Algèbre bilinéaire et Intégration

par

Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise

Année 2018-2019

Définition

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b, avec $a \geq -\infty$ et $b \leq +\infty$. On dit que f est localement intégrable sur I si pour tout intervalle fermé $[\alpha, \beta] \subset I$, α et β deux réels, f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[\alpha, \beta]$.

Par propriété de l'intégrale de Riemann, le résultat suivant a lieu.

Théorème

Toute fonction réelle définie et continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ est localement intégrable sur cet intervalle.

Définition (Intégrales généralisées en leurs bornes supérieures)

Soit f une fonction réelle définie et localement intégrable sur un intervalle du type $[a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \leq +\infty$. On appelle intégrale généralisée de f sur $[a, b[$ la limite quand x tend vers b par valeurs inférieures, si elle existe et si elle est finie, de la fonction F définie sur $[a, b[$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \ .$$

On pose alors

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt \ ,$$

et on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente. Si la limite n'existe pas, ou si elle n'est pas finie, on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est divergente.

Définition (Intégrales généralisées en leurs bornes inférieures)

Soit f une fonction réelle définie et localement intégrable sur un intervalle du type $]a, b]$, avec $a \geq -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$. On appelle intégrale généralisée de f sur $]a, b]$ la limite quand x tend vers a par valeurs supérieures, si elle existe et si elle est finie, de la fonction F définie sur $]a, b]$ par

$$F(x) = \int_x^b f(t)dt \ .$$

On pose alors

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt \ ,$$

et on dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ est convergente. Si la limite n'existe pas, ou si elle n'est pas finie, on dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ est divergente.

Théorème (L'intégrale de Riemann)

(1) L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$, généralisée en $+\infty$, est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
(2) L'intégrale de Riemann $\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha} dt$, généralisée en 0, est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Preuve : (1) La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$. En particulier, elle est localement intégrable sur $[1, +\infty[$. Dire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge équivaut donc à dire que la limite

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt$$

existe et est finie. Or pour $x > 1$,

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \ln(x) \ \text{ si } \alpha = 1,$$
$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right) \ \text{ si } \alpha \neq 1.$$

Preuve suite et fin : Par suite, $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}dt$ existe et est finie si et seulement si $\alpha > 1$. D'où le résultat.

(2) La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ est continue sur l'intervalle $]0,1]$. En particulier, elle est localement intégrable sur $]0,1]$. Dire que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge équivaut donc à dire que la limite

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$$

existe et est finie. Or pour $0 < x < 1$,

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}dt = -\ln(x) \;\text{ si } \alpha = 1,$$
$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - x^{1-\alpha}\right) \;\text{ si } \alpha \neq 1.$$

Par suite, $\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ existe et est finie si et seulement si $\alpha < 1$. D'où le résultat. CQFD.

Définition (Intégrales généralisées en leurs deux bornes)

Soit f une fonction réelle définie et localement intégrable sur un intervalle ouvert $]a, b[$, avec $a \geq -\infty$ et $b \leq +\infty$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si, pour un certain $c \in]a, b[$, les intégrales généralisées

$$\int_a^c f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_c^b f(t)dt$$

sont toutes deux convergentes. On pose alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \ ,$$

et on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est l'intégrale généralisée de f sur $]a, b[$. La définition ne dépend pas du choix de c.

La définition ne dépend pas de c en ce sens que l'assertion

$$\exists c \in]a,b[\ / \ \int_a^c f(t)dt \text{ et } \int_c^b f(t)dt \text{ convergent}$$

équivaut à l'assertion

$$\forall c \in]a,b[\ , \ \int_a^c f(t)dt \text{ et } \int_c^b f(t)dt \text{ convergent} \ .$$

On le voit avec la relation de Chasles dans la mesure où si $c_1 < c_2$ sont deux points de $]a,b[$, alors pour tout $a < x < c_1$,

$$\int_x^{c_2} f(t)dt = \int_x^{c_1} f(t)dt + \int_{c_1}^{c_2} f(t)dt$$

et pour tout $c_2 < x < b$,

$$\int_{c_1}^{x} f(t)dt = \int_{c_1}^{c_2} f(t)dt + \int_{c_2}^{x} f(t)dt \ .$$

A partir de là, on voit que

$$\int_a^{c_1} f(t)dt \ \text{ converge } \iff \int_a^{c_2} f(t)dt \ \text{ converge}$$
$$\int_{c_1}^{b} f(t)dt \ \text{ converge } \iff \int_{c_2}^{b} f(t)dt \ \text{ converge} \ .$$

D'où l'affirmation. De plus,

$$\begin{aligned}
&\int_a^{c_2} f(t)dt + \int_{c_2}^{b} f(t)dt \\
&= \int_a^{c_1} f(t)dt + \int_{c_1}^{c_2} f(t)dt + \int_{c_1}^{b} f(t)dt - \int_{c_1}^{c_2} f(t)dt \\
&= \int_a^{c_1} f(t)dt + \int_{c_1}^{b} f(t)dt \ .
\end{aligned}$$

Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge, alors pour tout $a < c < b$, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

Remarque : La convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ n'est pas équivalente à l'existence et à la finitude de la limite

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f(t)dt$$

si a et b sont des réels, ou à l'existence et à la finitude de la limite

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{+x} f(t)dt$$

si $a = -\infty$ et $b = +\infty$. Pour tout $x > 0$ on a par exemple que

$$\int_{-x}^{+x} tdt = 0 \ ,$$

tandis que $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$ diverge.

Des exemples : (1) En vertu de ce qui a été dit au sujet de l'intégrale de Riemann, et dans la mesure où un réel ne peut être tout à la fois strictement plus grand que un et strictement plus petit que un, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ diverge pour tout réel α.

(2) L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ converge et vaut π. En effet, d'une part

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \mathrm{Arctg} x$$

et $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{Arctg} x$ existe et vaut $\frac{\pi}{2}$. D'autre part,

$$\int_x^0 \frac{1}{1+t^2} dt = -Arctgx$$

et $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{Artcg} x$ existe et vaut $-\frac{\pi}{2}$.

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$$

sont deux intégrales convergentes qui valent toutes deux $\frac{\pi}{2}$. On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$$

converge et vaut π.

2. Intégrales absolument convergentes

Définition

Soit f une fonction réelle définie et localement intégrable sur un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a \geq -\infty$ et $b \leq +\infty$. On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge absolument si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ converge.

Le résultat suivant a lieu.

Théorème

Toute intégrale absolument convergente est convergente.

Preuve : Pour simplifier on va traiter du cas où l'intégrale est généralisée en b, et où $b < +\infty$. Soit $F(x) = \displaystyle\int_a^x |f(t)|dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. On suppose que F a une limite lorsque $x \to b$ par valeurs inférieures, et on veut montrer que G a aussi une limite lorsque $x \to b$ par valeurs inférieures. On utilise les deux résultats suivant d'analyse :

(i) $F(x)$ (resp. $G(x)$) ont une limite lorsque $x \to b$ par valeurs inférieures si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de points de I, si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x_n)$ (resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} G(x_n)$) existe,

(ii) une suite $\big(F(x_n)\big)_n$ (resp. $\big(G(x_n)\big)_n$) est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Soit $(x_n)_n$ une suite donnée quelconque de points de I qui tend vers b. La suite $\big(F(x_n)\big)_n$ converge par hypothèse et en vertue de (i) ci-dessus. En vertue de (ii) la suite est donc de Cauchy.

Preuve suite et fin : On a pour tous $p, q \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|G(x_q) - G(x_p)| &= \left| \int_a^{x_q} f(t)dt - \int_a^{x_p} f(t)dt \right| \\
&= \left| \int_{x_p}^{x_q} f(t)dt \right| \\
&\leq \left| \int_{x_p}^{x_q} |f(t)|dt \right| \\
&= \left| \int_a^{x_q} |f(t)|dt - \int_a^{x_p} |f(t)|dt \right| \\
&= |F(x_q) - F(x_p)| \ .
\end{aligned}$$

Comme $\big(F(x_n)\big)_n$ est de Cauchy, on en déduit que $\big(G(x_n)\big)_n$ est aussi de Cauchy. D'où, avec (ii), la convergence de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.
CQFD.

3. Critères de convergence pour les fonctions positives

On ne considère dans cette section que des fonctions réelles poistives définies et localement intégrable sur des intervalles du type $[a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \leq +\infty$. Des théorèmes analogues s'écrivent sans difficulté pour des fonctions positives définies et localement intégrables sur des intervalles du type $]a, b]$, avec $a \geq -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$. Par suite, on obtient aussi des critères de convergence pour les fonctions positives localement intégrables lorsque les problèmes de convergence se trouvent aux deux bornes de l'intégrale.

Proposition

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction positive localement intégrable sur $[a, b[$. Pour que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge il faut et il suffit qu'il existe une constante réelle $M > 0$ telle que pour tout $a \leq x < b$, $\int_a^x f(t)dt \leq M$.

Preuve : Il suffit de remarquer que la positivité de f entraine la croissance de $\int_a^x f(t)dt$. Une fonction croissante sur $[a, b[$ a une limite si et seulement si elle est majorée. D'où le résultat. CQFD.

Théorème (Principe de comparaison)

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions positives localement intégrables sur $[a, b[$. On suppose que pour tout $a \leq x < b$, $f(x) \leq g(x)$. Alors

$$\int_a^b g(t)dt \ \ converge \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(t)dt \ \ converge\ .$$

En particulier, la divergence de $\int_a^b f(t)dt$ entraine la divergence de $\int_a^b g(t)dt$.

Preuve : En vertue de la proposition précédente, la convergence de $\int_a^b g(t)dt$ équivaut à l'existence d'une constante réelle $M > 0$ telle que pour tout $a \leq x < b$, Preuve suite et fin :

$$\int_a^x g(t)dt \leq M \ .$$

De l'inégalité $f \leq g$, on tire que pour tout $a \leq x < b$,

$$\int_a^x f(t)dt \leq M \ ,$$

et il suit de la proposition précédente que $\int_a^b f(t)dt$ converge. D'où le résultat. CQFD.

Théorème (Condition nécessaire à l'infini)

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive localement intégrable sur $[a, +\infty[$. On suppose que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \ \ \textit{existe} \quad \textit{et} \quad \int_a^{+\infty} f(t)dt \ \ \textit{converge} \ .$$

Alors nécessairement $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Preuve : Supposons que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\alpha$, et pour alléger la redaction, supposons que $\alpha\in\mathbb{R}$. Alors

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists A>0\ /\ \forall x\geq A,\ |f(x)-\alpha|<\varepsilon\ .$$

Sachant que f est positive, nécessairement $\alpha\geq 0$. Supposons que $\alpha>0$. En posant $\varepsilon=\alpha/2$, on obtient l'existence d'un $A>0$ tel que pour tout $x\geq A$, $f(x)\geq\alpha/2$. Pour tout $x>A$ on aurait alors

$$\int_a^x f(t)dt\geq\int_A^x f(t)dt\geq\frac{\alpha}{2}(x-A)\ ,$$

ce qui entraine que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\alpha\quad\text{et}\quad\int_a^{+\infty} f(t)dt\ \text{ converge}$$

entrainent que $\alpha=0$. D'où le résultat. CQFD.

A propos de ce théorème, on remarquera qu'il existe des fonctions $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ positives et localement intégrables, pour lesquelles l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge mais qui n'ont pas de limite en $+\infty$. Pour le voir on pourra par exemple considérer la fonction "en peigne" $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x) = n^2 x + 1 - n^3 \text{ si pour un certain } n \geq 2,\ n - \frac{1}{n^2} \leq x \leq n \\ f(x) = -n^2 x + n^3 + 1 \text{ si pour un certain } n \geq 2,\ n \leq x \leq n + \frac{1}{n^2} \\ f(x) = 0 \ \text{ sinon} \end{cases}$$

La fonction vaut 1 aux entiers n, et comme on s'en convaincra facilement, f n'a pas de limite en $+\infty$. Par contre $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge puisque la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge. Dans le cas présent

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \ .$$

On le constate sans difficulté.

Théorème

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *deux fonctions positives localement intégrables sur* $[a, b[$, *avec* $a \in \mathbb{R}$ *et* $b \leq +\infty$. *On suppose qu'il existe* $c \in [a, b[$ *tel que pour tout* $c \leq x < b$, $g(x) \neq 0$, *et on suppose que*

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

existe.

(1) Si $0 < \alpha < +\infty$, *les intégrales généralisées* $\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_a^b g(t)dt$ *sont de même nature, à savoir simultanément convergentes ou simultanément divergentes.*

(2) Si $\alpha = 0$, *la convergence de l'intégrale généralisée* $\int_a^b g(t)dt$ *entraine la convergence de l'intégrale généralisée* $\int_a^b f(t)dt$.

(3) Si $\alpha = +\infty$, *la convergence de l'intégrale généralisée* $\int_a^b f(t)dt$ *entraine la convergence de l'intégrale généralisée* $\int_a^b g(t)dt$.

Preuve : Pour alléger la redaction, on suppose que $b < +\infty$. Dire que

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$, signifie que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ / \ \forall x,\ b - \eta < x < b \ \Rightarrow \ \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \alpha \right| < \varepsilon \ .$$

Sachant que f et g sont positives, $\alpha \geq 0$. Supposons que $\alpha > 0$. En posant $\varepsilon = \alpha/2$, on obtient l'existence d'un $\eta > 0$ tel que pour tout $b - \eta < x < b$,

$$\frac{\alpha}{2}\, g(x) \ \leq \ f(x) \ \leq \ \frac{3\alpha}{2}\, g(x) \ .$$

Du principe de comparaison énoncé dans un théorème précédent, il s'ensuit facilement que les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Preuve suite et fin : Supposons maintenant que $\alpha = 0$. Alors

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ / \ \forall x,\ b - \eta < x < b \ \Rightarrow \ \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon \ .$$

En posant $\varepsilon = 1$, on obtient ainsi l'existence d'un $\eta > 0$ tel que pour tout $b - \eta < x < b$, $f(x) \leq g(x)$. Là encore, il suit du principe de comparaison que la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$ entraine la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$.

Enfin, si $\alpha = +\infty$, alors

$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0 \ / \ \forall x,\ b - \eta < x < b \ \Rightarrow \ \frac{f(x)}{g(x)} \geq A \ .$$

En prenant $A = 1$, on obtient qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $b - \eta < x < b$, $f(x) \geq g(x)$. On applique une fois de plus le principe de comparaison, d'où l'on tire que la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ entraine la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$. Le théorème est démontré. CQFD.

Corollaire

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *deux fonctions positives localement intégrables sur* $[a, b[$, *avec* $a \in \mathbb{R}$ *et* $b \leq +\infty$. *On suppose qu'il existe* $c \in [a, b[$ *tel que pour tout* $c \leq x < b$, $g(x) \neq 0$, *et on suppose que*

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

existe. Si $\alpha = 0$, *la divergence de l'intégrale généralisée* $\int_a^b f(t)dt$ *entraine la divergence de l'intégrale généralisée* $\int_a^b g(t)dt$, *et si* $\alpha = +\infty$, *la divergence de l'intégrale généralisée* $\int_a^b g(t)dt$ *entraine la divergence de l'intégrale généralisée* $\int_a^b f(t)dt$.

Un autre corollaire au théorème est donné par le résultat important suivant.

Théorème (Critère de Riemann)

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction positive définie et localement intégrable sur* $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$. *On suppose que pour un certain* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = s$ *existe. Alors :*

(i) Si $\alpha > 1$ *et* $0 \leq s < +\infty$, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *converge ,*

(ii) Si $\alpha \leq 1$ *et* $0 < s \leq +\infty$, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *diverge .*

En particulier, si $0 < s < +\infty$, *les intégrales généralisées* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ *sont de même nature.*

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème que l'on vient de démontrer avec pour fonction g la fonction $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, sachant que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. CQFD.

De façon analogue, avec le même genre d'arguments que ceux utilisés jusqu'ici, on obtient un critère de Riemann pour les bornes gauches en 0.

Théorème (Critère de Riemann)

Soit $f :]0, a] \to \mathbb{R}$ *une fonction positive définie et localement intégrable sur* $]0, a]$, $a \in \mathbb{R}$. *On suppose que pour un certain* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha f(x) = s$ *existe. Alors*

(i) si $\alpha < 1$ *et* $0 \leq s < +\infty$, $\int_0^a f(t)dt$ *converge ,*

(ii) si $\alpha \geq 1$ *et* $0 < s \leq +\infty$, $\int_0^a f(t)dt$ *diverge .*

En particulier, si $0 < s < +\infty$, *les intégrales* $\int_0^a f(t)dt$ *et* $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ *sont de même nature.*

Théorème (Intégrales de Bertrand)

Soient $a > 1$ et α, β deux réels. On considère l'intégrale $I_{\alpha\beta}$, dite de Bertrand, généralisée en $+\infty$, donnée par

$$I_{\alpha\beta} = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt \ .$$

Alors $I_{\alpha\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ et β quelconque, ou alors $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Preuve : Pour commencer, on suppose que $\alpha = 1$, et on montre que $I_{1\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$. Pour le voir on remarque qu'avec le changement de variables $u = \ln t$,

$$\int_a^x \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt = \int_{\ln a}^{\ln x} \frac{1}{u^\beta} du \ .$$

Preuve suite : On est ainsi ramené à une intégrale de Riemann généralisée en $+\infty$, dont on sait qu'elle converge si et seulement si $\beta > 1$.

On suppose maintenant que $\alpha > 1$. On montre que $I_{\alpha\beta}$ converge pour tout β. Sachant que pour tout $s > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^s} = 0 \ ,$$

on voit que pour $1 < \gamma < \alpha$,

$$\lim_{x \to +\infty} x^\gamma \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = 0 \ .$$

Le résultat annoncé découle alors du critère de Riemann.

Supposons pour finir que $\alpha < 1$. On montre que pour tout β, $I_{\alpha\beta}$ diverge. En effet, pour $\alpha < \gamma < 1$,

$$\lim_{x \to +\infty} x^\gamma \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = +\infty \ ,$$

et là encore le résultat annoncé suit du critère de Riemann. CQFD.

5. Le critère d'Abel pour les fonctions changeant de signe.

Théorème (Le critère d'Abel)

Soient $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions définies et localement intégrables sur $[a, +\infty[$. On suppose que f est positive, décroissante, et tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$. On suppose par ailleurs qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x > a$, $\left| \int_a^x g(t)dt \right| \leq M$. L'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est alors convergente.

On donne un exemple d'application du critère. On considère l'intégrale généralisée en $+\infty$,

$$I = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{sint}{t} dt \ .$$

On prétend que cette intégrale est convergente mais pas absolument convergente. Que cette intégrale soit convergente s'obtient facilement à partir du critère d'Abel. La fonction $x \to \frac{1}{x}$ est en effet positive, décroissante, et elle tend vers 0 lorsque

$x \to +\infty$. Par ailleurs, et pour tout $x > \pi$,

$$\left| \int_{\pi}^{x} sintdt \right| = \left| (-cost)_{\pi}^{x} \right| \leq 2 \ ,$$

de sorte qu'il est effectivement possible d'appliquer le critère d'Abel.

A l'inverse, on remarque que pour tout $n \geq 1$ entier, et tout $t \in [(n-1)\pi, n\pi]$,

$$\begin{aligned} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|sint|}{t} dt &\geq \frac{1}{n\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |sint| dt \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_{0}^{\pi} sintdt \\ &= \frac{2}{n\pi} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|sint|}{t} dt = \sum_{p=2}^{n} \int_{(p-1)\pi}^{p\pi} \frac{|sint|}{t} dt$$
$$\geq \frac{2}{\pi} \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \; .$$

Donc la convergence de l'intégrale généralisée $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|sint|}{t} dt$ devrait entrainer la convergence de la série $\sum \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|sint|}{t} dt$, et puisque la série harmonique de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, on tire de ce qui a été dit plus haut que l'intégrale généralisée $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|sint|}{t} dt$ diverge elle aussi.

En d'autres termes, l'intégrale généralisée

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$$

est convergente mais n'est pas absolument convergente.

Fin du chapitre 9