remarque que $P(1)=0$. Donc il existe $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que

$$P(X)=-(X-1)(aX^2+bX+c) \ .$$

La comparaison des termes en X^3 donne que $a=1$ et la comparaison des termes constants donne que $c=10$. Si on compare maintenant les termes en X on doit avoir $-21=-c+b$ et on trouve donc que $b=-11$. Donc $P(X)=-(X-1)Q(X)$ avec $Q(X)=X^2-11X+10$. On constante que $Q(1)=0$. Donc $Q(X)=(X-1)(X-10)$. Par suite P se factorise en

$$P(X)=-(X-1)^2(X-10) \ .$$

Les valeurs propres de f sont 1 (valeur propre double) et 10 (valeur propre simple). Soient E_1 et E_{10} les espaces propres associés. On sait déjà que E_{10} est de dimension

1, et comme f est diagonalisable E_1 est forcément de dimension 2. On a que
$$E_1 = \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} .$$
Et
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + 2y = 2z .$$
Donc
$$\begin{aligned} E_1 &= \{2(z-y)e_1 + ye_2 + ze_3 \ , \ y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-2e_1 + e_2) + z(2e_1 + e_3) \ , \ y, z \in \mathbb{R}\} \ . \end{aligned}$$
Soit $u = -2e_1 + e_2$ et $v = 2e_1 + e_3$. Alors $u(-2, 1, 0)$, $v(2, 0, 1)$ et $E_1 = \mathrm{Vect}(u, v)$. On vérifie facilement que (u, v) est libre. Donc E_1 est le plan vectoriel de base (u, v). Par ailleurs,
$$E_{10} = \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} .$$
Et
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + y = z \\ 2x - 5y = 4z \\ 2x + 4y = -5z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + y = z \\ 2x - 5y = 4z \\ 9y = -9z \ (L3 - L2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ z = -2x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = -2x \end{cases} . \end{aligned}$$
Donc
$$\begin{aligned} E_{10} &= \{xe_1 + 2xe_2 - 2xe_3 \ , \ x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(e_1 + 2e_2 - 2e_3) \ , \ x \in \mathbb{R}\} \ . \end{aligned}$$
Soit $w = e_1 + 2e_2 - 2e_3$. Alors $w(1, 2, -2)$ et E_{10} est la droite vectorielle de base (vecteur directeur) w. Pour obtenir $\tilde{\mathcal{B}}$ on orthonormalise (u, v) avec Gram-Schmidt et on normalise w. On a $\|u\|^2 = 5$. On pose
$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} u \ , \ \text{soit } \tilde{e}_1(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0) \ .$$
On pose maintenant
$$U = v - \langle v, \tilde{e}_1 \rangle \tilde{e}_1 \ .$$
On calcule $\langle v, \tilde{e}_1 \rangle = -\frac{4}{\sqrt{5}}$. Donc
$$U = v + \frac{4}{\sqrt{5}} \tilde{e}_1$$

et on a ainsi que $U(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1)$. On calcule

$$\|U\|^2 = \frac{4}{25} + \frac{16}{25} + 1 = \frac{9}{5}$$

et on pose

$$\tilde{e}_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}U \ , \text{ soit } \tilde{e}_2(\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}) \ .$$

Alors $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est une base orthonormale de E_1. Il reste à normaliser w. On calcule $\|w\|^2 = 9$ et on pose ainsi

$$\tilde{e}_3 = \frac{1}{3}w \ , \text{ soit } \tilde{e}_3(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) \ .$$

Les espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux. Donc E_1 et E_{10} sont orthogonaux. La famille $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est ainsi une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. On a

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

tandis que la matrice P recherchée est la matrice

$$P = M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \ .$$

□

Correction de l'exercice 3.41. La matrice A est symétrique, donc diagonalisable et il existe P orthogonale telle que ${}^tPAP$ est diagonale. Soient $E = \mathbb{R}^3$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (elle est orthonormée) et $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = A \ .$$

Alors f est symétrique et le théorème spectral nous dit que f est diagonalisable, qui plus est dans une base orthonormée $\tilde{\mathcal{B}}$ pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La matrice orthogonale P recherchée est alors donnée par $P = M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}$ (cours). On cherche donc $\tilde{\mathcal{B}}$. On calcule le polynôme caractéristique de f. Il est donné (développement en étoile) par

$$\begin{aligned} P(X) &= \det \begin{pmatrix} 2-X & 1 & 2 \\ 1 & 2-X & 2 \\ 2 & 2 & 1-X \end{pmatrix} \\ &= -(X-1)(X-2)^2 + 4 + 4 - 4(2-X) - 4(2-X) - (1-X) \\ &= -(X-1)(X-2)^2 + 9(X-1) \\ &= -(X-1)(X^2 - 4X - 5) \\ &= -(X-1)(X+1)(X-5) \ . \end{aligned}$$

Les valeurs propres de f sont donc -1, 1 et 5 (et ce sont toutes des valeurs propres simples). Soient E_{-1}, E_1 et E_5 les espaces propres associés. On sait déjà qu'ils seront tous de dimension 1. On a que

$$E_{-1} = \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} .$$

Et

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + 2z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + 2z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ x - y = 0 \ (L1 - L3) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -2x \end{cases} . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E_{-1} &= \{xe_1 + xe_2 - 2xe_3 \ , \ x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(e_1 + e_2 - 2e_3) \ , \ x \in \mathbb{R}\} \ . \end{aligned}$$

Soit $u = e_1 + e_2 - 2e_3$. Alors $u(1, 1, -2)$ et E_{-1} est la droite vectorielle de base (vecteur directeur) u. Par ailleurs,

$$E_1 = \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} .$$

Et

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E_1 &= \{xe_1 - xe_2 \ , \ x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(e_1 - e_2) \ , \ x \in \mathbb{R}\} \ . \end{aligned}$$

Soit $v = e_1 - e_2$. Alors $v(1, -1, 0)$ et E_1 est la droite vectorielle de base (vecteur directeur) v. Enfin,

$$E_5 = \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 \ / \ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} .$$

Et

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2z = 3x \\ x + 2z = 3y \\ x + y = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 2z = 3x \\ y - x = 0 \ (L1 - L2) \\ x + y = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases} .$$

Donc

$$\begin{aligned} E_5 &= \{xe_1 + xe_2 + xe_3 \ , \ x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(e_1 + e_2 + e_3) \ , \ x \in \mathbb{R}\} \ . \end{aligned}$$

Soit $w = e_1 + e_2 + e_3$. Alors $w(1,1,1)$ et E_5 est la droite vectorielle de base (vecteur directeur) w. Pour obtenir $\tilde{\mathcal{B}}$ on normalise u, v et w. On a $\|u\|^2 = 6$. On pose

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} u \ , \ \text{soit } \tilde{e}_1(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}) \ .$$

On a $\|v\|^2 = 2$. On pose

$$\tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} v \ , \ \text{soit } \tilde{e}_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \ .$$

On a $\|w\|^2 = 3$. On pose

$$\tilde{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} w \ , \ \text{soit } \tilde{e}_1(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \ .$$

Les espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux. Donc E_1, E_1 et E_5 sont deux à deux orthogonaux. La famille $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est ainsi une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. On a

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

tandis que la matrice P recherchée est la matrice

$$P = M_{\mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} .$$

□

Correction de l'exercice 3.42. **(1)** Comme A est symétrique elle est diagonalisable et il existe P matrice orthogonale $n \times n$ telle que ${}^tPAP$ est la matrice diagonale D constituée des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A (des λ_i pouvant être égaux entre eux). Donc, pour tout vecteur colonne X à n lignes,

$${}^t(PX)A(PX) = {}^tXDX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i^2$$

si les lignes de X sont les X_i. Si A est positive alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i^2 \geq 0$ pour tout X, et donc forcément $\lambda_i \geq 0$ pour tout i. Réciproquement, si les λ_i sont positifs ou nuls pour tout i, alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i^2 \geq 0$ pour tout X et donc ${}^t(PX)A(PX) \geq 0$ pour tout X. On en déduit que ${}^tYAY \geq 0$ pour tout Y en posant $X = P^{-1}Y$.

(2) Si $A = (a_{ij})$, alors

$$
{}^tXAX = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} X_i X_j
$$

pour tout X. En prenant

$$
X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},
$$

on obtient que $a_{11} \geq 0$, $a_{22} \geq 0, \dots, a_{nn} \geq 0$.

(3) On a ${}^t({}^tPAP) = {}^tP{}^tA{}^t({}^tP) = {}^tPAP$ puisque A est symétrique. Si A est de taille $n \times n$, soit X un vecteur colonne à n lignes. On a

$$
{}^tX({}^tPAP)X = {}^t(PX)A(PX)
$$

et comme A est positive, on obtient que ${}^tX({}^tPAP)X \geq 0$ pour tout X. Donc ${}^tPAP$ est elle aussi positive.

(4) Posons $P = (c_{ij})$, $P^{-1} = (d_{ij})$, $M = (m_{ij})$ et $P^{-1}MP = (\tilde{m}_{ij})$. On a

$$
\tilde{m}_{ij} = \sum_{k,l=1}^n c_{ik} m_{kl} d_{lj}
$$

pour tous i, j. Par suite

$$
\begin{aligned}
\text{Trace}(P^{-1}MP) &= \sum_{i=1}^n \tilde{m}_{ii} \\
&= \sum_{i,k,l=1}^n c_{ik} m_{kl} d_{li}
\end{aligned}
$$

On a $P^{-1}P = \text{Id}_n$ la matrice identité $n \times n$, donc $\sum_{i=1}^n d_{li} c_{ik} = \delta_{lk}$ pour tous l, k, où les δ_{kl} sont les symbôles de Kroenecker. Par suite

$$
\begin{aligned}
\text{Trace}(P^{-1}MP) &= \sum_{k,l=1}^n m_{kl} \delta_{kl} \\
&= \sum_{l=1}^n m_{ll} \\
&= \text{Trace}(M) .
\end{aligned}
$$

Soit $\text{Trace}(P^{-1}MP) = \text{Trace}(M)$.

(5) Comme A est symétrique elle est diagonalisable et il existe P matrice orthogonale $n \times n$ telle que ${}^tPAP$ est la matrice diagonale D constituée des valeurs propres

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A (des λ_i pouvant être égaux entre eux). Comme A est positive on a $\lambda_i \geq 0$ pour tout i. On a

$$P^{-1}(AB)P = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = D(P^{-1}BP)$$

puisque $P^{-1} = {}^tP$. Donc, en vertue de la question (4),

$$\begin{aligned}\mathrm{Trace}(AB) &= \mathrm{Trace}(P^{-1}(AB)P)\\ &= \mathrm{Trace}(D(P^{-1}BP))\end{aligned}$$

Posons $P^{-1}BP = (b_{ij})$. Comme B est positive et $P^{-1} = {}^tP$, on a $b_{ii} \geq 0$ pour tout i en vertue des questions (2) et (3). Si $D(P^{-1}BP) = (c_{ij})$ on a clairement que $c_{ii} = \lambda_i b_{ii}$ pour tout i. Donc, puisque les λ_i et les b_{ii} sont positifs,

$$0 \leq \mathrm{Trace}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{ii} \ .$$

On a aussi que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{ii} \leq (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)(\sum_{i=1}^{n} b_{ii})$$

et comme $\mathrm{Trace}(A) = \mathrm{Trace}(P^{-1}AP) = \mathrm{Trace}(D)$ et $\mathrm{Trace}(B) = \mathrm{Trace}(P^{-1}BP)$ en vertue de la question (4), et comme $\mathrm{Trace}(P^{-1}BP) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$, on obtient que $0 \leq \mathrm{Trace}(AB) \leq \mathrm{Trace}(A)\mathrm{Trace}(B)$. $\square$

Correction de l'exercice 3.43. **(1)** Comme (u, v) est libre, $f(x) = 0$ si et seulement si $\alpha\langle v, x\rangle = 0$ et $\beta\langle u, x\rangle = 0$. Comme $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, $f(x) = 0$ si et seulement $\langle v, x\rangle = 0$ et $\langle u, x\rangle = 0$. On en déduit que

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u, v)^{\perp} \ .$$

Par ailleurs, comme $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, pour tous $A, B \in \mathbb{R}$ il existe $x \in \mathrm{Vect}(u, v)$, donc en particulier $x \in E$, tel que

$$\begin{cases}\alpha\langle v, x\rangle = A\\ \beta\langle u, x\rangle = B\end{cases} \tag{4.1}$$

En effet, en utilisant Gram-Schmidt dans le plan $\mathrm{Vect}(u, v)$, il existe (e_1, e_2) une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(u, v)$ telle que $e_1 = au$ pour un certain $a > 0$. Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on pose $x = \lambda e_1 + \mu e_2$. Alors

$$\langle u, x\rangle = \langle u, \lambda e_1 + \mu e_2\rangle = \frac{1}{a}\langle e_1, \lambda e_1 + \mu e_2\rangle = \frac{\lambda}{a}$$

et on fixe λ tel que $\beta\frac{\lambda}{a} = B$. La seconde équation de (4.1) est alors vérifiée, et ce quel que soit μ. On a de plus

$$\langle v, x\rangle = \langle v, \lambda e_1 + \mu e_2\rangle = \lambda\langle v, e_1\rangle + \mu\langle v, e_2\rangle \ .$$

Clairement $\langle v, e_2\rangle \neq 0$ car sinon v est colinéaire à e_1 et donc aussi à u. On avait fixé $\lambda = \frac{aB}{\beta}$. Il reste à choisir μ tel que

$$\alpha\langle v, e_2\rangle\mu = A - \alpha\lambda\langle v, e_1\rangle$$

pour obtenir que la première équation de (4.1) est elle aussi vérifiée par x. Donc

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u, v)$$

puisque pour tous $A, B \in \mathbb{R}$ il existe $x \in E$ tel que $f(x) = Au + Bv$.

(2) Soit $\lambda \neq 0$. Si λ est valeur propre de g alors il existe $x \neq 0$ dans F tel que $g(x) = \lambda x$. Comme $F \subset E$, et $g = f$ dans F, il existe en particulier $x \neq 0$ dans E tel que $f(x) = \lambda x$. Donc λ est aussi une valeur propre de f. Réciproquement, supposons que λ est valeur propre de f. Alors il existe $x \neq 0$ dans E tel que $f(x) = \lambda x$. On a $E = F \oplus F^\perp$, et $\dim F^\perp \geq 1$ puisque F est de dimension 2 et $n \geq 3$. Par suite on peut écrire $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$. On a vu que $\mathrm{Ker}(f) = F^\perp$. Donc $f(x) = f(x_1)$. Comme $f(x) = \lambda x$,

$$f(x_1) = \lambda x_1 + \lambda x_2 \ .$$

Comme $\mathrm{Im}(f) = F$ et $x_1 \in F$, c'est que $\lambda x_2 \in F$, et comme $\lambda \neq 0$ c'est que $x_2 \in F$. Or $x_2 \in F^\perp$. Donc $x_2 = 0$. En particulier $x_1 \neq 0$ puisque $x \neq 0$ et $f(x_1) = \lambda x_1$, ce qui s'écrit encore $g(x_1) = \lambda x_1$ puisque $x_1 \in F$. Donc λ est aussi valeur propre de g.

(3) Par définition, f est symétrique si et seulement si $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$ pour tous $x, y \in E$. Donc f est symétrique si et seulement si

$$\alpha\langle v, x\rangle\langle u, y\rangle + \beta\langle u, x\rangle\langle v, y\rangle = \alpha\langle v, y\rangle\langle u, x\rangle + \beta\langle u, y\rangle\langle v, x\rangle \tag{4.2}$$

pour tous $x, y \in E$. Revenons à la base (e_1, e_2) de F de la question (1). Si on prend $x = u$ et $y = e_2$ alors forcément

$$\beta\|u\|^2\langle v, e_2\rangle = \alpha\langle v, e_2\rangle\|u\|^2$$

puisque u et e_1 étant colinéaires, $\langle u, e_2\rangle = 0$. On a déjà vu que $\langle v, e_2\rangle \neq 0$, donc forcément $\alpha = \beta$. Réciproquement, si $\alpha = \beta$ il est clair que (4.2) est vérifiée pour tous x, y. Ainsi, f est symétrique si et seulement si $\alpha = \beta$.

(4) On suppose donc que $\alpha = \beta$. On sait déjà que 0 est valeur propre de f puisque $n \geq 3$ entraîne que $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$. On va maintenant chercher les valeurs propres $\lambda \neq 0$ de f et donc, en raison de la question (2), les valeurs propres $\lambda \neq 0$ de g. Soit $\mathcal{B} = (u, v)$. On a

$$\begin{cases} g(u) = \alpha\langle u, v\rangle u + \alpha\|u\|^2 v \\ g(v) = \alpha\|v\|^2 u + \alpha\langle u, v\rangle v \end{cases}$$

et donc

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g) = \alpha \begin{pmatrix} \langle u, v\rangle & \|v\|^2 \\ \|u\|^2 & \langle u, v\rangle \end{pmatrix} \ .$$

Soit P le polynôme caractéristique de g. Alors

$$P(\alpha X) = \alpha^2 \det \begin{pmatrix} \langle u, v\rangle - X & \|v\|^2 \\ \|u\|^2 & \langle u, v\rangle - X \end{pmatrix} = \alpha^2 \left(X^2 - 2\langle u, v\rangle X + \langle u, v\rangle^2 - \|u\|^2\|v\|^2\right)$$

On cherche les racines du polynôme

$$Q(X) = X^2 - 2\langle u, v\rangle X + \langle u, v\rangle^2 - \|u\|^2\|v\|^2 \ .$$

Si Δ est son discriminant on a

$$\begin{aligned} \Delta &= 4\langle u, v\rangle^2 - 4(\langle u, v\rangle^2 - \|u\|^2\|v\|^2) \\ &= 4\|u\|^2\|v\|^2 \ . \end{aligned}$$

Les racines du polynôme sont donc

$$\lambda_1 = \langle u, v\rangle - \|u\|\|v\| \text{ et } \lambda_2 = \langle u, v\rangle + \|u\|\|v\| \ .$$

Par Cauchy-Schwarz elles sont non nulles puisque u et v sont non colinéaires. Les valeurs propres de f sont donc 0, $\alpha\lambda_1$ et $\alpha\lambda_2$ (puisque $P(\alpha X) = Q(X)$). $\square$

Correction de l'exercice 3.44. Comme A est symétrique le théorème spectral donne l'existence d'une matrice orthogonale P et d'une matrice diagonale D telles que $A = {}^tPDP$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les éléments sur la diagonale de D. Par hypoythèse, pour tout vecteur colonne X à n lignes,

$$ {}^tX({}^tPDP)X = {}^t(PX)D(PX) \geq 0 \ . $$

Comme P est inversible, pour tout vecteur colonne Y à n lignes il existe un vecteur colonne X à n lignes tel que $PX = Y$. On a donc que pour tout vecteur colonne Y à n lignes, ${}^tYDY \geq 0$. Si on note $y_1, \dots, y_n$ les éléments qui composent la colonne de Y,

$$ {}^tYDY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 $$

et comme $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq 0$ pour tous $y_1, \dots, y_n$, c'est que $\lambda_i \geq 0$ pour tout i. Soit M la matrice diagonale dont la diagonale est composée des $\sqrt{\lambda_i}$. Alors ${}^tM = M$ et $M^2 = D$. On pose $B = MP$. Alors

$$ {}^tBB = {}^t(MP)(MP) = {}^tP{}^tMMP = {}^tPM^2P = {}^tPDP = A $$

et donc B répond à la question. □

Remarque: Il n'y a pas unicité. La matrice diagonale M dont la diagonale est composée des $-\sqrt{\lambda_i}$ fournit une matrice $B = MP$ qui répond aussi à la question.

Correction de l'exercice 3.45. **(1)** Soit A symétrique $n \times n$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ avec $A^p = 0$. Comme A est symétrique le théorème spectral donne l'existence d'une matrice orthogonale P et d'une matrice diagonale D telles que $A = {}^tPDP$. Comme ${}^tP = P^{-1}$,

$$ A^p = ({}^tPDP)\dots({}^tPDP) = {}^tPD^pP $$

et donc ${}^tPD^pP = 0$. Comme P et ${}^tP$ sont inversibles cela revient encore à dire que $D^p = 0$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les éléments sur la diagonale de D, D^p est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les $\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p$. Si $D^p = 0$ cela signifie que $\lambda_i^p = 0$ pour tout i, et ensuite donc que $\lambda_i = 0$ pour tout i. Donc $D = 0$, et puisque $A = {}^tPDP$, $A = 0$.

(2) Soit A une matrice carrée $n \times n$ nilpotente. On a ${}^tAA = A{}^tA$. La matrice ${}^tAA$ est symétrique puisque ${}^t({}^tAA) = {}^tA{}^t({}^tA) = {}^tAA$. Comme ${}^tAA = A{}^tA$ on obtient facilement par récurrence que pour tout entier k,

$$ ({}^tA)A^k = A^k({}^tA) \ . \tag{1} $$

Pour $k = 1$ le résultat est dirèctement donné par l'hypothèse. Et si la relation est vraie pour k, alors

$$ ({}^tA)A^{k+1} = (({}^tA)A^k)A = A^k({}^tAA) = A^k(A{}^tA) = A^{k+1}({}^tA) $$

de sorte que la récurrence fonctionne. On en déduit par récurrence que pour tout entier k,

$$ ({}^tAA)^k = ({}^tA)^kA^k \ . \tag{2} $$

Le résultat est vrai pour $k=1$. Supposons qu'il soit vrai pour k, alors

$$\begin{aligned}({}^tAA)^{k+1} &= ({}^tAA)^k({}^tAA)\\ &= ({}^tA)^kA^k({}^tA)A\\ &= ({}^tA)^k\left[A^k({}^tA)\right]A\\ &= ({}^tA)^k\left[({}^tA)A^k\right]A \qquad \text{[d'après (1)]}\\ &= ({}^tA)^{k+1}A^{k+1}\ .\end{aligned}$$

La récurrence fonctionne et donc (2) est vraie. Par suite si A est nilpotente alors ${}^tAA$ est aussi nilpotente. Comme elle est symétrique la question (1) donne que ${}^tAA=0$. Notons $A=(a_{ij})$ et ${}^tAA=(b_{ij})$. On a

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj}$$

pour tous i,j. Comme $b_{ij}=0$ pour tous i,j en raison de ce qui vient d'être dit, on a en particulier que $b_{ii}=0$ pour tout i, et donc que

$$\sum_{k=1}^n (a_{ki})^2=0$$

pour tout i. Donc $a_{ki}=0$ pour tout k et tout i. En d'autres termes, $A=0$. □

Correction de l'exercice 3.46. **(1)** La forme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est clairement bilinéaire symétrique. Pour $P\in\mathbb{R}_n[X]$,

$$\langle P,P\rangle=\int_{-1}^1(1-x^2)P(x)^2dx$$

et comme $1-x^2\geq 0$ sur $[-1,1]$, et qu'un polynôme est une fonction continue, on a que $(1-X^2)P=0$ sur $[-1,1]$. Donc P a une infinité de racines, et par suite P est forcément le polynôme nul.

(2) Pour montrer que f est symétrique il faut montrer que pour tous $P,Q\in\mathbb{R}_n[X]$,

$$\langle f(P),Q\rangle=\langle P,f(Q)\rangle\ .$$

On a

$$\langle f(P),Q\rangle=\int_{-1}^1(1-x^2)\left((x^2-1)P(x)\right)''Q(x)dx\ .$$

On intègre par parties. On pose $U=(1-x^2)Q(x)$ et $V'=\left((x^2-1)P(x)\right)''$. Alors $U'=-\left((x^2-1)Q(x)\right)'$, $V=\left((x^2-1)P(x)\right)'$ et comme X^2-1 s'annule en -1 et 1,

$$\langle f(P),Q\rangle=\int_{-1}^1\left((x^2-1)Q(x)\right)'\left((x^2-1)P(x)\right)'dx\ .$$

On intègre de nouveau par parties. On pose $U=\left((x^2-1)Q(x)\right)'$ et $V'=\left((x^2-1)P(x)\right)'$. Alors $U'=\left((x^2-1)Q(x)\right)''$, $V=(x^2-1)P(x)$ et comme X^2-1 s'annule en -1

et 1,

$$\begin{aligned}\langle f(P), Q\rangle &= -\int_{-1}^{1} \left((x^2-1)Q(x)\right)'' (x^2-1)P(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)P(x)\left((x^2-1)Q(x)\right)'' dx \\ &= \langle P, f(Q)\rangle \ .\end{aligned}$$

Donc f est bien symétrique pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$. □

Correction de l'exercice 3.47. La matrice A est symétrique. Le théorème spectral donne qu'il existe une matrice orthogonale P pour laquelle ${}^tPAP$ est diagonale. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien. La base $\mathcal{B}$ est orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On introduit l'endomorphimse $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ défini par

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = A \ .$$

Soit P le polynôme caractéristique de f. On a

$$\det \begin{pmatrix} 10-X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-X & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 5-X & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 5-X \end{pmatrix} = (10-X)\det \begin{pmatrix} 2-X & 2 & -2 \\ 2 & 5-X & -4 \\ -2 & -4 & 5-X \end{pmatrix}$$

et on a que

$$\begin{aligned}P(X) &= \det \begin{pmatrix} 2-X & 2 & -2 \\ 2 & 5-X & -4 \\ -2 & -4 & 5-X \end{pmatrix} \\ &= -(X-2)(X-5)^2 + 16 + 16 - 4(5-X) - 16(2-X) - 4(5-X) \\ &= -(X-2)(X-5)^2 + 24X - 40 \\ &= -(X-2)(X^2-10X+25) + 24X - 40 \\ &= -X^3 + 10X^2 - 25X + 2X^2 - 20X + 50 + 24X - 40 \\ &= -X^3 + 12X^2 - 21X + 10 \ .\end{aligned}$$

On constate que 1 est racine de ce dernier polynôme. On factorise et on trouve au final que

$$P(X) = (X-1)^2(X-10)^2 \ .$$

Les valeurs propres de f sont donc 1 (valeur propre double) et 10 (valeur propre double elle-aussi). Soient E_1 et E_{10} les espaces propres associés. Comme f est diagonalisable, on sait déjà que E_1 et E_{10} sont tous deux de dimensions la multiplicité de la racine dans P, et donc sont tous deux de dimension 2. On a

$$E_1 = \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \ / \ \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right\} \ .$$

Et

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + 2z = 2t \end{cases}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} E_1 &= \{2(t-z)e_2 + ze_3 + te_4 \ , \ z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(-2e_2 + e_3) + t(2e_2 + e_4) \ , \ z, t \in \mathbb{R}\} \ . \end{aligned}$$

Soit $u = -2e_2 + e_3$ et $v = 2e_2 + e_4$. Alors

$$u(0, -2, 1, 0) \ , \ v(0, 2, 0, 1)$$

et $E_1 = \mathrm{Vect}(u, v)$. On sait que E_1 est de dimension 2. La famille (u, v) est génératrice pour E_1 et a autant de vecteurs que sa dimension. Donc (u, v) est une base de E_1. Par ailleurs,

$$E_{10} = \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \ / \ \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right\} \ .$$

Et

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} -4y + z = t \\ 2y - 5z = 4t \\ 2y + 4z = -5t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -4y + z = t \\ 2y - 5z = 4t \\ 9z = -9t \ (L3 - L2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = -t \\ t = -2y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2y \\ t = -2y \end{cases} \ . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E_{10} &= \{xe_1 + ye_2 + 2ye_3 - 2ye_4 \ , \ x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{xe_1 + y(e_2 + 2e_3 - 2e_4) \ , \ x, y \in \mathbb{R}\} \ . \end{aligned}$$

Soit $w = e_1$ et $p = e_2 + 2e_3 - 2e_4$. Alors

$$w(1, 0, 0, 0) \ , \ p(0, 1, 2, -2)$$

et $E_{10} = \mathrm{Vect}(w, p)$. Comme précédemment, on sait que E_{10} est de dimension 2. Donc (w, p) est une base de E_{10}. On cherche maintenant une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ qui soit constituée de vecteurs propres de f. Les espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux. Donc E_1 et E_{10} sont orthogonaux. Il suffira donc d'orthonormaliser (u, v) et (w, p) avec Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ qui soit constituée de vecteurs propres de f. On calcule $\|u\|^2 = 5$. On pose alors

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} u \ , \ \tilde{e}_1(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0) \ .$$

On calcule $\langle v, \tilde{e}_1\rangle = -\frac{4}{\sqrt{5}}$. On pose

$$V = v - \langle v, \tilde{e}_1\rangle \tilde{e}_1 = v + \frac{4}{\sqrt{5}} \tilde{e}_1$$

et ainsi $V(0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1)$. On calcule $\|V\|^2 = \frac{9}{5}$. On pose

$$\tilde{e}_2 = \frac{\sqrt{5}}{3} V \ , \ \tilde{e}_2(0, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}) \ .$$

Alors $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est une base orthonormale de E_1. De même, on calcule $\|w\|^2 = 1$. On pose

$$\tilde{e}_3 = w \ , \ \tilde{e}_3(1, 0, 0, 0) \ .$$

On calcule $\langle p, \tilde{e}_3\rangle = 0$. On calcule $\|p\|^2 = 9$. On pose

$$\tilde{e}_4 = \frac{1}{3} p \ , \ \tilde{e}_4(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) \ .$$

La famille $(\tilde{e}_3, \tilde{e}_4)$ est une base orthonormale de E_{10}. Les espaces E_1 et E_{10} étant orthogonaux, la famille $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$. La matrice

$$P = M_{\mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

est orthogonale, et

$${}^tPAP = M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \ .$$

□

Correction de l'exercice 3.48. **(1)** Pour tous polynômes P et Q, la fonction $x \to P(x)Q(x)e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Reste à montrer la convergence de l'intégrale. On tire des formules de Taylor pour l'exponentielle, ou encore du développement en série entière de l'exponentielle, que

$$\begin{aligned} e^{x^2} &\geq \frac{1}{(n+1)!} x^{2(n+1)} \\ &\geq \frac{1}{(n+1)!} x^{2n} x^2 \end{aligned}$$

pour tout n et tout x. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Il existe $C > 0$ telle que

$$|P(x)Q(x)| \leq C x^{2n}$$

pour tout x tel que $|x| \geq 1$ (comme on le voit en mettant les termes de plus hauts degrés en facteur dans le produit $P(x)Q(x)$). Donc

$$\left|P(x)Q(x)e^{-x^2}\right| \leq \frac{C'}{x^2}$$

pour $|x| \geq 1$ et pour une constante $C' > 0$ indépendante de x. Par comparaison, comme $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ sont convergentes, on voit que l'intégrale qui définit $\langle P, Q\rangle$ est absolulment convergente. Ainsi, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien défini. On a par ailleurs que

$$\langle P, P\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)^2 e^{-x^2} dx$$

et comme $P(x)^2e^{-x^2} \geq 0$ pour tout x, et par continuité de la fonction qui à x associe $F(x) = P(x)^2e^{-x^2}$, on voit que $\langle P, P\rangle = 0$ si et seulement si $P(x) = 0$ pour tout x. Un polynôme non nul de degré n ayant au plus n racines c'est donc que P est le polynôme nul. Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. On admet (en suivant l'énoncé) qu'il s'agit bien d'une forme bilinéaire. Il est clair qu'elle est symétrique. C'est donc bien un produit scalaire.

(2) Soit $A > 0$. On a

$$\begin{aligned}
&\int_{-A}^{A} P(x)\left(2xQ'(x) - Q''(x)\right)e^{-x^2}dx \\
&= 2\int_{-A}^{A} xP(x)Q'(x)e^{-x^2}dx - \int_{-A}^{A} P(x)Q''(x)e^{-x^2}dx \ .
\end{aligned}$$

On intègre par parties la seconde intégrale. On pose

$$U(x) = P(x)e^{-x^2} \text{ et } V'(x) = Q''(x) \ .$$

Alors

$$U'(x) = \left(P'(x) - 2xP(x)\right)e^{-x^2} \text{ et } V(x) = Q'(x) \ .$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
&\int_{-A}^{A} P(x)Q''(x)e^{-x^2}dx \\
&= \left[P(x)Q'(x)e^{-x^2}\right]_{-A}^{A} - \int_{-A}^{A} \left(P'(x) - 2xP(x)\right)Q'(x)e^{-x^2}dx \ .
\end{aligned}$$

Clairement, pour les mêmes raisons qu'à la question précédente,

$$\lim_{A\to+\infty} \left[P(x)Q'(x)e^{-x^2}\right]_{-A}^{A} = 0 \ .$$

Par suite, en passant à la limite $A \to +\infty$,

$$\begin{aligned}
\langle P, \varphi(Q)\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\left(2xQ'(x) - Q''(x)\right)e^{-x^2}dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty} xP(x)Q'(x)e^{-x^2}dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(P'(x) - 2xP(x)\right)Q'(x)e^{-x^2}dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)Q'(x)e^{-x^2}dx \\
&= \langle P', Q'\rangle \ .
\end{aligned}$$

C'est l'égalité demandé. L'expression $\langle P', Q' \rangle$ étant symétrique en P et Q, on en déduit que pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\langle P, \varphi(Q) \rangle = \langle \varphi(P), Q \rangle \ .$$

Donc $\varphi = \varphi^\star$ et φ est bien un endomorphisme symétrique. □

CORRECTION DE L'EXERCICE 3.49. L'inverse A^{-1} d'une matrice $n \times n$ inversible A est l'unique matrice B de taille $n \times n$ qui vérifie que $AB = BA = \mathrm{Id}_n$, où Id_n est la matrice identité $n \times n$. Si A est symétrique, et $B = A^{-1}$ est cette unique matrice, alors

$${}^t(AB) = {}^t(BA) = \mathrm{Id}_n$$

puisque Id_n est diagonale, tandis que ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA = {}^tBA$ et ${}^t(BA) = {}^tA{}^tB = A{}^tB$ puisque A est symétrique. Donc

$${}^tBA = A{}^tB = \mathrm{Id}_n$$

et ainsi, forcément, ${}^tB = B$. On a donc montré que l'inverse d'une matrice symétrique inversible est une matrice symétrique (inversible elle-aussi). On a

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(M), N \rangle &= \mathrm{Trace}({}^t\left(AMA^{-1})N\right) \ , \\
&= \mathrm{Trace}({}^tA^{-1}{}^tM{}^tAN) \\
&= \mathrm{Trace}(A^{-1}{}^tMAN) \\
\langle M, \varphi(N) \rangle &= \mathrm{Trace}\left({}^tM(ANA^{-1})\right) \\
&= \mathrm{Trace}\left({}^tMANA^{-1}\right) \ .
\end{aligned}$$

On utilise maintenant la propriété suivante des traces: si A et B sont deux matrices réelles carrées $n \times n$, alors

$$\mathrm{Trace}(AB) = \mathrm{Trace}(BA) \ . \tag{$\star$}$$

On démontre cette propriété avant de poursuivre. Ecrivons que $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ et $AB = (c_{ij})$. Alors, pour tous i, j,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

et donc

$$\mathrm{Trace}(AB) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \ .$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\mathrm{Trace}(BA) &= \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} \\
&= \sum_{i,k=1}^{n} b_{ki} a_{ik} \\
&= \mathrm{Trace}(AB)
\end{aligned}$$

en ayant effectué à la seconde ligne les changements de notation $i \to k$ et $k \to i$. On a donc bien montré $(\star)$. Avec $(\star)$ on peut écrire que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Trace}(A^{-1}{}^tMAN) &= \mathrm{Trace}(A^{-1}({}^tMAN)) \\
&= \mathrm{Trace}({}^tMANA^{-1})
\end{aligned}$$

et on obtient donc que
$$\langle\varphi(M),N\rangle = \langle M,\varphi(N)\rangle\ .$$
Comme M et N sont quelconques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est que φ est symétrique. $\square$

Remarque: Attention à ne surtout pas écrire que Trace(AB) vaut Trace(A)Trace(B). Exemple:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\ ,\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\ .$$
Alors Trace$(A) = 3$, Trace$(B) = 3$, Trace$(AB) = 4$ et $4 \neq 3 \times 3$.

Correction de l'exercice 3.50. **(1)** La base $\mathcal{B}$ est orthonormale pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Ecrivons $A = (a_{ij})$. On a alors
$$f(e_i) = \sum_{k=1}^n a_{ik}e_k$$
et par suite, si les δ_{ij} sont les symbôles de Kroenecker,
$$\begin{aligned}\langle f(x),y\rangle &= \langle \sum_{i,k=1}^n a_{ik}x_ie_k, \sum_{j=1}^n y_je_j\rangle \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n a_{ik}x_iy_j\delta_{kj} \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_iy_j\ .\end{aligned}$$
Donc
$$\begin{aligned}{}^tXAY &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_iy_j\ ,\ {}^tXY = \sum_{i,j=1} x_iy_j \\ \langle f(x),y\rangle &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_iy_j\ ,\ \langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_iy_i\ .\end{aligned}$$
D'où les relations demandées.

(2) Comme A est symétrique et $\mathcal{B}$ est orthonormale, f est symétrique. Donc f est diagonalisable dans une base orthonormale. En d'autres termes il existe $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde e_1,\ldots,\tilde e_n)$ base orthonormale constituée de vecteurs propres de f. On écrit le quotient de Rayleigh dans $\tilde{\mathcal{B}}$. On note $\tilde x_1,\ldots,\tilde x_n$ les coordonnées de x dans $\tilde{\mathcal{B}}$. On note $\tilde\lambda_1,\ldots,\tilde\lambda_n$ les valeurs propres de A (donc de f) répétées avec leur multiplicité et rangées par ordre croissant. On a alors
$$f(x) = \sum_{i=1}^n \tilde x_i f(\tilde e_i) = \sum_{i=1}^n \tilde\lambda_i\tilde x_i\tilde e_i$$
et donc
$$\mathcal{R}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde\lambda_i\tilde x_i^2}{\sum_{i=1}^n \tilde x_i^2}\ .$$
On a clairement $\tilde\lambda_1 = \lambda_1$. Donc,
$$\sum_{i=1}^n \tilde\lambda_i\tilde x_i^2 \geq \lambda_1\sum_{i=1}^n \tilde x_i^2$$

et ainsi $\mathcal{R}(x) \geq \lambda_1$ pour tout $x \neq 0$. De plus, si $x \in E_1$ alors $f(x) = \lambda_1 x$ et donc $\mathcal{R}(x) = \lambda_1$. On donc bien la relation voulue.

(3) Notons $\lambda_2 > \lambda_1$ la plus petite valeur propre de A après λ_1. Soit $x \in E_1^\perp$, $x \neq 0$. sans perdre en gééralité on peut supposer que $\tilde{\mathcal{B}}$ est telle que $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_k)$ est une base de E_1. Si $x \in E_1^\perp$ alors x n'a pas de coordonnées suivant $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_k)$ puisque les coordonnées dans une base orthonormale sont les $\tilde{x}_i = \langle x, \tilde{e}_i \rangle$. Donc,

$$f(x) = \sum_{i=k+1}^{n} \tilde{x}_i f(\tilde{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i \tilde{x}_i \tilde{e}_i$$

et donc

$$\mathcal{R}(x) = \frac{\sum_{i=k+1}^{n} \tilde{\lambda}_i \tilde{x}_i^2}{\sum_{i=k+1}^{n} \tilde{x}_i^2} .$$

On a $\tilde{\lambda}_{k+1} = \lambda_2$ par notre choix de notation, et ainsi $\mathcal{R}(x) \geq \lambda_2$ pour $x \in E_1^\perp$, $x \neq 0$. De plus, si $x \in E_2$ alors $f(x) = \lambda_2 x$ et donc $\mathcal{R}(x) = \lambda_2$. On a $E_2 \subset E_1^\perp$ et on a donc bien là encore la relation voulue. □

Correction de l'exercice 3.51. Le théorème spectral donne l'existence d'une matrice orthogonale P et d'une matrice diagonale D telles que ${}^tPAP = D$. On a donc $A = PD^tP$. Par suite

$$A^k = PD^k({}^tP)$$

puisque ${}^tP = P^{-1}$. Donc, par hypothèse, $PD^k({}^tP) = \mathrm{Id}_n$ et donc

$$D^k = {}^tPP = \mathrm{Id}_n$$

puisque P est orthogonale. Si $D^k = \mathrm{Id}_n$ c'est que les termes diagonaux de D sont forcément compris dans l'ensemble à deux éléments $\{-1, +1\}$. Mais alors $D^2 = \mathrm{Id}_n$. Ensuite donc on récupère que $A^2 = PD^2({}^tP) = P^tP = \mathrm{Id}_n$. □

Correction de l'exercice 3.52. Le théorème spectral donne l'existence d'une matrice orthogonale P telle que ${}^tPAP = D$, où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est la matrice diagonale dont la diagonale est formée des λ_i. On a $A = PD^tP$. Par suite

$$A^2 = PD^{2t}P \tag{$\star$}$$

et $D^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)$. Notons $P = (b_{ij})$, $PD^2 = (c_{ij})$, $PD^{2t}P = (d_{ij})$. Alors

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \lambda_k^2 \delta_{kj} = b_{ij} \lambda_j^2 .$$

Par suite,

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \lambda_k^2 b_{jk}$$

Comme A est symétrique, si on note $A^2 = (e_{ij})$, alors $e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}$. La relation $(\star)$ donne alors que pour tous i, j,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \lambda_k^2 b_{jk}$$

En particulier, en prenant $i = j$ et en sommant sur i,

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^2 = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\lambda_k^2 b_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 (\sum_{i=1}^{n} b_{ik}b_{ik}) \ .$$

Notons ${}^tPP = (m_{ij})$. On a $m_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki}b_{kj}$, et comme P est orthogonale, ${}^tPP = \mathrm{Id}_n$ de sorte que $\sum_{k=1}^n b_{ki}b_{kj} = \delta_{ij}$, où les δ_{ij} sont les symbôles de Kroenecker. Donc, $\sum_{i=1}^n b_{ik}b_{ik} = 1$ et ainsi $\sum_{i,k=1}^n a_{ik}^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$. □

Correction de l'exercice 3.53. Soient $x, y \in E$ quelconques. On a

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, y\rangle + \mu\langle x, a\rangle\langle a, y\rangle \ ,$$

et

$$\langle x, f(y)\rangle = \langle x, y\rangle + \mu\langle y, a\rangle\langle x, a\rangle \ .$$

On en déduit que pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$ et donc que f est symétrique pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On cherche maintenant les valeurs propres et espaces propres de f. Si $\mu = 0$ l'application f se réduit à l'identité. Donc 1 est la seule valeur propre de f et l'espace propre correspondant est l'espace E tout entier. On suppose maintenant que $\mu \neq 0$. Dire que λ est valeur propre de f c'est dire qu'il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$. Et

$$f(x) = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)x = \mu\langle x, a\rangle a \ .$$

On va donc trouver $\lambda = 1$ et l'espace propre associé est constitué des x tels que $\langle x, a\rangle = 0$, donc l'orthogonal de la droite vectorielle de vecteur directeur a, ou alors $\lambda \neq 1$ et x doit vérifier

$$(\lambda - 1)x = \mu\langle x, a\rangle a \ .$$

Mais alors $x = ka$ et donc, puisque $\|a\| = 1$,

$$(\lambda - 1)k = k\mu \ .$$

soit $\lambda = 1 + \mu$. L'espace propre associé est alors la droite vectorielle de vecteur directeur a. □

Correction de l'exercice 3.54. Soient $x, y \in E$ quelconques et $\lambda \in \mathbb{R}$. On veut montrer que

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad (\star)$$

et que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Par hypothèse, pour tout $z \in E$,

$$\begin{aligned}\langle f(x + y) - f(x) - f(y), z\rangle &= \langle f(x + y), z\rangle - \langle f(x), z\rangle - \langle f(y), z\rangle \\ &= \langle x + y, f(z)\rangle - \langle x, f(z)\rangle - \langle y, f(z)\rangle \\ &= 0 \ .\end{aligned}$$

Or si un vecteur X est tel que $\langle X, z\rangle = 0$ pour tout z, alors c'est que $X = 0$ comme on le voit en prenant $z = X$. Donc $(\star)$ est vérifiée. De même on écrit que pour tout $z \in E$,

$$\begin{aligned}\langle f(\lambda x) - \lambda f(x), z\rangle &= \langle f(\lambda x), z\rangle - \lambda\langle f(x), z\rangle \\ &= \langle \lambda x, f(z)\rangle - \lambda\langle x, f(z)\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

et comme précédemment on trouve que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Donc f est bien linéaire. Comme $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$ pour tous $x, y \in E$, f est symétrique pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$. $\square$

Correction de l'exercice 3.55. On a clairement $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^\star \circ f)$. Réciproquement soit $x \in E$ tel que $f^\star(f(x)) = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f^\star(f(x)), x\rangle \\ &= \langle f(x), f(x)\rangle \\ &= \|f(x)\|^2 \end{aligned}$$

et donc $f(x) = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(f^\star \circ f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et ainsi il y a bien égalité. $\square$

Correction de l'exercice 3.56. Le théorème spectral nous donne l'existence d'une matrice orthogonale P et d'une matrice diagonale D telles que ${}^tPAP = D$. On a donc $A = PD{}^tP$. Par suite

$$A^k = PD^k({}^tP)$$

puisque ${}^tP = P^{-1}$. Donc, par hypothèse, $PD^k({}^tP) = \mathrm{Id}_n$ et donc

$$D^k = {}^tPP = \mathrm{Id}_n$$

puisque P est orthogonale. Si $D^k = \mathrm{Id}_n$ et k est impair c'est que $D = \mathrm{Id}_n$. Si k est pair c'est que les termes diagonaux de D sont compris dans l'ensemble à deux éléments $\{-1, +1\}$. Mais alors $D^2 = \mathrm{Id}_n$. Ensuite donc on récupère que $A^2 = PD^2({}^tP) = P{}^tP = \mathrm{Id}_n$. On ne peut pas dire mieux dans la mesure où si $A = -\mathrm{Id}_n$ alors $A \neq \mathrm{Id}_n$, $A^2 = \mathrm{Id}_n$. $\square$

Correction de l'exercice 3.57. **(1)** L'intégrale est généralisée en $+\infty$ et l'exponentielle l'emporte sur toutes les puissances. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ il existe donc $C > 0$ tel que pour $x \gg 1$ grand,

$$|P(x)Q(x)|\, e^{-x} \leq \frac{1}{x^2}\ .$$

On récupère ainsi une majoration par une intégrale de Riemann convergente en $+\infty$ et donc, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, l'intégrale qui définit $\langle P, Q\rangle$ est absolument convergente. On en déduit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien défini. On admet que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire. On a

$$\langle P, P\rangle = \int_0^{+\infty} P(x)^2 e^{-x} dx\ .$$

On en déduit que $\langle P, P\rangle \geq 0$ pour tout P et qu'il y a égalité à zéro si et seulement si $P(x) = 0$ pour tout $x \geq 0$. Un polynôme de degré n qui n'est pas le polynôme nul ayant au plus n racines, $P(x) = 0$ pour tout $x \geq 0$ si et seulement si P est le polynôme nul. On a donc montré que $\langle P, P\rangle = 0$ si et seulement si P est le polynôme nul. Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire.

(2) On a

$$\begin{aligned} \langle \varphi(P), Q\rangle &= \int_0^{+\infty} \left(xP''(x) - (x-1)P'(x)\right) Q(x) e^{-x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} xP''(x)Q(x)e^{-x} dx - \int_0^{+\infty} (x-1)P'(x)Q(x)e^{-x} dx\ . \end{aligned}$$

On intègre par parties la première intégrale du membre de droite de la seconde égalité. On pose
$$U(x) = xQ(x)e^{-x} \text{ et } V'(x) = P''(x) \ .$$
Alors
$$\begin{aligned} U'(x) &= Q(x)e^{-x} + xQ'(x)e^{-x} - xQ(x)e^{-x} \\ &= -(x-1)Q(x)e^{-x} + xQ'(x)e^{-x} \end{aligned}$$
tandis que $V(x) = P'(x)$. Pour $A \gg 1$ grand,
$$\begin{aligned} \int_0^A xP''(x)Q(x)e^{-x}dx = \big[xQ(x)P'(x)e^{-x}\big]_0^A \\ + \int_0^A (x-1)Q(x)P'(x)e^{-x}dx \\ - \int_0^A xQ'(x)P'(x)e^{-x}dx \ . \end{aligned}$$
En passant à la limite $A \to +\infty$ on obtient que
$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} xP''(x)Q(x)e^{-x}dx &= \int_0^{+\infty} (x-1)Q(x)P'(x)e^{-x}dx \\ &\quad - \int_0^{+\infty} xQ'(x)P'(x)e^{-x}dx \ . \end{aligned}$$
On en déduit que
$$\langle \varphi(P), Q \rangle = -\int_0^{+\infty} xP'(x)Q'(x)e^{-x}dx \ .$$
L'expression est symétrique en P et Q et donc $\langle \varphi(P), Q\rangle = \langle P, \varphi(Q)\rangle$ pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$. $\square$

Correction de l'exercice 3.58. Puisque f et g sont symétriques, pour tous $x, y \in E$,
$$\begin{aligned} \langle (g\circ f)(x), y\rangle &= \langle g\,(f(x))\,, y\rangle \\ &= \langle f(x), g(y)\rangle \\ &= \langle x, f\,(g(y))\rangle \\ &= \langle x, (f\circ g)(y)\rangle \end{aligned}$$
et on voit donc que $(g\circ f)^\star = f\circ g$ si f et g sont symétriques. Par défintion, $g\circ f$ est symétrique si et seulement si $(g\circ f)^\star = g\circ f$, et donc, par suite, $g\circ f$ est symétrique si et seulement si $g\circ f = f\circ g$, à savoir si et seulement si f et g commutent. $\square$

CHAPITRE 5

Intégration - Enoncés

Exercice 5.1. Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ la fonction en escalier donnée par $f(x) = 1$ si $x \in [0, \frac{1}{2}[$, $f(x) = -2$ si $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ et $f(x) = 4$ si $x \in [\frac{3}{2}, 2]$. Soit $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ la fonction en escalier donnée par $g(x) = -1$ si $x \in [0, \frac{1}{4}[$, $g(x) = 1$ si $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$, $g(x) = 3$ si $x \in [\frac{1}{2}, \frac{7}{4}[$ et $g(x) = -1$ si $x \in [\frac{7}{4}, 2]$.

(1) Montrer que $f + g$ est une fonction en escalier sur $[0,2]$.

(2) Montrer que $\int_0^2 (f+g)(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 g(x)dx$.

Exercice 5.2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier strictement positif. On considère la subdivision $\sigma = (a_i)_{i=0,\dots,n}$ de $[0,1]$ donnée par $a_i = \frac{i}{n}$. Soit $\varphi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction en escalier donnée par $\varphi_n(x) = \frac{i^2}{n^2}$ pour tout $x \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[$ et tout $i = 0, \dots, n-1$ (et on pourra poser $\varphi_n(1) = \frac{(n-1)^2}{n^2}$).

(1) Montrer que $|f - \varphi_n| \leq \frac{3}{n}$ sur $[0,1]$.

(2) Montrer que f est Riemann intégrable sur $[0,1]$ et donner la valeur de $\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice 5.3. **(1)** On admet que $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ pour des fonctions en escalier $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Montrer que la propriété reste vraie pour les fonctions Riemann intégrables sur $[a,b]$.

(2) On admet que $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$ pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier (et $\lambda \in \mathbb{R}$). Montrer que la propriété reste vraie si f est Riemann intégrable sur $[a,b]$.

(3) On admet que $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ pour des fonctions en escalier $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ si $f \leq g$. Montrer que la propriété reste vraie pour les fonctions Riemann intégrables sur $[a,b]$. En déduire que si $f \geq 0$ est Riemann intégrable sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

(4) Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable sur $[a,b]$, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Exercice 5.4. Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a < b$ deux réels, et soit $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$, une subdivision de $[a,b]$. Soit aussi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur $[a,b]$. On appelle somme de Darboux inférieure et sommes de Darboux supérieure associées à la subdivison σ les réels

$$\Sigma_\sigma(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(a_i - a_{i-1}) \text{ et } \Sigma^\sigma(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(a_i - a_{i-1}) \ ,$$

où

$$m_i = \inf_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x) \text{ et } M_i = \sup_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x)\ .$$

(1) Montrer que $\Sigma_\sigma(f) \leq \Sigma^\sigma(f)$, que $\Sigma_\sigma(f) \geq (b-a)m$ et que $\Sigma^\sigma(f) \leq (b-a)M$, où $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.

(2) On note f^- et f^+ les fonctions en escaliers de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f^-(x) = \sum_{i=1}^n m_i \chi_{[a_{i-1},a_i||}(x) \text{ et } f^+(x) = \sum_{i=1}^n M_i \chi_{[a_{i-1},a_i||}(x)\ ,$$

où χ_X est la fonction caractéristique de X (qui vaut donc 1 sur X et 0 ailleurs), $|| = [$ si $i \leq n-1$ et $|| =]$ si $i = n$, de sorte que $[a_{i-1}, a_i|| = [a_{i-1}, a_i[$ si $i \leq n-1$ et $[a_{n-1}, a_n|| = [a_{n-1}, a_n]$. Montrer que $f^-(x) \leq f(x) \leq f^+(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. Que valent les intégrales de f^- et f^+ sur $[a,b]$?

(3) On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une subdivision σ de $[a,b]$ telle que $\Sigma^\sigma(f) \leq \Sigma_\sigma(f) + \varepsilon$. Montrer qu'alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

(4) On note $S(f,\sigma,\xi)$ la somme de Riemann associée à une subdivision pointée (σ,ξ). Soit aussi $\varepsilon > 0$ donné. Montrer que pour toute subdivision σ de $[a,b]$, il existe un pointage ξ associé pour lequel $\Sigma^\sigma(f) \leq S(f,\sigma,\xi) + \varepsilon$ et un autre pour lequel $S(f,\sigma,\xi) \leq \Sigma_\sigma(f) + \varepsilon$.

(5) Démontrer la réciproque de (3), et donc qu'une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une subdivision σ de $[a,b]$ telle que $\Sigma^\sigma(f) \leq \Sigma_\sigma(f) + \varepsilon$.

(6) Déduire de (5) qu'une fonction monotone $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est toujours intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

Exercice 5.5. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1+x^2$ si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ sinon. Montrer que f n'est pas Riemann intégrable sur $[0,1]$.

Exercice 5.6. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$. Montrer que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\ .$$

On admet que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$$

Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$.

Exercice 5.7. Soit $[a,b]$ un intervalle fermé (borné) de $\mathbb{R}$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ telle que $|f-g| < \varepsilon$ en tout point de $[a,b]$. Montrer qu'alors f est aussi intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

Exercice 5.8. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ .$$

Calculer $\int_0^1 x^2dx$ à l'aide des sommes de Riemann.

Exercice 5.9. Soit $[a,b]$ un intervalle fermé (borné) de $\mathbb{R}$. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est continue et positive ou nulle sur $[a,b]$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f(x)^n dx\right)^{1/n} = \sup\{f(x), x\in[a,b]\}\ .$$

Exercice 5.10. Soit $f:[2,3]\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x)\le 1$ pour tout x. On suppose que $\int_2^3 f(x)dx = 1$. Montrer que $f\equiv 1$ (est identiquement égale à 1).

Exercice 5.11. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$. Montrer que f possède un point fixe, à savoir qu'il existe $x\in[0,1]$ tel que $f(x)=x$.

Exercice 5.12. Soit $[a,b]$ un intervalle fermé (borné) de $\mathbb{R}$. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction. On suppose pour commencer que f est en escalier. Montrer qu'alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)dx = 0\ .$$

Montrer que le résultat reste vrai si on suppose seulement que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

Exercice 5.13. Pour $n\in\mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx\ .$$

(1) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

(2) Calculer $I_n + I_{n+1}$ pour tout n.

(3) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Exercice 5.14. Soit $[a,b]$ un intervalle fermé (borné) de $\mathbb{R}$ et soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et strictement croissante sur $[a,b]$. On suppose que $f(a)=a$. On définit $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_a^{f(x)} f^{-1}(t)dt - xf(x)\ .$$

Montrer que g est bien définie, qu'elle est dérivable sur $[a,b]$ puis que $g\equiv -a^2$ sur $[a,b]$.

Exercice 5.15. Soit $f:[-1,+1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et impaire. Montrer que $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$.

Exercice 5.16. Calculer $\int_0^{\pi/2}(\cos(x))^{2540}\sin(x)dx$.

Exercice 5.17. Calculer $\int_0^{\pi/2} x\sin(x)dx$.

Exercice 5.18. On rappelle que $2\cos^2(x) = \cos(2x)+1$. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$ à l'aide du changement de variables $x=\tan(t)$.

Exercice 5.19. Trouver une primitive de $\ln(x)$.

Exercice 5.20. Trouver une primitive de $\arctan(x)$.

Exercice 5.21. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(a + b - x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. Montrer que

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx \ .$$

En déduire la valeur de $I = \int_0^\pi x \cos^4(x) \sin(x) dx$.

Exercice 5.22. Soit $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ données par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = 2x^3 + x + 1$. Calculer l'aire de la surface comprise par les graphes de f et de g et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 5.23. Calculer l'aire intérieure de l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où $a, b \in \mathbb{R}^{+\star}$. On pourra être amené à utiliser le changement de variables $x = a\cos(t)$.

Exercice 5.24. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles
(1) $F(X) = \frac{X}{(X+1)(X-2)}$
(2) $G(X) = \frac{X^3}{(X+1)(X-2)}$
(3) $H(X) = \frac{X^4 - X + 2}{(X-1)^2(X+1)}$

Exercice 5.25. Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Soient $a < b$ strictement positifs fixés. On suppose que

$$f(x) \leq a \int_1^x \frac{f(t)}{t^2} dt + b$$

pour tout $x \geq 1$. On pose

$$F(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t^2} dt$$

pour $x \geq 1$.

(1) Montrer que $F'(x) \leq \frac{a}{x^2} F(x) + \frac{b}{x^2}$ pour tout $x > 1$.

(2) Soit $G(x) = F(x) e^{\frac{a}{x}}$. Montrer que $G'(x) \leq \frac{b}{x^2} e^{\frac{a}{x}}$ pour $x > 1$.

(3) En effectuant le changement de variables $s = \frac{1}{t}$, montrer que

$$\int_1^x \frac{1}{t^2} e^{\frac{a}{t}} dt = \frac{1}{a} \left[e^a - e^{\frac{a}{x}} \right]$$

pour $x > 1$.

(4) Déduire de (2) et (3) que $G(x) \leq \frac{b}{a} \left[e^a - e^{\frac{a}{x}} \right]$ pour $x > 1$.

(5) Montrer que $F(x) \leq \frac{b}{a} \left[e^{(a - \frac{a}{x})} - 1 \right]$ pour $x \geq 1$.

Exercice 5.26. Décomposer en éléments simples puis trouver des primitives des fractions rationnelles
(1) $F(X) = \frac{1}{X(X+1)(X-2)}$
(2) $G(X) = \frac{1}{X^2(X+1)^2}$

Exercice 5.27. Décomposer en éléments simples puis trouver des primitives des fractions rationnelles
(1) $F(X) = \frac{X^5+X^4+2}{X^3-X}$
(2) $G(X) = \frac{X^3+X+1}{(X-1)^3(X+1)}$

Exercice 5.28. **(1)** Soit P le polynôme réel $P(X) = X^4-3X^2-4$. Décomposer P en produit de polynômes irréductibles de degré 1 ou 2 (sans racines réelles donc pour le degré 2). On pourra commencer par chercher des racines de P en posant $Y = X^2$.

(2) Soit H la fraction rationnelle
$$H(X) = \frac{X^5 - 1}{X^4 - 3X^2 - 4} .$$
Décomposer H en éléments simples.

(3) Trouver une primitive de H

Exercice 5.29. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par
$$f(x) = \frac{x^2 - x - 3}{x^2 + 1} + \frac{x^3}{1 + x^4} \sin(x) .$$
L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est-elle convergente ?

Exercice 5.30. Soient $a < b$ deux nombres réels strictement positifs. Calculer
$$I_a^b = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}} dt .$$
On considère l'intégrale généralisée
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}} dt .$$
En quelle(s) borne(s) cette intégrale est-elle généralisée ? Est-elle convergente ? Que vaut-elle ?

Exercice 5.31. Pour $x > 1$, calculer
$$I_x = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^4} dt .$$
Etudier la convergence de $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^4} dt$.

Exercice 5.32. Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes:
$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 2}{x^5 + 1} dx \ , \ I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{2x + 3}{x^2 + 5} dx \ ,$$
$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)\sin(x)}{x^2} dx \ , \ I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{2x + 3}{\sqrt{x}(3x^2 + 1)} dx .$$
Justifier vos réponses. On précisera notamment en quelles bornes ces intégrales sont généralisées.

Exercice 5.33. Etudier la convergence de l'intégrale généralisée
$$I = \int_0^{+\infty} x^4 \sin(x) e^{-x} dx .$$

Exercice 5.34. Soit $a \in \mathbb{R}$. Etudier, en fonction de a, la convergence de l'intégrale généralisée $I_a = \int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^a} dx$.

Exercice 5.35. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.

(1) Montrer que f est nécessairement positive et que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

(2) En considérant $\int_{x/2}^{x} f(t)dt$, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

Exercice 5.36. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(x)^2 dx$ est convergente. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^a} \int_0^x f(t)dt = 0$$

pour tout $a > \frac{1}{2}$. Cela reste-t-il vrai pour $a = \frac{1}{2}$?

Exercice 5.37. Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{2x^2+3x+2}{3x^4+1} dx \ , \ I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{2x^3+3}{5x^4+2x^2+1} dx \ ,$$

$$I_3 = \int_0^{\pi} \frac{(1-\cos(x))\sin^2(x)}{x^5} dx \ , \ I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{5x^2+3}{\sqrt{x}(3x^3+2x+1)} dx \ .$$

Justifier vos réponses. On précisera notamment en quelles bornes ces intégrales sont généralisées.

Exercice 5.38. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^4+1} + \frac{x^4}{1+x^4}\sin(x) \ .$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est-elle convergente ?

Exercice 5.39. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{5x^4+x^2+2}{(2x^5+7)\ln^2(x)} \ .$$

Soit $a \geq 1$. On pose $I_a = \int_a^{+\infty} f(x)dx$. L'intégrale est elle convergente si $a > 1$? Et que dire si $a = 1$?

Exercice 5.40. L'intégrale généralisée

$$I = \int_\pi^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+1} dx$$

est-elle convergente ? Est-elle absolument convergente ?

Exercice 5.41. Pour $x > 1$ on note

$$I_x = \int_1^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt$$

Calculer I_x. En déduire que

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt$$

est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 5.42. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un réel. Soit
$$I_\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos(x))\sin^3(x)}{x^\alpha}dx$$
Pour quelle(s) valeur(s) de α cette intégrale est-elle convergente ?

Exercice 5.43. Décomposer la fraction rationnelle $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$ en éléments simples. Si $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ sont deux fonctions localement intégrables sur $[a, +\infty[$, avec $a \in \mathbb{R}$ (donné et fixé, par exemple 2), et si les intégrales généralisées
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ et } \int_a^{+\infty} g(x)dx$$
sont divergentes, l'intégrale généralisée
$$I = \int_a^{+\infty} (f(x) + g(x))\, dx$$
doit elle être forcément divergente ?

Exercice 5.44. Que vaut le maximum de $x(1-x)$ sur $[0, 1]$? Quel type de convergence est vérifiée sur $[0, 1]$ par la suite de fonctions $f_n(x) = x^n(1-x)^n$? Calculer
$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n(1-x)^n dx\ .$$
Que dire si $f_n(x) = x^n$?

Exercice 5.45. **(1)** On considère la suite de fonctions (f_n) définies par $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$. Montrer que (f_n) converge uniformément vers la fonction constante 1 sur $[0, \frac{1}{2}]$ et vers la fonction nulle sur tout intervalle fermé $[a, b] \subset]1, +\infty[$.

(2) Soient les limites $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^n}$, $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$. Que valent ℓ et ℓ' ?

Exercice 5.46. Calculer
$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{n\sqrt{x}+1}{nx+1}dx\ .$$

Exercice 5.47. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $0 < a \leq 1$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^a f(x^n)dx = af(0)\ .$$

Exercice 5.48. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(x)$ a une limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque $x \to +\infty$. En effectuant le changement de variables $x = nu$, calculer
$$\ell' = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(x)dx\ .$$

Exercice 5.49. Calculer, en justifiant le passage à la limite, les limites suivantes:
$$I = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{n^2\sin(x)+n+1}{n^2+1}dx\ ,\ J = \lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^2 \frac{n^2x^2+1}{n^2+nx^4+1}dx$$
$$K = \lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^1 x^4\cos(\frac{1}{n}x)dx\ ,\ L = \lim_{n\to+\infty} \int_1^2 \frac{n^3\ln(x)+n^2x^3+nx+1}{n^3+5}dx\ .$$

Exercice 5.50. Calculer, en justifiant le passage à la limite, les limites suivantes:

$$I = \lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n^2 \sin(\frac{1}{n}x) + n + 1}{n^2x^2+1} dx \ , \ L = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{n}x)}{x^2+1} dx \ .$$

Exercice 5.51. Calculer

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{n^2\sqrt{x}+1}{n^2x+n+1} dx \ .$$

Exercice 5.52. Calculer

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{(nx+1)(1+x^2)} dx \ .$$

Exercice 5.53. Soit (f_n) la suite de fonctions définie par $f_n(x) = \frac{x^3\sin(1+x^2)}{x^5+1}$ si $x \in]n, n+1[$ et 0 sinon. Calculer $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

Exercice 5.54. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^1 \sin(xt)dt \ .$$

Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(0)$.

Exercice 5.55. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{x^2t^2+xt+1}{2+\cos(xt)} dt \ .$$

Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(0)$.

Exercice 5.56. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt \ .$$

(1) Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(0)$.

(3) Calculer $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{F(x)}{x}$.

Exercice 5.57. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \ .$$

(1) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0 \ .$$

(2) Montrer que F est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.

(3) Montrer que F vérifie l'équation différentielle

$$F''(x) + F(x) = \frac{1}{x}$$

sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Exercice 5.58. Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\right\}$. Calculer $I = \int\int_D x^3y^2 dxdy$.

Exercice 5.59. Calculer l'aire de

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2 - x^2\right\} \ .$$

Exercice 5.60. Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\right\}$. Calculer $I = \int\int_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy$.

Exercice 5.61. Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq y \leq 1, x - y + 1 \geq 0, x - y - 1 \leq 0\right\}$. Calculer

$$I = \int\int_D x dxdy \ .$$

Calculer I si $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq 0, x - y + 1 \geq 0, x + 2y - 4 \leq 0\right\}$.

Exercice 5.62. Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq 1, y \geq 0, y^2 \leq x\right\}$. Calculer $I = \int\int_D (x + 2y) dxdy$.

Exercice 5.63. Calculer l'aire de

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \leq x \leq y^2, 1 \leq y \leq 2\right\} \ .$$

Exercice 5.64. Calculer les intégrales multiples

$$I = \int\int_{D_1} \cos(x+y) dxdy \ ,$$

$$\text{et } J = \int\int_{D_2} \left(1 + x^2y^3\right) dxdy \ ,$$

où

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq \pi \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\} \ ,$$

$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq y \leq x \leq 1\right\} \ .$$

Exercice 5.65. Pour $x > 0$ on considère la fonction Γ donnée par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \ .$$

(1) Montrer que $\Gamma(x)$ est bien définie pour $x > 0$.

(2) Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

(3) Calculer $\Gamma(1)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(4) Montrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

(5) Montrer que Γ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.

(6) Montrer que $\Gamma'' > 0$ puis que Γ' ne s'annule qu'une seule fois et que le point a qui annule Γ' est tel que $a \in [1, 2]$.

Exercice 5.66. Calculer l'aire du domaine

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0, y \geq 0, xy + x + y \leq 1\right\} \ .$$

CHAPITRE 6

Intégration - Corrigés

Correction de l'exercice 5.1. **(1)** Pour montrer que $f+g$ est en escalier sur $[0,2]$ il faut trouver une subdivision $\sigma = (a_i)_{i=0,\ldots,p}$ de $[0,2]$ avec la propriété que $f+g$ est constante sur chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$. On a $\frac{7}{4} > \frac{3}{2}$. On prend pour subdivision la subdivision emboitée

$$0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{3}{2} < \frac{7}{4} < 2\ .$$

On a alors $(f+g)(x) = -1+1 = 0$ si $x \in [0, \frac{1}{4}[$, $(f+g)(x) = 1+1 = 2$ si $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$, $(f+g)(x) = -2+3 = 1$ si $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$, $(f+g)(x) = 4+3 = 7$ si $x \in [\frac{3}{2}, \frac{7}{4}[$ et $(f+g)(x) = 4-1 = 3$ si $x \in [\frac{7}{4}, 2]$. La subdivision choisie satisfait la condition voulue. Donc $f+g$ est bien en escalier.

(2) Par définition,

$$\begin{aligned}\int_0^2 (f+g)(x)dx &= 0 \times (\frac{1}{4} - 0) + 2 \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + 1 \times (\frac{3}{2} - \frac{1}{2}) \\ &\quad + 7 \times (\frac{7}{4} - \frac{3}{2}) + 3 \times (2 - \frac{7}{4}) \\ &= 1 + \frac{12}{4} = 4\end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx &= 1 \times (\frac{1}{2} - 0) - 2 \times (\frac{3}{2} - \frac{1}{2}) + 4 \times (2 - \frac{3}{2}) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^2 g(x)dx &= -1 \times (\frac{1}{4} - 0) + 1 \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) \\ &\quad + 3 \times (\frac{7}{4} - \frac{1}{2}) - 1 \times (2 - \frac{7}{4}) \\ &= \frac{14}{4} = 3 + \frac{1}{2}\ .\end{aligned}$$

On a donc bien $\int_0^2 (f+g)(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 g(x)dx$, à savoir $4 = \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{2}$. $\square$

Correction de l'exercice 5.2. **(1)** Sur $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[$, et comme f est croissante sur $\mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} |f - \varphi_n| &\le x^2 - \frac{i^2}{n^2} \\ &\le \frac{(i+1)^2}{n^2} - \frac{i^2}{n^2} \\ &= \frac{1+2i}{n^2} \le \frac{3}{n} \end{aligned}$$

car $1 \le n$ et $i \le n$ de sorte que $1 + 2i \le 3n$.

(2) Les fonctions constantes sont des fonctions en escalier. De plus $\int_0^1 \frac{3}{n} dx = \frac{3}{n} \times (2-0) = \frac{3}{n}$ qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Soit ψ_n la fonction constante $\psi_n(x) = \frac{3}{n}$. On a donc pu trouver deux suites (φ_n) et (ψ_n) de fonctions en escalier sur $[0,1]$ qui sont telles que $|f - \varphi_n| \le \psi_n$ sur $[0,1]$ pour tout n et telles que $\int_0^1 \psi_n(x)dx \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Ainsi f est Riemann intégrable sur $[0,1]$ et

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)dx \ .$$

On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_n(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^2}{n^2} \left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \end{aligned}$$

car la somme des p premiers carrés vaut $\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$ (et ici $p = n-1$). On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \ .$$

Donc $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. $\square$

Correction de l'exercice 5.3. **(1)** Si f et g sont Riemann intégrables sur $[a,b]$ alors il existe des suites (φ_n), $(\tilde{\varphi}_n)$, (ψ_n) et $(\tilde{\psi}_n)$ de fonctions en escalier telles que $|f - \varphi_n| \le \psi_n$ sur $[a,b]$ pour tout n, $|g - \tilde{\varphi}_n| \le \tilde{\psi}_n$ sur $[a,b]$ pour tout n, $\int_a^b \psi_n(x)dx \to 0$ et $\int_a^b \tilde{\psi}_n(x)dx \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. De plus

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx \text{ et } \int_a^b g(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \tilde{\varphi}_n(x)dx$$

par définition. Les fonctions $\hat{\varphi}_n = \varphi_n + \tilde{\varphi}_n$ et $\hat{\psi}_n = \psi_n + \tilde{\psi}_n$ sont clairement en escalier sur $[a,b]$ et

$$|(f+g)(x) - \hat{\varphi}(x)| \le |f(x) - \varphi(x)| + |g(x) - \tilde{\varphi}(x)| \le \hat{\psi}(x)$$

sur $[a,b]$ tandis que

$$\int_a^b \hat{\psi}(x)dx = \int_a^b \psi(x)dx + \int_a^b \tilde{\psi}(x)dx$$

(propriété admise) de sorte que $\int_a^b \hat{\psi}(x)dx \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Donc $f+g$ est Riemann intégrable sur $[a,b]$ et de plus

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (f+g)(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \hat{\varphi}_n(x)dx \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx + \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \tilde{\varphi}_n(x)dx \quad \text{(propriété admise)} \\
&= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \ .
\end{aligned}$$

D'où la propriété voulue.

(2) Si f est Riemann intégrable sur $[a,b]$ alors il existe des suites (φ_n) et (ψ_n) de fonctions en escalier telles que $|f-\varphi_n| \leq \psi_n$ sur $[a,b]$ pour tout n et $\int_a^b \psi_n(x)dx \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. De plus

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx$$

par définition. Les fonctions $\hat{\varphi}_n = \lambda\varphi_n$ et $\hat{\psi}_n = |\lambda|\psi_n$ sont clairement en escalier sur $[a,b]$ et $|(\lambda f)(x) - \hat{\varphi}(x)| \leq \hat{\psi}(x)$ sur $[a,b]$ tandis que $\int_a^b \hat{\psi}(x)dx = |\lambda| \int_a^b \psi(x)dx$ (propriété admise) de sorte que $\int_a^b \hat{\psi}(x)dx \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Donc λf est Riemann intégrable sur $[a,b]$ et de plus

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \hat{\varphi}_n(x)dx \\
&= \lambda \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx \quad \text{(propriété admise)} \\
&= \lambda \int_a^b f(x)dx \ .
\end{aligned}$$

D'où la propriété voulue.

(3) Si f et g sont Riemann intégrables sur $[a,b]$ alors il existe des suites (φ_n), $(\tilde{\varphi}_n)$, (ψ_n) et $(\tilde{\psi}_n)$ de fonctions en escalier telles que $|f-\varphi_n| \leq \psi_n$ sur $[a,b]$ pour tout n, $|g-\tilde{\varphi}_n| \leq \tilde{\psi}_n$ sur $[a,b]$ pour tout n, $\int_a^b \psi_n(x)dx \to 0$ et $\int_a^b \tilde{\psi}_n(x)dx \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. De plus

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx \text{ et } \int_a^b g(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \tilde{\varphi}_n(x)dx$$

par définition. On suppose $f \leq g$ sur $[a,b]$. Alors

$$\varphi_n - \psi_n \leq f \leq g \leq \tilde{\varphi}_n + \tilde{\psi}_n$$

sur $[a,b]$. En particulier, $\varphi_n - \psi_n \leq \tilde{\varphi}_n + \tilde{\psi}_n$ sur $[a,b]$. Les sommes et différences de fonctions en escalier sont des fonctions en escalier. Donc (propriété admise), avec les propriétés des questions (1) et (2) précédentes,

$$\int_a^b \varphi_n(x)dx - \int_a^b \psi_n(x)dx \leq \int_a^b \tilde{\varphi}_n(x)dx + \int_a^b \tilde{\psi}_n(x)dx$$

En passant à la limite en $n \to +\infty$ dans cette inégalité, on obtient que $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$, ce qui est la propriété voulue.

(4) Formellement il faut montrer que si f est Riemann intégrable sur $[a,b]$ alors $|f|$ l'est aussi. Comme f est Riemann intégrable sur $[a,b]$, par définition il existe des suites (φ_n) et (ψ_n) de fonctions en escalier telles que $|f - \varphi_n| \leq \psi_n$ sur $[a,b]$ pour tout n et $\int_a^b \psi_n(x)dx \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. L'inégalité triangulaire donne que

$$||f(x)| - |\varphi_n(x)|| \leq |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \psi_n(x)$$

pour tout $x \in [a,b]$ et tout n, et comme $|\varphi_n|$ est aussi une fonction en escalier, on voit que $|f|$ est bien Riemann intégrable sur $[a,b]$. On va maintenant déduire (4) de (3). On écrit que $-|f| \leq f \leq |f|$. On obtient alors avec la question (3) que

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \ .$$

Comme $|f| \geq 0$ on obtient avec la question (3) que $\int_a^b |f(x)|dx \geq 0$ (0 est une fonction en escalier sur $[a,b]$, son intégrale vaut $0 \times (b-a) = 0$). Par suite, $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$, ce qui est la propriété voulue. $\square$

Correction de l'exercice 5.4. **(1)** Il est clair que $m_i \leq M_i$ pour tout i. Donc, comme $a_i \geq a_{i-1}$ pour tout i,

$$\begin{aligned}\Sigma_\sigma(f) &= \sum_{i=1}^n m_i(a_i - a_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n M_i(a_i - a_{i-1}) \\ &= \Sigma^\sigma(f) \ .\end{aligned}$$

Les deux autres propriétés s'obtiennent en remarquant que $m \leq m_i$ pour tout i, que $M_i \leq M$ pour tout i et grâce aux propriétés téléscopiques des sommes impliquées. On a

$$\begin{aligned}\Sigma_\sigma(f) &= \sum_{i=1}^n m_i(a_i - a_{i-1}) \\ &\geq m\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \\ &= m(a_n - a_0) \\ &= m(b-a)\end{aligned}$$

et, de même,

$$\begin{aligned}\Sigma^\sigma(f) &= \sum_{i=1}^n M_i(a_i - a_{i-1}) \\ &\le M \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \\ &= M(a_n - a_0) \\ &= M(b-a)\ .\end{aligned}$$

D'où les inégalités demandées.

(2) Les intervalles $[a_{i-1}, a_i||$ sont deux à deux disjoints et donc, pour tout $x \in [a,b]$ donné quelconque, il existe un et un seul $i \in [\![1,n]\!]$ pour lequel $x \in [a_{i-1}, a_i||$. On a clairement $m_i \le f(x) \le M_i$ pour ce i, et comme $f^-(x) = m_i$ et $f^+(x) = M_i$, on obtient l'inégalité voulue. On a

$$\int_a^b f^-(x)dx = \sum_{i=1}^n m_i(a_i - a_{i-1}) = \Sigma_\sigma(f)$$

et

$$\int_a^b f^+(x)dx = \sum_{i=1}^n M_i(a_i - a_{i-1}) = \Sigma^\sigma(f)$$

de sorte que les intégrales sur $[a,b]$ de f^- et f^+ ne sont rien d'autre que les sommes de Darboux inférieures et supérieures $\Sigma_\sigma(f)$ et $\Sigma^\sigma(f)$.

(3) Les fonctions f^- et f^+ sont clairement des fonctions en escalier. Soit $\varepsilon > 0$ donné et soit σ une subdivision de $[a,b]$ pour laquelle $\Sigma^\sigma(f) \le \Sigma_\sigma(f) + \varepsilon$. On pose $\varphi_\varepsilon = f^+$. Alors

$$|f - \varphi_\varepsilon| = f^+ - f \le f^+ - f^-$$

puisque $f^- \le f \le f^+$. Soit $\psi_\varepsilon = f^+ - f^-$. Alors ψ_ε est elle aussi une fonction en escalier. elle est positive ou nulle et

$$\int_a^b \psi_\varepsilon(x)dx = \Sigma^\sigma(f) - \Sigma_\sigma(f) \le \varepsilon\ .$$

On a ainsi montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escaliers φ_ε et ψ_ε qui sont telles que $|f - \varphi_\varepsilon| \le \psi_\varepsilon$ sur $[a,b]$ et $\int_a^b \psi_\varepsilon(x)dx \le \varepsilon$. Donc, par définition, f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

(4) Soit $\sigma = (a_i)_{0\le i\le n}$ une subdivision donnée. Par définition,

$$m_i = \inf\{f(x), x \in [a_{i-1}, a_i||\}\ .$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe donc $x \in [a_{i-1}, a_i||$ tel que $m_i \le f(x) \le m_i + \varepsilon$ car sinon, pour tout $x \in [a_{i-1}, a_i||$ on aurait que $f(x) \ge m_i + \varepsilon$ et donc que $m_i \ge m_i + \varepsilon$, ce qui est impossible. On note $\xi_i = x$ et on a ainsi montré que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, il existe $\xi_i \in [a_{i-1}, a_i||$ tel que $m_i \le f(\xi_i) \le m_i + \varepsilon$. Comme $a_i - a_{i-1} \ge 0$ pour tout i on a alors clairement que

$$\begin{aligned} S(f,\sigma,\xi) &\leq \sum_{i=1}^{n}(m_i+\varepsilon)(a_i-a_{i-1}) \\ &= \Sigma_\sigma(f)+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1}) \\ &= \Sigma_\sigma(f)+\varepsilon(b-a)\ . \end{aligned}$$

En partant de $\varepsilon/(b-a)$ au lieu de ε on a donc montré que pour toute subdivision σ de $[a,b]$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un pointage ξ associé pour lequel $S(f,\sigma,\xi) \leq \Sigma_\sigma(f)+\varepsilon$. De la même façon,

$$M_i = \sup\{f(x), x \in [a_{i-1}, a_i||\}$$

et pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $x \in [a_{i-1}, a_i||$ tel que $M_i - \varepsilon \leq f(x) \leq M_i$. En raisonnant ensuite comme ci-dessus on obtient que pour toute subdivision σ de $[a,b]$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un pointage ξ associé pour lequel $\Sigma^\sigma(f) \leq S(f,\sigma,\xi)+\varepsilon$.

(5) Supposons que f soit intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$. Alors, cf. cours, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ avec la propriété que pour toute subdivision pointée (σ,ξ), avec $\delta(\sigma) < \delta$ (où $\delta(\sigma)$ est le pas de σ),

$$\left|S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon\ .$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit σ une subdivision de $[a,b]$ de pas $\delta(\sigma) < \delta$. Soit ξ un pointage associé à σ tel que $S(f,\sigma,\xi) \leq \Sigma_\sigma(f)+\varepsilon$. On a

$$\int_a^b f(x)dx \leq S(f,\sigma,\xi)+\varepsilon$$

et donc

$$\int_a^b f(x)dx \leq \Sigma_\sigma(f)+2\varepsilon\ .$$

On considère maintenant ξ un pointage associé à σ tel que $\Sigma^\sigma(f) \leq S(f,\sigma,\xi)+\varepsilon$. On a

$$S(f,\sigma,\xi) \leq \int_a^b f(x)dx+\varepsilon$$

et donc

$$\Sigma^\sigma(f) \leq \int_a^b f(x)dx+2\varepsilon\ .$$

Par suite,

$$\Sigma^\sigma(f) \leq \Sigma_\sigma(f)+4\varepsilon\ .$$

En partant de $\varepsilon/4$ au lieu de ε on a donc montré que si f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une subdivision σ de $[a,b]$ telle que $\Sigma^\sigma(f) \leq \Sigma_\sigma(f)+\varepsilon$. Avec la question (3) on a donc en fait montré qu'une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une subdivision σ de $[a,b]$ telle que $\Sigma^\sigma(f) \leq \Sigma_\sigma(f)+\varepsilon$.

(6) Supposons pour fixer les idées (quitte à changer f en $-f$) que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est croissante. Clairement f est bornée puisque $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ pour tout $x \in [a,b]$. Soit $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a,b]$. Alors clairement

$$m_i = f(a_{i-1}) \leq f(a_i) = M_i$$

pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Soit $\varepsilon > 0$ donné. On considère σ une subdivision de $[a,b]$ telle que $\delta(\sigma) \leq \varepsilon$. On a alors, puisque $M_i \geq m_i$ pour tout i,

$$\begin{aligned}\Sigma^\sigma(f) - \Sigma_\sigma(f) &= \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})(M_i - m_i)\\ &\leq \delta(\sigma)\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\\ &\leq \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\left(f(a_i) - f(a_{i-1})\right)\end{aligned}$$

et par somme téléscopique, on obtient que

$$\Sigma^\sigma(f) - \Sigma_\sigma(f) \leq \varepsilon\left(f(b) - f(a)\right)\ .$$

Sans perdre en généralité on peut supposer que $f(a) < f(b)$, car sinon f est constante, donc en escalier, donc intégrable. En partant de $\varepsilon/\left(f(b) - f(a)\right)$ au lieu de ε on a alors montré que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une subdivision σ de $[a,b]$ telle que $\Sigma^\sigma(f) \leq \Sigma_\sigma(f) + \varepsilon$. Il suit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$. □

Correction de l'exercice 5.5. Soit $(\sigma_n)_n$ une suite de subdivisions de $[0,1]$ telle que $\delta(\sigma_n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. On écrit que pour tout n, $\sigma_n = (a_{i,n})_{i=0,\dots,N(n)}$. A titre de remarque, comme $\delta(\sigma_n) \to 0$ on a forcément que $N(n) \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Pour tout n fixé, et tout $i = 1,\dots,N(n)$, on choisit $\xi_{i,n} \in]a_{i-1,n}, a_{i,n}[$ avec la propriété que $\xi_{i,n} \in \mathbb{Q}$. Un tel choix est possible puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. De même, pour tout n fixé, et tout $i = 1,\dots,N(n)$, on choisit $\tilde{\xi}_{i,n} \in]a_{i-1,n}, a_{i,n}[$ avec la propriété que $\tilde{\xi}_{i,n} \notin \mathbb{Q}$ est irrationnel. Les irrationnels étant eux aussi denses dans $\mathbb{R}$, un tel choix est là encore possible. On pose $\xi_n = (\xi_{i,n})_{i=1,\dots,N(n)}$ et $\tilde{\xi}_n = (\tilde{\xi}_{i,n})_{i=1,\dots,N(n)}$. On obtient alors deux suites de subdivisions pointées (σ_n, ξ_n) et $(\sigma_n, \tilde{\xi}_n)$ avec $\delta(\sigma_n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Si f était Riemann intégrable, et si on note $S(f,\sigma_n,\xi_n)$ et $S(f,\sigma_n,\tilde{\xi}_n)$ les sommes de Riemann de f associées à (σ_n,ξ_n) et $(\sigma_n,\tilde{\xi}_n)$, on devrait avoir

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{n\to+\infty} S(f,\sigma_n,\xi_n)\\ &= \lim_{n\to+\infty} S(f,\sigma_n,\tilde{\xi}_n)\ .\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}S(f,\sigma_n,\xi_n) &= \sum_{i=1}^{N(n)}(a_{i,n} - a_{i-1,n}) \times (1 + \xi_{i,n}^2) \geq a_{N(n),n} - a_{0,n} = 1\\ S(f,\sigma_n,\tilde{\xi}_n) &= \sum_{i=1}^{N(n)}(a_{i,n} - a_{i-1,n}) \times 0 = 0\end{aligned}$$

de sorte que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ devrait à la fois être plus grande que 1 et valoir 0. C'est bien sûr impossible. Donc f n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$. Vous verrez en L3 qu'elle est par contre intégrable au sens de Lebesgue et que son intégrale au sens de Lebesgue vaut 0. □

Correction de l'exercice 5.6. On considère la subdivision $\sigma_n = (a_i)_{i=0,\dots,n}$ de $[a,b]$ donnée par

$$a_i = a + i\frac{b-a}{n} \ .$$

On a $a_i - a_{i-1} = \frac{b-a}{n}$. Soit aussi $\xi_n = (\xi_i)_{i=1,\dots,n}$ donné par le choix

$$\xi_i = a + i\frac{b-a}{n} \ .$$

Si $S(f,\sigma_n,\xi_n)$ est la somme de Riemann de f associée la subdivision pointée (σ_n,ξ_n) on a alors que

$$S(f,\sigma_n,\xi_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \ .$$

Si $\delta(\sigma_n)$ est le pas de σ_n on a $\delta(\sigma_n) = \frac{b-a}{n}$ et donc $\delta(\sigma_n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Par suite, puisque f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$,

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \ .$$

C'est l'inégalité demandée. Si maintenant on prend $a=0$, $b=1$ et $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ on obtient que

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \int_0^1 f(x)dx \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} \ .
\end{aligned}$$

□

Correction de l'exercice 5.7. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. En appliquant la propriété à $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ il existe g intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ telle que $|f-g| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ en tout point de $[a,b]$. Comme g est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$, il existe deux fonctions en escaliers $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ sur $[a,b]$ telles que $|g-\varphi_\varepsilon| < \psi_\varepsilon$ en tout point de $[a,b]$ et telles que $\int_a^b \psi_\varepsilon(x)dx < \varepsilon/2$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
|f-\varphi_\varepsilon| &= |f-g+g-\varphi_\varepsilon| \\
&\le |f-g| + |g-\varphi_\varepsilon| \\
&= \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \psi_\varepsilon \ .
\end{aligned}$$

La fonction

$$\tilde{\psi}_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \psi_\varepsilon$$

est bien une fonction en escalier et

$$\begin{aligned}\int_a^b \tilde{\psi}_\varepsilon(x)dx &= \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b \psi_\varepsilon(x)dx \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon\ .\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe deux fonctions en escaliers $\varphi_\varepsilon, \tilde{\psi}_\varepsilon$ sur $[a,b]$ telles que $|f - \varphi_\varepsilon| < \tilde{\psi}_\varepsilon$ en tout point de $[a,b]$ et telles que $\int_a^b \tilde{\psi}_\varepsilon(x)dx < \varepsilon$. Donc f est bien intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$. □

Correction de l'exercice 5.8. On procède par récurrence sur n. Si $n = 1$ le résultat est trivialement vrai. On suppose maintenant le résultat vrai à un ordre n et on démontre qu'il est encore vrai à l'ordre $n+1$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right) \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\end{aligned}$$

et il est facile de vérifier que

$$2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$$

de sorte que l'on obtient bien que

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}\ ,$$

ce qui achève la récurrence. On reprend maintenant le raisonnement de l'exercice 2. Lorsque $a = 0$ et $b = 1$ on a

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\ .$$

Ici $f(x) = x^2$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2dx &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\ &= \frac{1}{3}\ .\end{aligned}$$

□

Correction de l'exercice 5.9. Posons $M = \sup\{f(x), x \in [a,b]\}$. Clairement $f \leq M$ sur $[a,b]$. Donc $f(x)^n \leq M^n$ pour tout $x \in [a,b]$ et tout $n \geq 1$, et ainsi

$$\left(\int_a^b f(x)^n dx\right)^{1/n} \leq M(b-a)^{1/n}$$

pour tout $n \geq 1$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé quelconque (petit). Il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) > M - \varepsilon$ car sinon on aurait $f \leq M - \varepsilon$ sur $[a,b]$ et donc $M \leq M - \varepsilon$ ce qui est faux. Par continuité de f il existe alors $d = c - \eta$ et $e = c + \eta$ ($\eta > 0$ petit) tels que $c, d \in]a,b[$ et $f \geq M - \varepsilon$ sur $[c,d]$. Soit $\Xi_{[c,d]}$ la fonction caractéristique de $[c,d]$ (donc la fonction qui vaut 1 sur $[c,d]$ et 0 ailleurs). Alors

$$(M-\varepsilon)\Xi_{[c,d]} \leq f$$

sur $[a,b]$ (puisque f est positive ou nulle). Par suite

$$\begin{aligned}\int_a^b (M-\varepsilon)^n \Xi_{[c,d]}^n(x)dx &= (M-\varepsilon)^n \int_c^d dx \\ &= (M-\varepsilon)^n(d-c) \\ &\leq \int_a^b f(x)^n dx\end{aligned}$$

et donc

$$(M-\varepsilon)(d-c)^{1/n} \leq \left(\int_a^b f(x)^n dx\right)^{1/n}$$

pour tout $n \geq 1$. Il s'ensuit que

$$(M-\varepsilon)(d-c)^{1/n} \leq \left(\int_a^b f(x)^n dx\right)^{1/n} \leq M(b-a)^{1/n}$$

pour tout $n \geq 1$. On a que

$$\lim_{n\to+\infty}(d-c)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty}(b-a)^{1/n} = 1$$

et donc, pour $n \gg 1$ suffisamment grand, $(M-\varepsilon)(d-c)^{1/n} \geq M - 2\varepsilon$ et $M(b-a)^{1/n} \leq M + 2\varepsilon$. D'où:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, \left|\left(\int_a^b f(x)^n dx\right)^{1/n} - M\right| < 2\varepsilon \ .$$

Le résultat demandé suit clairement de ce que l'on vient de démontrer. □

Remarque: On définit la norme L^p d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

et la norme L^∞ par $\|f\|_{L^\infty} \sup\{|f(x)|, x \in [a,b]\}$. En appliquant l'exercice ci-dessus à la fonction $|f|$, ce que dit cet exercice c'est que

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$$

pour toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$.

Correction de l'exercice 5.10. On remarque que

$$\int_2^3 (1-f(x))\,dx = 0$$

tandis que $1-f \geq 0$. Comme $1-f$ est aussi continue, on en déduit (cf. cours) que $1-f \equiv 0$. D'où le résultat. □

Correction de l'exercice 5.11. On remarque que

$$\int_0^1 (f(x)-x)\,dx = 0$$

tandis que $x \to f(x)-x$ est continue. On ne peut avoir $f(x) > x$ pour tout x, ni $f(x) < x$ pour tout x car sinon l'intégrale précédente serait soit strictement positive, soit strictement négative. Donc il existe $x_1, x_2 \in [0,1]$ tels que $f(x_1) - x_1 \leq 0$ et $f(x_2) - x_2 \geq 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne ensuite qu'il existe $x \in [x_1, x_2]$ (ou $x \in [x_2, x_1]$ si $x_1 > x_2$) tel que $f(x) - x = 0$. C'est le point fixe recherché. □

Correction de l'exercice 5.12. Supposons pour commencer que f est en escalier. Il existe alors une subdivision $\sigma = (a_k)_{k=0,\dots,p}$ de $[a,b]$ et des réels $c_1, \dots, c_p$ tels que$f \equiv c_k$ (f est identiquement égale à c_k) sur $]a_{k-1}, a_k[$ pour tout $k = 1, \dots, p$. On a alors que

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\sin(nx)dx &= \sum_{k=1}^p c_k \int_{a_{k-1}}^{a_k} \sin(nx)dx \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{c_k}{n} \left[-\cos(nx)\right]_{a_{k-1}}^{a_k} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^p c_k \left(\cos(na_k) - \cos(na_{k-1})\right)\end{aligned}$$

et on peut ainsi écrire que

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(nx)dx\right| \leq \frac{2}{n}\sum_{k=1}^p |c_k|$$

puisque $|\cos| \leq 1$. Clairement, par encadrement (théorème des gendarmes) il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)dx = 0\ .$$

On suppose maintenant que f est Riemann intégrable sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque fixé. Il existe $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ en escalier telles que $|f - \varphi_\varepsilon| \leq \psi_\varepsilon$ sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b \psi_\varepsilon(x)dx < \varepsilon\ .$$

On a

$$|f(x)\sin(nx) - \varphi_\varepsilon(x)\sin(nx)| \leq \psi_\varepsilon(x)$$

sur $[a,b]$ puisque $|\sin| \leq 1$. On en déduit, puisque $|\int H| \leq \int |H|$, que

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(nx)dx - \int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\sin(nx)dx\right| \leq \int_a^b \psi_\varepsilon(x)dx$$

En vertue de ce qui a été démontré auparavant:

$$\exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, \left| \int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin(nx) dx \right| < \varepsilon \ .$$

On en déduit que $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b f(x) \sin(nx) dx \right| \\
&\leq \left| \int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin(nx) dx \right| + \left| \int_a^b f(x) \sin(nx) dx - \int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin(nx) dx \right| \\
&\leq \left| \int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin(nx) dx \right| + \int_a^b \psi_\varepsilon(x) dx \\
&< 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque on a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, \left| \int_a^b f(x) \sin(nx) dx \right| < \varepsilon \ ,$$

ce qui signifie que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx = 0$. □

Correction de l'exercice 5.13. (1) Pour $x \in [0, 1]$, $\frac{1}{1+x} \leq 1$. Donc

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

puisqu'on a aussi que $\frac{x^n}{1+x} \geq 0$ sur $[0, 1]$. Par encadrement (théorème des gendarmes) on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

(2) On a

$$\begin{aligned}
I_n + I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx \\
&= \int_0^1 x^n dx \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) On a que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k &= \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k \\
&= \frac{1 - (-1)^n x^n}{1+x} \\
&= \frac{1}{1+x} + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x}
\end{aligned}$$

par propriété des séries géométriques. En intégrant de 0 à 1 on obtient que

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \int_0^1 x^k dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx + (-1)^{n+1} I_n$$

et donc que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = [\ln(1+x)]_0^1 + (-1)^{n+1} I_n$$

soit encore que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n$$

En raison de (1) on trouve que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2) \ .$$

□

Correction de l'exercice 5.14. Comme f est strictement croissante elle est bijective de $[a, b]$ sur $[a, f(b)]$ (puisque $f(a) = a$). Elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} qui est elle aussi dérivable, donc en particulier continue et donc intégrable. Comme f est continue la fonction $x \to \int_a^x f(t)dt$ est dérivable (cf. cours). Comme f^{-1} est continue, la fonction

$$G : X \to \int_a^X f^{-1}(t)dt$$

est dérivable sur $[a, f(b)]$. Par composition $G \circ f$ est dérivable sur $[a, b]$ et $(G \circ f)'(x) = G'(f(x)) f'(x)$. Bien sûr, $x \to xf(x)$ est elle aussi dérivable. On en déduit que g est dérivable. On a alors, pour tout $x \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= f(x) + G'(f(x)) f'(x) - f(x) - xf'(x) \\ &= f(x) + f^{-1}(f(x)) f'(x) - f(x) - xf'(x) \end{aligned}$$

et donc $g'(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$. On en déduit quye g est constante sur $[a, b]$. On a $g(a) = -af(a) = -a^2$. On en déduit que $g(x) = -a^2$ pour tout $x \in [a, b]$. □

Correction de l'exercice 5.15. Par Chasles,

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx \ . \qquad (\star)$$

On considère la fonction $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $\varphi(x) = -x$. On a $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = -1$. La formule de changement de variable dans les intégrales permet d'écrire que

$$\begin{aligned} \int_0^{-1} f(x)dx &= \int_0^1 f(\varphi(x)) \varphi'(x)dx \\ &= -\int_0^1 f(-x)dx \\ &= \int_0^1 f(x)dx \end{aligned}$$

puisque $\varphi'(x) = -1$ et puisque f est impaire. Comme $\int_0^{-1} = -\int_{-1}^0$ on en déduit que

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = -\int_0^1 f(x)dx$$

Par suite, en revenant à $(\star)$, $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$. $\square$

Correction de l'exercice 5.16. On reconnait

$$(\cos(x))^{2540}\sin(x) = \frac{-1}{2541}\frac{d}{dx}(\cos(x))^{2541} \quad .$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2} (\cos(x))^{2540}\sin(x)dx \\
&= \frac{-1}{2541}\left[(\cos(x))^{2541}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{2541}
\end{aligned}$$

De façon plus générale, si F est une primitive de f (donc $F' = f$, comme ici $\frac{1}{2541}X^{2541}$ est une primitive de X^{2540}) alors $x \to -F\big(\cos(x)\big)$ est une primitive de $x \to f\big(\cos(x)\big)\sin(x)$ et $x \to F\big(\sin(x)\big)$ est une primitive de $x \to f\big(\sin(x)\big)\cos(x)$. Il faut apprendre à reconnaître ce genre de primitives. $\square$

Correction de l'exercice 5.17. On intègre par parties. On pose $u(x) = x$, $v'(x) = \sin(x)$. Alors $u'(x) = 1$ et on peut prendre $v(x) = -\cos(x)$. La formule d'intégration par parties donne alors

$$\int_0^{\pi/2} x\sin(x)dx = -\left[x\cos(x)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos(x)dx$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2} x\sin(x)dx \\
&= \int_0^{\pi/2}\cos(x)dx \\
&= [\sin(x)]_0^{\pi/2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\square$

Correction de l'exercice 5.18. La fonction $t \to \tan(t)$ est C^1 de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$ (c'est même une bijection strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$). On a

$$\tan'(t) = 1 + \tan^2(t)$$

et $\tan(0) = 0$, $\tan(\pi/4) = 1$. La formule de changement de variable dans les intégrales permet d'écrire que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\left(1+\tan^2(t)\right)^2}\tan'(t)dt \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\tan^2(t)}dt \\
&= \int_0^{\pi/4} \cos^2(t)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \left(1+\cos(2t)\right)dt \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\left[\sin(2t)\right]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

□

Correction de l'exercice 5.19. On intègre par parties. On pose $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = 1$. On a alors $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\int \ln(t)dt &= x\ln(x) - x \\
&= x\left(\ln(x) - 1\right) .
\end{aligned}$$

□

Correction de l'exercice 5.20. On intègre par parties. On pose $u(x) = \arctan(x)$ et $v'(x) = 1$. On a alors $u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $v(x) = x$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\int \arctan(t)dt &= x\arctan(x) - \int \frac{t}{1+t^2}dt \\
&= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) .
\end{aligned}$$

□

Correction de l'exercice 5.21. Soit $\varphi(x) = a+b-x$. Cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On a $\varphi(a) = b$ et $\varphi(b) = a$. La formule de changement de variables permet décrire que

$$\int_b^a xf(x)dx = \int_a^b \varphi(x)f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx$$

Puisque $\varphi'(x) = -1$, et puisque $f(a+b-x) = f(x)$, on trouve donc

$$\begin{aligned}\int_a^b xf(x)dx &= -\int_b^a xf(x)dx \\ &= \int_a^b (a+b-x)f(a+b-x)dx \\ &= \int_a^b (a+b-x)f(x)dx \\ &= (a+b)\int_a^b f(x)dx - \int_a^b xf(x)dx\ .\end{aligned}$$

Par suite,

$$2\int_a^b xf(x)dx = (a+b)\int_a^b f(x)dx$$

ce qui est le résultat demandé. Soit maintenant $f(x) = \cos^4(x)\sin(x)$. Alors $f(\pi - x) = f(x)$. Donc

$$\begin{aligned}I &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos^4(x)\sin(x)dx \\ &= -\frac{\pi}{10}\left[\cos^5(x)\right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{5}\ .\end{aligned}$$

□

Correction de l'exercice 5.22. On a clairement que $f \leq g$ sur $[0,1]$ puisque $x \geq x^2$ sur $[0,1]$. L'aire en question n'est donc rien d'autre que

$$\begin{aligned}A &= \int_0^1 g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \\ &= \frac{1}{2}[x^4]_0^1 + \frac{1}{2}[x^2]_0^1 + 1 - \frac{1}{3}[x^3]_0^1 - 1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3}\ .\end{aligned}$$

□

Correction de l'exercice 5.23. Il y a une symétrie par rapport à l'axe des x. Si A est l'aire demandée alors A vaut le double de l'aire comprise entre l'axe des x et la courbe de l'ellipse située dans le demi-plan $y \geq 0$. Cette courbe dans le demi-plan supérieur est le graphe sur $[-a,a]$ de la fonction

$$f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Donc

$$A = 2b\int_{-a}^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx$$

et toujours pour des raisons de symétrie on a même que

$$A = 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$

Soit $\phi(x) = a\cos(x)$. Cette fonction est C^1 et $\varphi(0) = a$, $\varphi(\pi/2) = 0$. Par changement de variables, et puisque $\varphi'(x) = -a\sin(x)$,

$$\begin{aligned}
\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx &= -\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi/2)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx \\
&= a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos^2(x)} \sin(x) dx \\
&= a \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx \ .
\end{aligned}$$

On utilise l'identité $2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$ et on obtient que

$$\begin{aligned}
\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx &= \frac{a}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(2x))\, dx \\
&= \frac{a\pi}{4} - \frac{a}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(2x) dx \\
&= \frac{a\pi}{4} - \frac{a}{4} [\sin(2x)]\, 0^{\pi/2} \\
&= \frac{a\pi}{4}
\end{aligned}$$

Par suite, $A = ab\pi$. □

Correction de l'exercice 5.24. (1) Le degré du numérateur est inférieur au degré du numérateur. Il n'y a donc pas de partie entière de la fraction. La fraction est clairement irréductible. Du théorème de décomposition on tire qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{X}{(X+1)(X-2)} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-2} \ . \tag{$\star$}$$

Si on multiplie cette égalité par $X + 1$, on obtient

$$\frac{X}{X-2} = a + \frac{b(X+1)}{X-2} \ .$$

En prenant ensuite $X = -1$ on obtient que $a = \frac{1}{3}$. On multiplie maintenant $(\star)$ par $X - 2$. On obtient

$$\frac{X}{X+1} = \frac{a(X-2)}{X+1} + b \ .$$

En prenant $X = 2$ on obtient que $b = \frac{2}{3}$. Au final

$$\frac{X}{(X+1)(X-2)} = \frac{1}{3(X+1)} + \frac{2}{3(X-2)}$$

est la décomposition en éléments simples de F.

(2) Le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur. Il faut effectuer la division polynomiale du numérateur par le dénominateur. On a clairement

$(X+1)(X-2) = X^2 - X - 2$. Ensuite

$$\begin{aligned} X^3 &= X(X^2 - X - 2) + X^2 + 2X \\ &= X(X^2 - X - 2) + (X^2 - X - 2) + 3X + 2 \\ &= (X+1)(X^2 - X - 2) + 3X + 2 \end{aligned}$$

et degré$(3X+2) = 1 < 2 =$ degré$(X^2 - X - 2)$. La partie entière de G est donc $X+1$. On a

$$G(X) = X + 1 + \frac{3X+2}{(X+1)(X-2)} \ .$$

Ni -1 ni 2 n'annulent $3X+2$. La fraction du membre de droite ci-dessus est donc bien irréductible. Du théorème de décomposition on tire qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{3X+2}{(X+1)(X-2)} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-2} \ . \qquad (\star)$$

On multiplie par $X+1$ on obtient

$$\frac{3X+2}{X-2} = a + \frac{b(X+1)}{X-2} \ .$$

On prend $X = -1$. On obtient que $a = \frac{1}{3}$. On multiplie maintenant $(\star)$ par $X-2$. On obtient

$$\frac{3X+2}{X+1} = \frac{a(X-2)}{X+1} + b \ .$$

En prenant $X = 2$ on obtient que $b = \frac{8}{3}$. Au final,

$$G(X) = X + 1 + \frac{1}{3(X+1)} + \frac{8}{3(X-2)}$$

est la décomposition en éléments simples de G.

(3) Le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur. Il faut effectuer la division polynomiale du numérateur par le dénominateur. On a

$$\begin{aligned} (X-1)^2(X+1) &= (X^2 - 2X + 1)(X+1) \\ &= X^3 - X^2 - X + 1 \end{aligned}$$

et ensuite

$$\begin{aligned} &X^4 - X + 2 \\ &= X(X^3 - X^2 - X + 1) + X^3 + X^2 - 2X + 2 \\ &= X(X^3 - X^2 - X + 1) + (X^3 - X^2 - X + 1) + 2X^2 - X + 1 \\ &= (X+1)(X^3 - X^2 - X + 1) + 2X^2 - X + 1 \end{aligned}$$

et degré$(2X^2 - X + 1) = 2 < 3 =$ degré$(X^3 - X^2 - X + 1)$. La partie entière de G est donc $X+1$. On a alors

$$H(X) = X + 1 + \frac{2X^2 - X + 1}{(X-1)^2(X+1)} \ .$$

Ni 1 ni -1 n'annulent $2X^2 - X + 1$. La fraction du membre de droite ci-dessus est donc bien irréductible. Du théorème de décomposition on tire qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{2X^2 - X + 1}{(X-1)^2(X+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} \ . \qquad (\star)$$

On multiplie par $(X-1)^2$. On obtient que

$$\frac{2X^2-X+1}{X+1}=a(X-1)+b+\frac{c(X-1)^2}{X+1}$$

puis on prend $X=1$. On obtient que $b=1$. On multiplie $(\star)$ par $X+1$. On obtient que

$$\frac{2X^2-X+1}{(X-1)^2}=\frac{a(X+1)}{X-1}+\frac{b(X+1)}{(X-1)^2}+c\ .$$

On prend $X=-1$. On obtient que $c=1$. On multiplie $(\star)$ par X. On obtient que

$$\frac{2X^3-X^2+X}{(X-1)^2(X+1)}=\frac{aX}{X-1}+\frac{bX}{(X-1)^2}+\frac{cX}{X+1}$$

puis on fait tendre $X\to+\infty$. Alors $2=a+c$, et comme $c=1$ c'est que $a=1$. Au final

$$H(X)=X+1+\frac{1}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{1}{X+1}$$

est la décomposition en éléments simples de H. □

Correction de l'exercice 5.25. **(1)** La fonction $x\to\frac{f(x)}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Donc F est dérivable. De plus

$$F'(x)=\frac{f(x)}{x^2}$$

pour $x>1$. Ainsi, en vertue de l'hypothèse faite sur f,

$$\begin{aligned}F'(x)&\leq\frac{a}{x^2}\int_1^x\frac{f(t)}{t^2}dt+\frac{b}{x^2}\\&\leq\frac{a}{x^2}F(x)+\frac{b}{x^2}\end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité demandée.

(2) On a, en vertue de l'inégalité précédente,

$$\begin{aligned}G'(x)&=F'(x)e^{\frac{a}{x}}-\frac{a}{x^2}F(x)e^{\frac{a}{x}}\\&\leq\frac{a}{x^2}F(x)e^{\frac{a}{x}}+\frac{b}{x^2}e^{\frac{a}{x}}-\frac{a}{x^2}F(x)e^{\frac{a}{x}}\\&\leq\frac{b}{x^2}e^{\frac{a}{x}}\end{aligned}$$

ce qui est là encore l'inégalité demandée.

(3) Avec le changement de variable $s=\frac{1}{t}$ on a que $ds=\frac{-1}{t^2}dt$ et donc

$$\begin{aligned}\int_1^x\frac{1}{t^2}e^{\frac{a}{t}}dt&=\int_{1/x}^1e^{as}ds\\&=\frac{1}{a}\left(e^a-e^{\frac{a}{x}}\right)\end{aligned}$$

pour $x>1$.

(4) On a $G(1) = 0$. On tire alors de (2) et (3) que

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_1^x G'(t)dt \\ &\leq b \int_1^x \frac{1}{t^2} e^{\frac{a}{t}} dt \\ &\leq \frac{b}{a}\left(e^a - e^{\frac{a}{x}}\right) \end{aligned}$$

pour $x > 1$.

(5) Comme $G(x) = F(x)e^{\frac{a}{x}}$ on obtient avec la question précédente que

$$\begin{aligned} F(x) &= G(x)e^{-\frac{a}{x}} \\ &\leq \frac{b}{a}\left(e^a - e^{\frac{a}{x}}\right) e^{-\frac{a}{x}} \\ &\leq \frac{b}{a}\left[e^{\left(a - \frac{a}{x}\right)} - 1\right] \end{aligned}$$

pour $x > 1$. L'inégalité se prolonge par continuité à $x = 1$. □

Correction de l'exercice 5.26. **(1)** Le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur. Il n'y a pas de partie entière. La fraction est clairement irréductible. Le domaine de définition de F est $\mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 2\}$. Le théorème de décomposition des fractions rationnelles donne l'existence de $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$F(X) = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-2} \ . \qquad (\star)$$

Si on multiplie $(\star)$ par X puis on prend ensuite $X = 0$, on obtient que $a = -1/2$. Si on multiplie $(\star)$ par $X + 1$ et on prend ensuite $X = -1$, on trouve $b = 1/3$. Si on multiplie $(\star)$ par $X - 2$ et on prend ensuite $X = 2$ on trouve $c = 1/6$. Donc

$$F(X) = \frac{-1}{2X} + \frac{1}{3(X+1)} + \frac{1}{6(X-2)} \ .$$

Une primitive de F est alors donnée par

$$\begin{aligned} \int F &= \frac{-1}{2} \ln|X| + \frac{1}{3} \ln|X+1| + \frac{1}{6} \ln|X-2| \\ &= \ln \frac{1}{\sqrt{|X|}} + \ln \sqrt[3]{|X+1|} + \ln \sqrt[6]{|X-2|} \\ &= \ln \frac{\sqrt[3]{|X+1|}\,\sqrt[6]{|X-2|}}{\sqrt{|X|}} \ . \end{aligned}$$

(2) Le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur. Il n'y a pas de partie entière. La fraction est clairement irréductible. Le domaine de définition de G est $\mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$. Le théorème de décomposition des fractions rationnelles donne l'existence de réels $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$G(X) = \frac{a}{X^2} + \frac{b}{X} + \frac{c}{(X+1)^2} + \frac{d}{X+1} \ . \qquad (\star)$$

Si on multiplie $(\star)$ par X^2 puis on prend ensuite $X = 0$, on obtient que $a = 1$. Si on multiplie $(\star)$ par $(X+1)^2$ puis on prend ensuite $X = -1$, on obtient que $c = 1$.

En multipliant $(\star)$ par X et en faisant tendre $X \to +\infty$ on trouve que $b+d=0$. Mais alors

$$\frac{b}{X}+\frac{d}{X+1}=\frac{b}{X(X+1)}$$

et si maintenant on multiplie $(\star)$ par X^2 et fait tendre $X \to +\infty$ on trouve que $a+b+c=0$. Comme $a=c=1$, c'est que $b=-2$ et que $d=2$. Donc

$$G(X)=\frac{1}{X^2}-\frac{2}{X}+\frac{1}{(X+1)^2}+\frac{2}{X+1}\ .$$

Une primitive de G est alors donnée par

$$\begin{aligned}\int G &= \frac{-1}{X}-2\ln|X|-\frac{1}{X+1}+2\ln|X+1| \\ &= -\frac{2X+1}{X(X+1)}-\ln X^2+\ln(X+1)^2 \\ &= -\frac{2X+1}{X(X+1)}+\ln\frac{(X+1)^2}{X^2}\ .\end{aligned}$$

□

Correction de l'exercice 5.27. **(1)** Le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur. Il y a donc une partie entière. Il faut effectuer la division polynomiale du numérateur par le dénominateur. On a

$$\begin{aligned}X^5+X^4+2 &= X^2(X^3-X)+X^4+X^3+2 \\ &= X^2(X^3-X)+X(X^3-X)+X^3+X^2+2 \\ &= X^2(X^3-X)+X(X^3-X)+(X^3-X)+X^2+X+2 \\ &= (X^2+X+1)(X^3-X)+X^2+X+2\end{aligned}$$

et le degré de X^2+X+2 est bien strictement inférieur au degré de X^3-X. Donc

$$F(X)=X^2+X+1+\frac{X^2+X+2}{X^3-X}\ .$$

On a $X^3-X=X(X^2-1)=X(X-1)(X+1)$. Ni 0, ni -1 ni 1 n'annulent X^2+X+2. La fraction est donc irréductible et le domaine de définition de F est $\mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$. Le théorème de décomposition des fractions rationnelles donne qu'il existe $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned}\frac{X^2+X+2}{X^3-X} &= \frac{X^2+X+2}{X(X-1)(X+1)} \\ &= \frac{a}{X}+\frac{b}{X-1}+\frac{c}{X+1}\end{aligned}$$

Si on multiplie cette identié par X et on prend ensuite $X=0$, on trouve que $a=-2$. Si on multiplie l'identité par $X-1$ et ensuite on prend $X=1$, on trouve que $b=2$. Si on multiplie l'identité par $X+1$ et ensuite on prend $X=-1$, on trouve que $c=1$. Donc

$$F(X)=X^2+X+1-\frac{2}{X}+\frac{2}{X-1}+\frac{1}{X+1}\ .$$

Une primitive de F est alors donnée par

$$\begin{aligned}\int F &= \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{2}X^2 + X - 2\ln|X| + 2\ln|X-1| + \ln|X+1| \\ &= \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{2}X^2 + X + \ln\frac{(X-1)^2|X+1|}{X^2} .\end{aligned}$$

(2) Le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur. Il n'y a pas de partie entière. Ni 1 ni -1 n'annulent le numérateur. La fraction est irréductible. Le domaine de définition de G est $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. Le théorème de décomposition des fractions rationnelles donne qu'il existe $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que

$$G(X) = \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{X+1} . \qquad (\star)$$

Si on multiplie $(\star)$ par $(X-1)^3$, et ensuite on prend $X=1$, on trouve que $a = \frac{3}{2}$. Si on mulitplie $(\star)$ par $X+1$, et ensuite on prend $X=-1$, on trouve que $d = \frac{1}{8}$. Si on multiplie $(\star)$ par X et ensuite on fait tendre $X \to +\infty$, on trouve que $1 = c+d$. Donc $c = \frac{7}{8}$. Si on réduit le membre de droite de $(\star)$ au même dénominateur et que l'on se concentre uniquement sur les termes constants du numérateur ainsi obtenu on obtient par assimilation que $1 = a - b + c - d$ et donc

$$b = \frac{3}{2} + \frac{7}{8} - \frac{1}{8} - 1 = \frac{5}{4} .$$

Donc

$$G(X) = \frac{3}{2(X-1)^3} + \frac{5}{4(X-1)^2} + \frac{7}{8(X-1)} + \frac{1}{8(X+1)} .$$

Une primitive de G est alors donnée par

$$\int G = -\frac{3}{4(X-1)^2} - \frac{5}{4(X-1)} + \frac{7}{8}\ln|X-1| + \frac{1}{8}\ln|X+1| .$$

□

Correction de l'exercice 5.28. **(1)** Posons $Y = X^2$. Alors $P(X) = Q(Y)$, où Q est le polynôme du second degré $Q(Y) = Y^2 - 3Y - 4$. Le discriminant de Q est $\Delta = 25$. Les racines de Q sont $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{\Delta})$, soit -1 et 4. La racine -1 est impossible pour $Y = X^2$ mais 4 donne deux racines pour P qui sont -2 et 2. Donc P se factorise en

$$P(X) = (X-2)(X+2)R(X) ,$$

où R est un polynôme réel de degré 2. En écrivant maintenant que $R(X) = aX^2 + bX + c$, on a que

$$X^2 - 3X^2 - 4 = (X^2-4)(aX^2 + bX + c) .$$

En comparant les termes en X^4 on voit que nécessairement $a = 1$. En comparant les termes constants on voit que nécessairement $c = 1$. Si l'on compare les termes en X on trouve que $b = 0$. Au final on trouve que $P(X) = (X-2)(X+2)(X^2+1)$. Le polynôme réel X^2+1 est sans racines réelles.

(2) Le degré du numérateur de H est supérieur au degré du dénominateur de H. Il y a donc une partie entière. On effectue la division polynomiale du du numérateur de H par le dénominateur de H. On a

$$X^5 - 1 = X(X^4 - 3X^2 - 4) + 3X^3 + 4X - 1$$

et comme le degré de $3X^3+4X-1$ est strictement inférieur au degré de X^4-3X^2-4, on a bien obtenu le quotient et le reste de la division polynomiale du du numérateur de H par le dénominateur de H. On a donc

$$H(X) = X + \frac{3X^3+4X-1}{X^4-3X^2-4} \ .$$

Ni 2, ni -2 ni i n'annulent X^5-1. La fraction dans le membre de droite ci-dessus est donc irréductible. Le théorème de décomposition des fractions rationnelles donne qu'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned}\frac{3X^3+4X-1}{X^4-3X^2-4} &= \frac{3X^3+4X-1}{(X-2)(X+2)(X^2+1)} \\ &= \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X+2} + \frac{cX+d}{X^2+1} \ .\end{aligned}$$

On multiplie cette identité par $X-2$ et ensuite on prend $X=2$. On trouve que $a = \frac{31}{20}$. On multiplie l'identité par $X+2$ et ensuite on prend $X=-2$. On trouve que $b = \frac{33}{20}$. On multiplie l'identité par X et ensuite on fait tendre $X \to +\infty$. On trouve que $a+b+c = 3$. Donc $c = \frac{-1}{5}$. Enfin, si on réduit au mème dénominateur le membre de droite de l'identité et que l'on se concentre uniquement sur les termes constants du numérateur ainsi obtenu on obtient par assimilation que $2a-2b-4d = -1$ et donc

$$4d = 1 + \frac{31}{10} - \frac{33}{10} = \frac{4}{5}$$

de sorte que $d = \frac{1}{5}$. Ainsi

$$H(X) = X + \frac{31}{20(X-2)} + \frac{33}{20(X+2)} - \frac{X-1}{5(X^2+1)}$$

et il s'agit là de la décomposition de H en éléments simples.

(3) Le domaine de définition de H est $\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$. On écrit la décomposition précédente sous la forme

$$H(X) = X + \frac{31}{20(X-2)} + \frac{33}{20(X+2)} - \frac{2X}{10(X^2+1)} + \frac{1}{5(X^2+1)} \ .$$

Sachant que X est la dérivée de $\frac{1}{2}(X^2+1)$ on obtient comme primitive

$$\int H = \frac{1}{2}X^2 + \frac{31}{20}\ln|X-2| + \frac{33}{20}\ln|X+2| - \frac{1}{10}\ln(X^2+1) + \frac{1}{5}\arctan(X) \ .$$

$\square$

Correction de l'exercice 5.29. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc localement intégrable sur $\mathbb{R}$. L'intégrale est généralisée en $+\infty$ uniquement. On a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \ .$$

Comme $1 \neq 0$, l'intégrale est divergente. $\square$

Correction de l'exercice 5.30. On pose $x = \sqrt{t}$. On a alors $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$ et par changement de variables on obtient que

$$\begin{aligned} I_a^b &= 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} e^{-x}dx \\ &= -2\left[e^{-x}\right]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \\ &= -2e^{-\sqrt{b}} + 2e^{-\sqrt{a}} \end{aligned}$$

On aurait aussi pu dès le début reconnaitre que

$$\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}} = -2\left(e^{-\sqrt{t}}\right)' \ .$$

La fonction $x \to \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Elle a une limite infinie en 0^+. L'intégrale est donc généralisée à la fois en 0 et en $+\infty$. La convergence en 0 revient à dire que I_a^b a une limite finie lorsque $a \to 0^+$ (b étant fixé). La convergence en $+\infty$ revient à dire que I_a^b a une limite finie lorsque $b \to +\infty$ (a étant fixé). L'expression calculée pour I_a^b nous dit que c'est bien le cas:

$$\lim_{a\to 0^+} I_a^1 = -\frac{2}{e} + 2 \text{ et } \lim_{b\to+\infty} I_1^b = \frac{2}{e} \ .$$

On a alors

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a\to 0^+} I_a^1 + \lim_{b\to+\infty} I_1^b \\ &= -\frac{2}{e} + 2 + \frac{2}{e} \\ &= 2 \ . \end{aligned}$$

□

Correction de l'exercice 5.31. On intègre par parties:

$$u = \ln(t) \quad , \quad u' = \frac{1}{t}$$

$$v' = \frac{1}{t^4} \quad , \quad v = \frac{-1}{3t^3}$$

On a alors

$$\begin{aligned} I_x &= -\frac{1}{3}\left[\frac{\ln(t)}{t^3}\right]_1^x + \frac{1}{3}\int_1^x \frac{1}{t^4}dt \\ &= -\frac{1}{3}\left[\frac{\ln(t)}{t^3}\right]_1^x - \frac{1}{9}\left[\frac{1}{t^3}\right]_1^x \\ &= -\frac{1}{3}\frac{\ln(x)}{x^3} - \frac{1}{9x^3} + \frac{1}{9} \ . \end{aligned}$$

L'intégrale I est généralisée en $+\infty$. Par définition elle est convergente si I_x a une limite finie lorsque $x \to +\infty$ et, dans ce cas, cette limite est sa valeur. Clairement I_x a une limite lorsque $x \to +\infty$ et cette limite vaut $\frac{1}{9}$. Donc I est convergente et $I = \frac{1}{9}$. □

Correction de l'exercice 5.32. **(1)** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^5+1} \ .$$

La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$. L'intégrale I_1 est généralisée en $+\infty$. On a

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 f(x) = 1 \ .$$

Comme $3 > 1$, le critère de Riemann donne que I_1 est convergente.

(2) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+5} \ .$$

La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$. L'intégrale I_2 est généralisée en $+\infty$. On a

$$\lim_{x \to +\infty} x f(x) = 2 \ .$$

Comme $1 \leq 1$, le critère de Riemann donne que I_2 est divergente.

(3) Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{\cos(x)\sin(x)}{x^2} \ .$$

La fonction f est continue et positive sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. L'intégrale I_3 est généralisée en 0. On a

$$\lim_{x \to 0^+} x f(x) = 1 \ .$$

Comme $1 \geq 1$, le critère de Riemann donne que I_3 est divergente.

(4) Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x}(3x^2+1)} \ .$$

La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}^{+\star} =]0, +\infty[$. L'intégrale I_4 est généralisée en 0 et en $+\infty$. On a

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} f(x) = 3 \ .$$

Comme $\frac{1}{2} < 1$, le critère de Riemann donne que I_4 est convergente en 0. On a encore

$$\lim_{x \to +\infty} x^{3/2} f(x) = \frac{2}{3} \ .$$

Comme $\frac{3}{2} > 1$, le critère de Riemann donne que I_4 est convergente en $+\infty$. Comme I_4 est convergente à la fois en 0 et en $+\infty$ elle est convergente. $\square$

Correction de l'exercice 5.33. La fonction f à intégrer est continue. Par suite l'intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$. On a

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 |f(x)| = 0$$

car $|\sin| \leq 1$ et l'exponentielle l'emporte sur toutes les puissances. Le critère de Riemann, puisque $2 > 1$, permet de conclure que $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx$ est convergente. Donc I est absolument convergente. En particulier, I est bien convergente. $\square$

Correction de l'exercice 5.34. La fonction $f(x) = \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^a}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$. Elle se prolonge par continuité en 0 car elle a une limite lorsque $x \to 0^+$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^a} = 0 \ .$$

L'intégrale généralisée I_a n'est donc généralisée qu'en $+\infty$. On a

$$\lim_{x\to+\infty} x^{2a-1}\frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^a} = +\infty$$

Si $2a-1 \leq 1$, soit $a \leq 1$, le critère de Riemann donne que I_a diverge. Supposons maintenant $a > 1$. On écrit $a = 1+b$ avec $b > 0$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^a} &\leq \frac{\ln(x)}{x^{2a-1}}\\ &= \frac{\ln(x)}{x^{1+2b}}\end{aligned}$$

et on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1+b}\frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^a} = 0\ .$$

Comme $1+b > 1$, le critère de Riemann donne que cette fois-ci I_a converge. Donc I_a est convergente si et seulement si $a > 1$. □

Correction de l'exercice 5.35. **(1)** Supposons qu'il existe $c \geq 0$ pour lequel $f(c) < 0$. Par décroissance $f(x) \leq f(c)$ pour $x \geq c$. Mais alors, pour $x > c$,

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)dt &= \int_0^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt\\ &\leq \int_0^c f(t)dt + xf(c)\end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt = -\infty$$

puisque $f(c) < 0$, ce qui contredit la convergence supposée de l'intégrale. Il n'existe donc pas de $c \geq 0$ tel que $f(c) < 0$. C'est donc que f est positive ou nulle. Comme f est décroissante et positive, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe. Par théorème de cours laz convergnec de l'intégrale entraîne que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(2) On a

$$\int_{x/2}^x f(t)dt = \int_0^x f(t)dt - \int_0^{x/2} f(t)dt$$

et puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge, on peut écrire que

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\int_0^{x/2} f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt$$

(le $x/2$ ne change rien, il s'agit toujours d'une quantité qui tend vers $+\infty$). Par suite,

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{x/2}^x f(t)dt = 0\ .$$

Par décroissance et positivité de f,

$$0 \leq f(x)\int_{x/2}^x dt \leq \int_{x/2}^x f(t)dt$$

et donc

$$0 \leq \frac{x}{2} f(x) \leq \int_{x/2}^{x} f(t)dt \ .$$

On en déduit (théorème des gendarmes en continu) que $\lim_{x \to +\infty} x f(x) = 0$. $\square$

Correction de l'exercice 5.36. Pour $a > \frac{1}{2}$ on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz (vue en algèbre bilinéaire par exemple, et que l'on applique au produit scalaire $\int fg$). On a

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^x f(t)dt \right| &= \left| \int_0^x 1 \times f(t)dt \right| \\
&\leq \sqrt{\int_0^x 1dt} \sqrt{\int_0^x f(t)^2 dt} \\
&\leq \sqrt{x} \sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt} \\
&= x^{1/2} \sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt}
\end{aligned}$$

puisque $f^2 \geq 0$, ce qui permet d'écrire que $\int_0^x f(t)^2 dt \leq \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$ pour tout x. Par suite on récupère bien que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^a} \int_0^x f(t)dt = 0$$

pour tout $a > \frac{1}{2}$. Pour $a = \frac{1}{2}$ il faut être un peu plus malin. On va appliquer Cauchy-Schwarz non plus entre 0 et x mais entre a et x pour $a > 0$. Pour $x > a$ on a que

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^x f(t)dt \right| &= \left| \int_0^a f(t)dt + \int_a^x f(t)dt \right| \\
&\leq \left| \int_0^a f(t)dt \right| + \sqrt{\int_a^x 1dt} \sqrt{\int_a^x f(t)^2 dt} \\
&\leq \left| \int_0^a f(t)dt \right| + \sqrt{x-a} \sqrt{\int_a^{+\infty} f(t)^2 dt} \ .
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $R_1 > 0$ tel que pour $x > R_1$,

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \left| \int_0^a f(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

On a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}} = 1$$

et donc il existe aussi $R_2 > 0$ tel que pour $x > R_2$,

$$\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}} \leq 2 \ .$$

Enfin, comme $\int_0^{+\infty} f(x)^2 dx$ est convergente, il existe $a > 0$ (suffisamment grand) tel que

$$\int_a^{+\infty} f(t)^2 dt < \frac{\varepsilon^2}{16} .$$

On fixe un tel a. Soit $R = \max(R_1, R_2, a)$. Pour $x > R$ on a alors que

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x f(t)dt\right| &< \frac{\varepsilon}{2} + 2\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{16}}\\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\\ &= \varepsilon .\end{aligned}$$

On a ainsi montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0 \ / \ \forall x > R, \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x f(t)dt\right| < \varepsilon$$

ce qui revient à dire que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x f(t)dt = 0 .$$

La relation reste donc vraie pour $a = \frac{1}{2}$. $\square$

Correction de l'exercice 5.37. **(1)** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 2}{3x^4 + 1} .$$

La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$. L'intégrale I_1 est généralisée en $+\infty$. On a

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \frac{2}{3} .$$

Comme $2 > 1$, le critère de Riemann donne que I_1 est convergente.

(2) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3}{5x^4 + 2x^2 + 1} .$$

La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$. L'intégrale I_2 est généralisée en $+\infty$. On a

$$\lim_{x\to+\infty} x f(x) = \frac{2}{5} .$$

Comme $1 \leq 1$, le critère de Riemann donne que I_2 est divergente.

(3) Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{(1 - \cos(x))\sin^2(x)}{x^5} .$$

La fonction f est continue sur $]0, \pi]$ et positive sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. L'intégrale I_3 est généralisée en 0. On a

$$\lim_{x\to 0^+} x f(x) = \frac{1}{2} .$$

Comme $1 \geq 1$, le critère de Riemann donne que I_3 est divergente.

(4) Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{5x^2+3}{\sqrt{x}(3x^3+2x+1)} \ .$$

La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}^{+\star} =]0, +\infty[$. L'intégrale I_4 est généralisée en 0 et en $+\infty$. On a

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} f(x) = 3 \ .$$

Comme $\frac{1}{2} < 1$, le critère de Riemann donne que I_4 est convergente en 0. On a encore

$$\lim_{x \to +\infty} x^{3/2} f(x) = \frac{5}{3} \ .$$

Comme $\frac{3}{2} > 1$, le critère de Riemann donne que I_4 est convergente en $+\infty$. Comme I_4 est convergente à la fois en 0 et en $+\infty$ elle est convergente. □

Correction de l'exercice 5.38. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc localement intégrable sur $\mathbb{R}$. L'intégrale est généralisée en $+\infty$ uniquement. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2-4}{x^4+1} + \frac{(x^4+1)-1}{1+x^4} \sin(x) \\ &= \frac{x^2-4}{x^4+1} + \sin(x) - \frac{1}{1+x^4} \sin(x) \ . \end{aligned}$$

On a

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \times \frac{x^2-4}{x^4+1} = 1$$

et la fonction $\frac{x^2-4}{x^4+1}$ est positive pour $x \geq \sqrt{2}$. Donc, en vertue du critère de Riemann, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{x^2-4}{x^4+1} dx$ est convergente. En, d'autres termes,

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{x^2-4}{x^4+1} dx \text{ existe et est finie .}$$

De même,

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \times \frac{|\sin(x)|}{1+x^4} dx = 0$$

et donc, en vertue du critère de Riemann, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{1+x^4} dx$ est absolument convergente, donc aussi convergente. Là encore, en, d'autres termes,

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{\sin(x)}{1+x^4} dx \text{ existe et est finie .}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \int_0^A f(x) dx &= H(A) - [\cos(x)]_0^A \\ &= H(A) + 1 - \cos(A) \ , \end{aligned}$$

où H est telle que $\lim\limits_{A \to +\infty} H(A)$ existe et est finie. La fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$ puisque $\cos(2k\pi) = 1$ et $\cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0$ pour tout k entier, tandis que $2k\pi \to +\infty$ et $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \to +\infty$ lorsque $k \to +\infty$. Donc

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A f(x) dx \text{ n'existe pas .}$$

On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est divergente. $\square$

CORRECTION DE L'EXERCICE 5.39. La fonction f est continue et positive sur $]1,+\infty[$. Si $a>1$, I_a est généralisée en $+\infty$ est uniquement en $+\infty$. Soit

$$g(x)=\frac{1}{x\ln^2(x)}\ .$$

On a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{5}{2}\ .$$

Les intégrales $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ sont donc de même nature. Or $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ est une intégrale de Bertrand convergente. Donc $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge. Supposons maintenant $a=1$. L'intégrale est alors généralisée en 1 et en $+\infty$. En $+\infty$ il y a convergence comme déjà dit. Reste à étudier la convergence en 1 et donc la convergence de $\int_1^{1+\eta} f(x)dx$ pour un $\eta>0$ fixé. Soit

$$\varphi(x)=\frac{5x^4+x^2+2}{2x^5+7}\ .$$

Clairement, puisque φ est continue en 1, et puisque $\varphi(1)=\frac{8}{9}$, $\varphi(x)\geq\frac{4}{9}$ pour x proche de 1. On a alors que

$$f(x)\geq\frac{4}{9\ln^2(x)}$$

pour x proche de 1, par exemple sur $[1,1+\eta]$ pour un $\eta>0$ fixé petit. En posant $x=1+u$,

$$\int_1^{1+\eta}\frac{1}{\ln^2(x)}dx=\int_0^{\eta}\frac{1}{\ln^2(1+u)}du$$

Le développement limité de $\ln(1+u)$ en 0 donne que

$$\lim_{u\to 0}u^2\frac{1}{\ln^2(1+u)}=1\ .$$

Du critère de Riemann on tire alors que $\int_0^{\eta}\frac{1}{\ln^2(1+u)}du$ est divergente. Donc I_1 est divergente. $\square$

CORRECTION DE L'EXERCICE 5.40. Soit $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$. On a

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\ .$$

Donc $f'(x)\leq 0$ sur $[1,+\infty[$, en particulier $f'(x)\leq 0$ sur $[\pi,+\infty[$. On a ainsi que f est continue, positive et décroissante sur $[\pi,+\infty[$. De plus, clairement,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0\ .$$

La fonction $g=\sin$ est continue sur $[\pi,+\infty[$ et, pour tout $x>1$,

$$\begin{aligned}\left|\int_\pi^x g(t)dt\right| &= |[\cos(t)]_\pi^x| \\ &= |\cos(x)+1| \\ &\leq 2\end{aligned}$$

Le critère d'Abel permet de conclure que I est convergente. Pour étudier l'absolue convergence de I on commence par remarquer que

$$f(x) \geq \frac{1}{2x}$$

pour $x \geq 1$, puisque $x^2 \geq 1$ pour $x \geq 1$. On a donc aussi que $f(x) \geq \frac{1}{2x}$ pour $x \geq \pi$. On écrit alors que pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{aligned}\int_\pi^{n\pi} \frac{x|\sin(x)|}{x^2+1}dx &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{x|\sin(x)|}{x^2+1}dx \\ &\geq \sum_{k=1}^{n-1} f(k\pi) \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)|dx\end{aligned}$$

puisque f est décroissante, et ensuite, sachant que $|\sin|$ est π-périodique, on obtient que

$$\begin{aligned}\int_\pi^{n\pi} \frac{x|\sin(x)|}{x^2+1}dx &\geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)|dx \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \int_0^\pi \sin(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\end{aligned}$$

puisque

$$\int_0^\pi \sin(x)dx = -\left[\cos(x)\right]_0^\pi = 2\ .$$

Or la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\pi^{n\pi} \frac{x|\sin(x)|}{x^2+1}dx = +\infty$$

et I n'est pas absolument convergente. □

Correction de l'exercice 5.41. On intègre par parties en posant $u(t) = \ln(1+t^2)$ et $v'(t) = \frac{1}{t^2}$. On a alors

$$u'(t) = \frac{2t}{1+t^2} \text{ et } v(t) = -\frac{1}{t}\ .$$

Par suite,

$$\begin{aligned}I_x &= -\left[\frac{1}{t}\ln(1+t^2)\right]_1^x + 2\int_1^x \frac{dt}{1+t^2} \\ &= -\frac{\ln(1+x^2)}{x} + \ln(2) + 2\left[\arctan(t)\right]_1^x \\ &= -\frac{\ln(1+x^2)}{x} + \ln(2) + 2\arctan(x) - \frac{\pi}{2}\ .\end{aligned}$$

L'intégrale généralisée I est généralisée en $+\infty$. Elle est convergente si et seulement si I_x a une limite finie lorsque $x \to +\infty$ et, dans ce cas, cette limite est égale à I.

On a
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}=0$$
et
$$\lim_{x\to+\infty}\arctan(x)=\frac{\pi}{2}\ .$$
Donc I_x a bien une limite finie lorsque $x\to+\infty$, en d'autres termes I est bien convergente, et
$$I=\ln(2)+2\times\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$$
soit $I=\ln(2)+\frac{\pi}{2}$. □

Correction de l'exercice 5.42. Soit $f(x)=\frac{(1-\cos(x))\sin^3(x)}{x^\alpha}$. La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$.L'intégrale est a priori généralisée en 0. On a
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}\text{ et }\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1\ .$$
Donc
$$\lim_{x\to0}x^{\alpha-5}f(x)=\frac{1}{2}\ .$$
Le critère de Riemann donne que I est convergente si et seulement si $\alpha-5<1$ et donc si et seulement si $\alpha<6$. □

Correction de l'exercice 5.43. On a que
$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\ .$$
Soit $a>1$ fixé. Soient $f(x)=\frac{1}{x-1}$ et $g(x)=-\frac{1}{x+1}$. Les intégrales $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ sont divergentes d'après le critère de Riemann. Par contre $I=\int_a^{+\infty}\frac{2}{x^2-1}dx$ est convergente. Donc, non, si les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ sont divergentes, l'intégrale généralisée $I=\int_a^{+\infty}(f(x)+g(x))\,dx$ n'est pas forcément divergente. Ce serait par contre le cas si on avait supposé que f et g sont toutes deux positives. □

Correction de l'exercice 5.44. Soit $f(x)=x(1-x)$. On a $f'(x)=1-2x$. Le maximum de f est atteint en $x=\frac{1}{2}$ et il vaut $\frac{1}{4}$. On a $f_n(x)=f(x)^n$ et $f\geq0$. Donc
$$0\leq f_n(x)\leq\frac{1}{4^n}$$
pour tout $x\in[0,1]$. Ainsi:

(i) la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0,1]$,

(ii) les f_n (et la fonction nulle) sont (localement) intégrables sur $[0,1]$,

(iii) la suite (f_n) est dominée sur $[0,1]$ par la fonction $g=1$ pour laquelle $\int_0^1 g(x)dx<+\infty$.

On peut donc passer à la limite dans l'intégrale par convergence dominée. On en déduit que $\ell=0$. Supposons maintenant que $f_n(x)=x^n$. On ouvre (intellectuellement) l'intervalle en 1 et on remarque que

(i) la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0,1[$,

(ii) les f_n (et la fonction nulle) sont (localement) intégrables sur $[0,1[$,

(iii) la suite (f_n) est dominée sur $[0,1[$ par la fonction $g = 1$ pour laquelle $\int_0^1 g(x)dx < +\infty$.

Là encore on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue et on récupère que $\ell = 0$. $\square$

Correction de l'exercice 5.45. **(1)** On a

$$f_n(x) - 1 = \frac{x^n}{1+x^n}$$

et donc

$$\max_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |f_n(x) - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |f_n(x) - 1| = 0$$

et donc que (f_n) converge uniformément vers la fonction constante 1 sur $[0, \frac{1}{2}]$. Soit maintenant $[a,b] \subset]1,+\infty[$. On a

$$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = \frac{1}{1+a^n}$$

et donc, comme $a > 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = 0 .$$

On en déduit que (f_n) converge uniformément vers la fonction constante nulle sur tout intervalle fermé $[a,b] \subset]1,+\infty[$.

(2) Comme (f_n) converge uniformément vers la fonction constante 1 sur $[0, \frac{1}{2}]$ on peut passer à la limite dans la première intégrale et on obtient que

$$\ell = \int_0^{1/2} dx = \frac{1}{2} .$$

Pour ce qui est de la second intégrale on utilise la convergence dominée faible. On a que

$$f_n(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$$

sur $[1,+\infty[$ pour tout $n \geq 2$. La fonction $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est telle que $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ est convergente. On peut donc bien appliquer le théorème de convergence dominée faible et on obtient qu'il est alors possible de passer à la limite dans l'intégrale. Donc $\ell' = 0$. $\square$

Correction de l'exercice 5.46. Soit $f_n(x) = \frac{n\sqrt{x}+1}{nx+1}$. Clairement, pour tout $x \in]0,1]$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+\frac{1}{n}}{x+\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{x}} .$$

Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/\sqrt{x}$. Alors (f_n) converge simplement vers f sur $]0,1]$. De plus, les f_n et f sont continues sur $]0,1]$, donc localement intégrables sur $]0,1]$. On a aussi que

$$\begin{aligned}|f_n(x)| &\leq \frac{n\sqrt{x}}{nx+1} + \frac{1}{nx+1} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{x}} + 1\end{aligned}$$

pour tout $x \in]0,1]$ (en écrivant que $nx+1 \geq nx$ pour la première fraction et que $nx+1 \geq 1$ pour la seconde). La fonction

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$$

est localement intégrable sur $]0,1]$ et telle que $\int_0^1 g(x)dx$ est convergente. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient qu'il est alors possible de passer à la limite dans l'intégrale. D'où

$$\ell = \int_0^1 f(x)dx = 2\big[\sqrt{x}\big]_0^1 = 2 \ .$$

□

Correction de l'exercice 5.47. Soit $f_n(x) = f(x^n)$. Soit $0 < a \leq 1$. Pour $x \in [0,a[$, $x^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ et donc, par continuité de f, (f_n) converge simplement vers la fonction constante $f(0)$ sur $[0,a[$. Les fonctions f_n et la fonction constante $f(0)$ sont continues sur $[0,a[$ et donc localement intégrables sur $[0,a[$. Pour tout $x \in [0,a[$, $x^n \in [0,a^n[\subset [0,a]$. Comme f est continue sur $[0,a]$ elle est bornée sur $[0,a]$. Il existe donc $M > 0$ tel que $|f_n| \leq M$ pour tout n et en tout point de $[0,a[$. D'où la domination par la fonction constante $g = M$ qui est telle que $\int_0^a g(x)dx$ converge. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^a f(x^n)dx = \int_0^a f(0)dx = af(0) \ .$$

□

Correction de l'exercice 5.48. On pose $x = nu$. Alors $dx = ndu$ et donc

$$\frac{1}{n}\int_0^n f(x)dx = \int_0^1 f(nu)du \ .$$

Soit $f_n(x) = f(nx)$. Pour tout $x \in]0,1]$, $f_n(x) \to \ell$ lorsque $n \to +\infty$. Les f_n et la fonction constante ℓ sont continues et donc localement intégrables. Comme f est continue et puisque f a une limite finie en $+\infty$, il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [0,+\infty[$. On en déduit que $|f_n| \leq M$ pour tout n et en tout popint de $]0,1]$. La fonction constante $g(x) = M$ est telle que $\int_0^1 g(x)dx$ converge. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient qu'il est alors possible de passer à la limite dans l'intégrale $\int_0^1 f(nu)du$. On a $\int_0^1 \ell du = \ell$. Donc $\ell' = \ell$. □

Correction de l'exercice 5.49. On traite I. En mettant n^2 en facteur au numérateur et au dénominateur, on écrit que

$$\frac{n^2\sin(x)+n+1}{n^2+1} = \frac{\sin(x)+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} \ .$$

On voit ainsi que la limite simple de la suite de fonctions considérée est la fonction $\sin(x)$. Les fonctions en jeu sont continues donc localement intégrables. On a

$$|f_n(x)| \leq |\sin(x)| + 2$$

et $g(x) = |\sin(x)| + 2$ est continue et telle que $\int_0^{\pi/2} g(x)dx$ converge. Par convergence dominée on peut alors inverser limite et intégrale. On a donc

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin(x)dx = -\left[\cos(x)\right]_0^{\pi/2} = 1 \ .$$

On traite maintenant J. En mettant n^2 en facteur au numérateur et au dénominateur, on écrit que

$$\frac{n^2x^2+1}{n^2+nx^4+1} = \frac{x^2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{x^4}{n}+\frac{1}{n^2}} \ .$$

On voit ainsi que la limite simple de la suite de fonctions considérée est la fonction x^2. Les fonctions en jeu sont continues donc localement intégrables. On a

$$|f_n(x)| \leq x^2 + 1$$

et $g(x) = x^2 + 1$ est continue et telle que $\int_{-1}^{2} g(x)dx$ converge. Par convergence dominée on peut alors inverser limite et intégrale. On a donc

$$J = \int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-1}^{2} = 3 \ .$$

A ce point on traite K. Clairement, pour tout x fixé, $\cos(\frac{1}{n}x) \to 1$ lorsque $n \to +\infty$. La limite simple de la suite de fonctions considérée est la fonction x^4. Les fonctions en jeu sont continues donc localement intégrables. On a

$$|f_n(x)| \leq |x|^3$$

et $g(x) = |x|^3$ est continue et telle que $\int_{-1}^{1} g(x)dx$ converge. Par convergence dominée on peut alors inverser limite et intégrale. On a donc

$$K = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{1}{5}\left[x^5\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5} \ .$$

On s'attaque pour finir à L. En mettant n^3 en facteur au numérateur et au dénominateur, on écrit que

$$\frac{n^3\ln(x)+n^2x^3+nx+1}{n^3+5} = \frac{\ln(x)+\frac{x^3}{n}+\frac{x}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{5}{n^3}} \ .$$

La limite simple de la suite de fonctions considérée est la fonction $\ln(x)$. Les fonctions en jeu sont continues donc localement intégrables. On a

$$|f_n(x)| \leq \ln(x) + 11$$

pour $1 \leq x \leq 2$ $(11 = 8 + 2 + 1)$ et $g(x) = \ln(x) + 11$ est continue et telle que $\int_1^2 g(x)dx$ converge. Par convergence dominée on peut alors inverser limite et intégrale. On a donc

$$L = \int_1^2 \ln(x)dx = \left[x(\ln(x)-1)\right]_1^2 = 2\ln(2) - 1 \ .$$

□

Correction de l'exercice 5.50. On s'intéresse à I. On met n^2 en facteur au numérateur et au dénominateur. On a

$$\frac{n^2\sin(\frac{1}{n}x)+n+1}{n^2x^2+1}=\frac{\sin(\frac{1}{n}x)+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{x^2+\frac{1}{n^2}}$$

La limite simple de la suite de fonctions considérée est la fonction nulle. Les fonctions en jeu sont continues donc localement intégrables. On a

$$|f_n(x)|\leq\frac{3}{x^2}$$

et $g(x)=\frac{3}{x^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et telle que $\int_1^{+\infty}g(x)dx$ converge. Par convergence dominée on peut alors inverser limite et intégrale. On a donc

$$I=\int_1^{+\infty}0dx=0\ .$$

On s'intéresse maintenant à J. Cette fois-ci il y a convergence simple vers $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ et aussi domination par $g=f$ qui est telle que $\int_0^{+\infty}g(x)dx$ converge. Par convergence dominée on peut alors inverser limite et intégrale. On a donc

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx=[\arctan]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}\ .$$

□

Correction de l'exercice 5.51. On met n^2 en facteur au numérateur et au dénominateur. On a

$$\frac{n^2\sqrt{x}+1}{n^2x+n+1}=\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{n^2}}{x+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\ .$$

On en déduit que la limite simple de la suite de fonctions considérée est la fonction $\frac{1}{\sqrt{x}}$ pour $x>0$. Les fonctions en jeu sont continues sur $]0,1]$ donc localement intégrables sur $]0,1]$. On a

$$|f_n(x)|\leq\frac{2}{\sqrt{x}}$$

sur $]0,1]$ et $g(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,1]$ et telle que $\int_0^1 g(x)dx$ converge. Par convergence dominée on peut alors inverser limite et intégrale. On a donc

$$\ell=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\left[\sqrt{x}\right]_0^1=2\ .$$

□

Correction de l'exercice 5.52. Clairement la suite (f_n) de fonctions à intégrer converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,+\infty[$. Les fonctions en jeu sont continues donc localement intégrables. On a

$$|f_n(x)|\leq\frac{1}{x^2+1}$$

et $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$ est continue et telle que $\int_0^{+\infty}g(x)dx$ converge. Par convergence dominée on peut alors inverser limite et intégrale. On a donc $\ell=0$. □

Correction de l'exercice 5.53. On pose

$$f_n(x) = \frac{x^3 \sin(1+x^2)}{x^5+1} \chi_{]n,n+1[}(x) ,$$

où $\chi_{]n,n+1[}$ est la fonction caractéristique de $]n, n+1[$, et on regarde les f_n sur $I = [0, +\infty[$. Clairement (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur I puisque pour tout $x \in I$ fixé, $\chi_{]n,n+1[}(x) = 0$ pour $n \gg 1$ suffisamment grand. Les fonctions en jeu sont continues donc localement intégrables. On a

$$|f_n(x)| \leq \frac{x^3}{x^5+1} \leq g(x) ,$$

où $g(x) = 1$ si $0 \leq x \leq 1$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$ si $x \geq 1$. La fonction g est continue et telle que $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ converge. Par convergence dominée on peut alors inverser limite et intégrale. On a donc $\ell = 0$. □

Correction de l'exercice 5.54. La fonction $f(x,t) = \sin(xt)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t\cos(xt)$$

existe et est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Par théorème du cours F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$F'(x) = \int_0^1 t\cos(xt)dt$$

et comme $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue des deux variables, F' est continue, donc F est C^1. On a $F'(0) = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$. □

Correction de l'exercice 5.55. On a $2 + \cos(xt) \geq 1$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. La fonction

$$f(x,t) = \frac{x^2t^2 + xt + 1}{2 + \cos(xt)}$$

est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe en tout point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{(2xt+t)(2+\cos(xt)) + t(x^2t^2+xt+1)\sin(xt)}{(2+\cos(xt))^2}$$

pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue des deux variables sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Par théorème du cours F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

et comme $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue des deux variables, F' est continue, donc F est C^1. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = \frac{1}{3}t$$

et donc $F'(0) = \frac{1}{6}$. □

Correction de l'exercice 5.56. On a ici une intégrale généralisée en 0 et en $+\infty$. La fonction

$$f(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}$$

est continue sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$. Comme $|\sin(X)| \leq |X|$ pour tout X,

$$|f(x,t)| \leq |x|e^{-t}$$

et donc, en particulier, pour tout intervalle fermé borné $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, tout $x \in [\alpha, \beta]$ et tout $t \in]0, +\infty[$,

$$|f(x,t)| \leq Ce^{-t}$$

où $C = \max(|\alpha|, |\beta|)$. La fonction $g(t) = Ce^{-t}$ est telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge (elle est continue en 0 et elle s'intègre à la main entre 0 et A, ce qui permet de constater qu'il y a bien une limite finie lorsque $A \to +\infty$). Des théorèmes du cours on tire que F est définie et continue sur $[\alpha, \beta]$. Comme $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ est quelconque, on a montré que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(2) La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue des deux variables sur $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \cos(xt)e^{-t} .$$

On a ainsi $|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq e^{-t}$ et la fonction $g(t) = e^{-t}$ est telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge. Des théorèmes de cours on tire que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

et comme $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue des deux variables, et dominée par une fonction ne dépendant que de t dont l'intégrale converge, F' est continue, donc F est C^1. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = e^{-t}$ et donc

$$\begin{aligned} F'(0) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}dt \\ &= \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-t}dt \\ &= -\lim_{A\to+\infty} \left[e^{-t}\right]_0^A \\ &= \lim_{A\to+\infty} (1 - e^{-A}) \\ &= 1 . \end{aligned}$$

(3) On a $F(0) = 0$. Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = F'(0) .$$

D'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)}{x} = 1$. □

Correction de l'exercice 5.57. **(1)** On a ici une intégrale généralisée en 0 et en $+\infty$. La fonction

$$f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}d$$

est définie et continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pour $(x,t) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ on a

$$|f(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

et si $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$ alors $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ est convergente. Des théorèmes de cours on tire donc que F est définie et continue sur $]0, +\infty[$. On écrit que

$$F(x) = \int_0^1 f(x,t)dt + \int_1^{+\infty} f(x,t)dt$$

et pour $(x,t) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$,

$$|f(x,t)| \leq \frac{e^{-x}}{1+t^2}$$

si $t \geq 1$. On a donc que

$$\begin{aligned}\left|\int_1^{+\infty} f(x,t)dt\right| &\leq e^{-x}\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt \\ &\leq Ce^{-x}\end{aligned}$$

où $C > 0$ ne dépend pas de x, et ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^{+\infty} f(x,t)dt = 0 \ .$$

D'un autre côté, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x,t)dt\right| &\leq \int_0^1 e^{-xt}dt \\ &\leq -\frac{1}{x}\left[e^{-xt}\right]_0^1 \\ &\leq \frac{1}{x}\left(1 - e^{-x}\right) \ .\end{aligned}$$

et ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 f(x,t)dt = 0 \ .$$

On a donc bien que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

(2) On va déjà montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-t}{1+t^2}e^{-xt}$$

pour tous $(x,t) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Pour tout $[\alpha, \beta] \subset]0, +\infty[$, et tout $(x,t) \in]\alpha, \beta[\times]0, +\infty[$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-\alpha t}$$

et si $g(t) = e^{-\alpha t}$, alors $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ est convergente. Des théorèmes de cours on tire que F est dérivable sur tout intervalle $]\alpha, \beta[\subset]0, +\infty[$ avec

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}e^{-xt}dt \ .$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue des deux variables et dominée par une fonction ne dépendant que de t dont l'intégrale converge, F' est continue sur $]\alpha, \beta[$. Comme $]\alpha, \beta[$ est quelconque dans $]0, +\infty[$, F est C^1 sur $]0, +\infty[$ et la formule pour $F'(x)$ est valable pour tout $x > 0$. On recommence avec cette nouvelle formule. La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ a de nouveau une dérivée partielle par rapport à x. Elle est traditionnellement notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = fract^2 1 + t^2 e^{-xt}$$

pour tous $(x, t) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Comme ci-dessus, pour tout $[\alpha, \beta] \subset]0, +\infty[$, et tout $(x, t) \in]\alpha, \beta[\times]0, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right| \leq e^{-\alpha t}$$

et si $g(t) = e^{-\alpha t}$, alors $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ est convergente. Des théorèmes de cours on tire que F' est dérivable sur tout intervalle $]\alpha, \beta[\subset]0, +\infty[$ avec

$$F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt} dt \ .$$

Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est continue des deux variables et dominée par une fonction ne dépendant que de t dont l'intégrale converge, F'' est continue sur $]\alpha, \beta[$. Comme $]\alpha, \beta[$ est quelconque dans $]0, +\infty[$, F est C^2 sur $]0, +\infty[$ et la formule pour $F''(x)$ est valable pour tout $x > 0$.

(3) En vertue de ce qui a été dit ci-dessus, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
F''(x) + F(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt} dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt \\
&= \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-xt} dt \\
&= - \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{1}{x} e^{-xt} \right]_0^A \\
&= \frac{1}{x} \lim_{A \to +\infty} \left(1 - e^{-Ax} \right) \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

ce qui est la relation demandée. □

Correction de l'exercice 5.58. D'après les théorèmes généraux, la fonction $(x, y) \to x^3 y^4$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. On peut appliquer Fubini en piles:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 x^3 y^2 dy \right) dx \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 \left[y^3 \right]_{x^2}^1 dx \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 dx - \frac{1}{3} \int_0^1 x^9 dx \\
&= \frac{1}{12} \left[x^4 \right]_0^1 - \frac{1}{30} \left[x^{10} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{20} \ .
\end{aligned}$$

□

Correction de l'exercice 5.59. L'aire de D est donnée par la formule (cf. cours)

$$A = \int\int_D dxdy \ .$$

Le domaine D est un domaine en piles. On a bien que $2-x^2 \geq x^2$ pour $-1 \leq x \leq 1$. On applique Fubini en piles pour calculer

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{2-x^2} dy \right) dx \\ &= 2 \int_{-1}^{1} (1-x^2) dx \\ &= 2 \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{8}{3} \ . \end{aligned}$$

□

Correction de l'exercice 5.60. D'après les théorèmes généraux, la fonction $(x,y) \to x^2+y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Il faut maintenant re-écrire Ω pour le mettre sous la forme d'un domaine connu. On a

$$\begin{aligned} x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1 \Leftrightarrow \ & x \geq 0, 0 \leq y \leq 1-x \\ \Leftrightarrow \ & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x \end{aligned}$$

et on récupère, avec cette nouvelles écriture des conditions, un domaine en piles. On peut appliquer Fubini en piles:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2+y^2) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \int_0^{1-x} y^2 dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3 \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2 - x^3 - \frac{1}{3}x^3 - x + x^2 + \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{4}{3}x^3 - x + 2x^2 + \frac{1}{3} \right) dx \\ &= -\frac{1}{3}[x^4]_0^1 - \frac{1}{2}[x^2]_0^1 + \frac{2}{3}[x^3]_0^1 + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} \ . \end{aligned}$$

□

Correction de l'exercice 5.61. D'après les théorèmes généraux, la fonction $(x,y) \to xy$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Il faut maintenant re-écrire D pour le mettre sous la forme d'un domaine connu. On a

$$\begin{aligned} & 0 \le y \le 1, x - y + 1 \ge 0, x - y - 1 \le 0 \\ & \Leftrightarrow 0 \le y \le 1, y - 1 \le x \le y + 1 \end{aligned}$$

et on a bien que $y - 1 \le y + 1$. On récupère, avec cette nouvelles écriture des conditions, un domaine en tranches. On applique Fubini en tranches et on calcule

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_{y-1}^{y+1} x dx \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[x^2\right]_{y-1}^{y+1} \\ &= 2 \int_0^1 y dy \\ &= 1 \ . \end{aligned}$$

On change maintenant D comme dans l'énoncé. Là encore il faut re-écrire D pour le mettre sous la forme d'un domaine connu. On a

$$\begin{aligned} & y \ge 0, x - y + 1 \ge 0, x + 2y - 4 \le 0 \\ \Leftrightarrow \ & y \ge 0, y - 1 \le x \le 4 - 2y \\ \Leftrightarrow \ & 0 \le y \le \frac{5}{3}, y - 1 \le x \le 4 - 2y \end{aligned}$$

car $y - 1 \le 4 - 2y \ \Leftrightarrow \ y \le \frac{5}{3}$, et on récupère, avec cette nouvelles écriture des conditions, un domaine en tranches. On applique Fubini en tranches et on calcule

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{5/3} \left(\int_{y-1}^{4-2y} x dx \right) dy \\ &= \int_0^{5/3} \left(\int_{y-1}^{4-2y} x dx \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{5/3} y \left[x^2\right]_{y-1}^{4-2y} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{5/3} \left(3y^2 - 14y + 15\right) dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[y^3\right]_0^{5/3} - 7 \left[y^2\right]_0^{5/3} + \frac{75}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{125}{27} - \frac{175}{9} + \frac{75}{3} \right) \\ &= \frac{275}{54} \ . \end{aligned}$$

□

Correction de l'exercice 5.62. D'après les théorèmes généraux, la fonction $(x, y) \to x + y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Il faut maintenant re-écrire D pour le mettre sous la forme d'un domaine connu. On a

$$\begin{aligned} & x \le 1, y \ge 0, y^2 \le x \\ & \Leftrightarrow x \le 1, y \ge 0, y^2 \le x, x \ge 0 \\ & \Leftrightarrow 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{x} \ . \end{aligned}$$

On récupère, avec cette nouvelles écriture des conditions, un domaine en piles. On applique Fubini en piles et on calcule

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} (x+2y)dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x \int_0^{\sqrt{x}} dx + 2 \int_0^{\sqrt{x}} ydy \right) dx \\
&= \int_0^1 (x\sqrt{x} + x)dx \\
&= \frac{2}{5}[x^{5/2}]_0^1 + \frac{1}{2} \\
&= \frac{9}{10} \ .
\end{aligned}
$$

□

Correction de l'exercice 5.63. Le domaine D est un domaine en tranches et $y \leq y^2$ pour $y \geq 1$. Si A est l'air de D, on calcule avec Fubini en tranches:

$$
\begin{aligned}
A &= \int \int_D dxdy \\
&= \int_1^2 \left(\int_y^{y^2} dx \right) dy \\
&= \int_1^2 (y^2 - y)dy \\
&= \frac{1}{3} \left[y^3\right]_1^2 - \frac{1}{2} \left[y^2\right]_1^2 \\
&= \frac{5}{6} \ .
\end{aligned}
$$

□

Correction de l'exercice 5.64. Les fonctions $(x,y) \to \cos(x+y)$ et $(x,y) \to 1+x^2y^3$ sont, en vertue des théorèmes généraux, continues sur $\mathbb{R}^2$. Par Fubini pour les rectangles,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi \left(\int_0^{\pi/2} \cos(x+y)dy \right) dx \\
&= \int_0^\pi [\sin(x+y)]_{y=0}^{y=\pi/2} \, dx \\
&= \int_0^\pi \cos(x)dx - \int_0^\pi \sin(x)dx \\
&= [\sin(x)]_0^\pi + [\cos(x)]_0^\pi \\
&= -2 \ .
\end{aligned}
$$

Pour calculer J on écrit que

$$
D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x\right\} \ .
$$

On peut alors appliquer Fubini pour les domaines en piles pour calculer J. On a

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^1 \left(\int_0^x (1+x^2y^3)dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left[y + \frac{1}{4}x^2y^4\right]_{y=0}^{y=x} dx \\
&= \int_0^1 xdx + \frac{1}{4}\int_0^1 x^6 dx \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{28} = \frac{15}{28} .
\end{aligned}$$

□

Correction de l'exercice 5.65. **(1)** Pour $x > 0$ l'intégrale généralisée qui définit $\Gamma(x)$ est convergente en 0 car $t^{x-1}e^{-t} \leq \frac{1}{t^{1-x}}$ et $1 - x < 1$ de sorte que l'on récupère une domination par une intégrale de Riemann convergente en 0. On peut conclure à la convergence de $\Gamma(x)$ en 0 puisque la fonction intégrée est positive. En $+\infty$, comme l'exponentielle l'emporte sur toutes les puissances, $t^{x-1}e^{-t} \leq \frac{C}{t^2}$ pour une constante $C > 0$ indépendante de t, et on récupère une domination par une intégrale de Riemann convergente en $+\infty$. On peut conclure à la convergence de $\Gamma(x)$ en $+\infty$ puisque la fonction intégrée est positive. Donc $\Gamma(x)$ représente bien une intégrale convergente pour $x > 0$. En d'autres termes, $\Gamma(x)$ est bien définie pour $x > 0$.

(2) Comme $\Gamma(x)$ est convergente pour tout $x > 0$ on peut écrire que

$$\Gamma(x) = \lim_{A\to+\infty} \int_{1/A}^A t^{x-1}e^{-t}dt$$

pour tout $x > 0$. On intègre par parties l'intégrale

$$I_A = \int_{1/A}^A t^x e^{-t} dt$$

en posant $U = t^x$ et $V' = e^{-t}$. On a alors $U' = xt^{x-1}$ et $V = -e^{-t}$. Donc

$$I_A = -\left[t^x e^{-t}\right]_{1/A}^A + x\int_{1/A}^A t^{x-1}e^{-t}dt$$

et en remarquant que $[t^x e^{-t}]_{1/A}^A \to 0$ lorsque $A \to +\infty$, on obtient en passant à la limite $A \to +\infty$ que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(3) On a

$$\Gamma(1) = \lim_{A\to+\infty} \int_{1/A}^A e^{-t}dt$$

et $\int_{1/A}^A e^{-t}dt = -\left[e^{-t}\right]_{1/A}^A = e^{-1/A} - e^{-A}$. En passant à la limite en $A \to +\infty$ on obtient que $\Gamma(1) = 1$. Avec la question précédente,

$$\Gamma(n+1)n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-2) = \cdots = n!\Gamma(1)$$

et donc $\Gamma(n+1) = n!$.

(4) La fonction $(x,t) \to t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Les estimées changent selon que l'on regarde la borne 0 ou la borne $+\infty$. On définit

$$\Gamma_1(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt \ ,$$
$$\Gamma_2(x) = \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \ .$$

Soit $[\alpha,\beta] \subset]0,+\infty[$. Pour $x \in [\alpha,\beta]$ et $t \in]0,1[$, $t^{x-1}e^{-t} \leq t^{\alpha-1}$ et on a une domination par une intégrale de Riemann convergente. Donc Γ_1 est continue sur $]0,+\infty[$ puisque $[\alpha,\beta] \subset]0,+\infty[$ est quelconque. De la même façon, pour $x \in [\alpha,\beta]$ et $t \in]1,+\infty[$, $t^{x-1}e^{-t} \leq t^{\beta-1}e^{-t} \leq C/t^2$ et on a de nouveau une domination par une intégrale de Riemann convergente. Donc Γ_2 est continue sur $]0,+\infty[$ puisque $[\alpha,\beta] \subset]0,+\infty[$ est quelconque. Comme $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, Γ est continue sur $]0,+\infty[$.

(5) Soit $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \ln(t)t^{x-1}e^{-t} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \ln(t)^2 t^{x-1}e^{-t} \ .$$

Ces fonctions sont continues sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. On peut encore casser les intégrales en deux intégrales, de 0 à 1 et de 1 à $+\infty$. Comme l'exponentielle l'emporte sur toutes les puissances et comme le logarithme perd sur toutes les puissances, pour tout $[\alpha,\beta] \subset]0,+\infty[$ et tout $k \in \mathbb{N}$, en prenant $\eta > 0$ suffisamment petit pour que $1-\alpha+\eta < 1$ on voit que

$$|\ln(t)^k t^{x-1}e^{-t}| \leq \frac{C}{t^{1-\alpha+\eta}} \text{ pour tout } x \in [\alpha,\beta] \text{ et tout } t \in]0,1[\ ,$$
$$|\ln(t)^k t^{x-1}e^{-t}| \leq \frac{C}{t^2} \text{ pour tout } x \in [\alpha,\beta] \text{ et tout } t \in]1,+\infty[\ ,$$

où $C, C' > 0$ sont des constantes indépendantes de t et x. On obtient alors des domination par des intégrales de Riemann convergentes et les théorèmes de dérivation sous le signe intégrale permettent de conclure. La fonction Γ est C^2 sur $]0,+\infty[$ et

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt \ ,$$
$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)^2 t^{x-1}e^{-t}dt$$

pour tout $x \in]0,+\infty[$.

(6) La formule de la question précédente pour Γ'' montre que $\Gamma''(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Donc Γ' est strictement croissante. Elle s'annulera donc au mieux une seule fois. On a $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(2) = 1$ en vertue de la question (3). Le théorème de Rolle implique qu'il existe $a \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(a) = 0$. Donc la dérivée Γ' s'annule effectivement, elle s'annule une seule fois, et le point a qui annule Γ' est tel que $a \in [1,2]$. $\square$

Correction de l'exercice 5.66. (Correction sommaire) On a

$$
\begin{aligned}
& x \geq 0, y \geq 0, xy + x + y \leq 1 \\
& \Leftrightarrow x \geq 0, y \geq 0, y(1+x) + x \leq 1 \\
& \Leftrightarrow x \geq 0, y \geq 0, y \leq \frac{1-x}{1+x}, x \leq 1 \\
& \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1-x}{1+x}
\end{aligned}
$$

et on a bien que

$$\frac{1-x}{1+x} \geq 0$$

pour $0 \leq x \leq 1$. On récupère alors un domaine en piles. Le théorème de Fubini en piles donne que

$$
\begin{aligned}
A(D) &= \int\int_D dxdy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{1-x}{1+x}} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{1-x}{1+x} dx \\
&= \int_0^1 \frac{2-(1+x)}{1+x} dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{2}{1+x} - 1 \right) dx \\
&= 2 \left[\ln(1+x) \right]_0^1 - 1
\end{aligned}
$$

et donc $A(D) = 2\ln(2) - 1$. $\square$