

Algèbre bilinéaire et Intégration

par

Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise

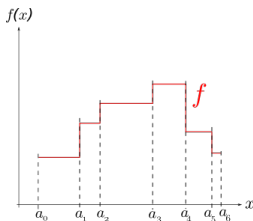
Année 2018-2019

Chapitre 8

L'intégrale de Riemann

1. Premières constructions

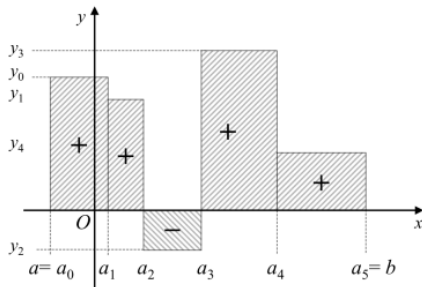
Soit $[a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} , $a < b$ deux réels. Soit $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, une famille finie de points de $[a, b]$ telle que $a_0 = a$, $a_n = b$, et $a_{i-1} < a_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. On dit alors que σ est une **subdivision** de $[a, b]$. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision σ de $[a, b]$ et des réels c_i pour $i = 1, \dots, n$, tels que $f \equiv c_i$ sur $]a_{i-1}, a_i[$ pour tout $i = 1, \dots, n$ (les valeurs aux points a_i étant, selon le choix, fixées comme égales à c_i ou c_{i+1}).



Pour une fonction f en escalier comme ci-dessus, qui vaut c_i sur les intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ d'une subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$, on définit

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) c_i .$$

C'est l'aire (signée) hachurée sur le graphique ci-dessous (ici, par rapport à nos notations, $y_i = c_{i+1}$). L'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ ne dépend pas de la subdivision σ .



Définition

Soient $a < b$ deux réels. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que $|f - \varphi_\varepsilon| \leq \psi_\varepsilon$ dans $[a, b]$ et $\int_a^b \psi_\varepsilon(x) dx < \varepsilon$.

Lemme

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est *intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$* , alors il existe des suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ de fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que $|f - \varphi_n| \leq \psi_n$ sur $[a, b]$ pour tout n , et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n(x) dx = 0$.

Preuve : On obtient le lemme à partir de la définition en posant $\varepsilon = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Pour chaque n on a deux fonctions en escalier $\varphi_n, \psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $|f - \varphi_n| \leq \psi_n$ dans $[a, b]$ et $\int_a^b \psi_n(x) dx < \frac{1}{n}$. CQFD.

Définition

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, $a < b$ deux réels, et si $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ sont deux suites de fonctions en escalier comme dans le lemme précédent, on pose

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx .$$

La limite existe toujours et la définition ne dépend pas du choix des suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$.

Preuve : (1) On montre que la limite existe. Soient p, q deux entiers. On a $|\varphi_q - \varphi_p| \leq |f - \varphi_p| + |f - \varphi_q|$. Donc

$$|\varphi_q - \varphi_p| \leq \psi_p + \psi_q$$

sur $[a, b]$. On vérifie facilement que pour des fonctions en escalier \tilde{f}, \tilde{g} sur un intervalle $[a, b]$, si $\tilde{f} \leq \tilde{g}$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b \tilde{f}(x)dx \leq \int_a^b \tilde{g}(x)dx .$$

Preuve suite : De cette identité on tire facilement que pour toute fonction en escalier \tilde{f} sur $[a, b]$,

$$\left| \int_a^b \tilde{f}(x) dx \right| \leq \int_a^b |\tilde{f}(x)| dx .$$

On vérifie de même facilement que si \tilde{f} et \tilde{g} sont en escalier sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b (\tilde{f} + \tilde{g})(x) dx = \int_a^b \tilde{f}(x) dx + \int_a^b \tilde{g}(x) dx .$$

Il suit de tout ceci que

$$\left| \int_a^b \varphi_q(x) dx - \int_a^b \varphi_p(x) dx \right| \leq \int_a^b \psi_p(x) dx + \int_a^b \psi_q(x) dx ,$$

et puisque $\int_a^b \psi_p(x) dx \rightarrow 0$ lorsque $p \rightarrow +\infty$ et $\int_a^b \psi_q(x) dx \rightarrow 0$ lorsque $q \rightarrow +\infty$, on en déduit que la suite des intégrales $\int_a^b \varphi_n(x) dx$ est une suite de Cauchy réelle. Toute suite de Cauchy réelle converge. La limite existe donc.

Preuve suite : (2) On montre l'indépendance de la définition par rapport au choix des suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$. Supposons que l'on ait deux familles $(\varphi_n)_n, (\psi_n)_n$ et $(\hat{\varphi}_n)_n, (\hat{\psi}_n)_n$ de suites de fonctions en escalier telles que

$$|f - \varphi_n| \leq \psi_n \text{ et } |f - \hat{\varphi}_n| \leq \hat{\psi}_n \text{ dans } [a, b], \text{ pour tout } n,$$
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \hat{\psi}_n(x) dx = 0 .$$

On écrit que

$$\begin{aligned} |\varphi_n - \hat{\varphi}_n| &\leq |f - \varphi_n| + |f - \hat{\varphi}_n| \\ &\leq \psi_n + \hat{\psi}_n \end{aligned}$$

dans $[a, b]$, pour tout n . Comme précédemment, cela entraîne que

$$\left| \int_a^b \varphi_n(x) dx - \int_a^b \hat{\varphi}_n(x) dx \right| \leq \int_a^b \psi_n(x) dx + \int_a^b \hat{\psi}_n(x) dx ,$$

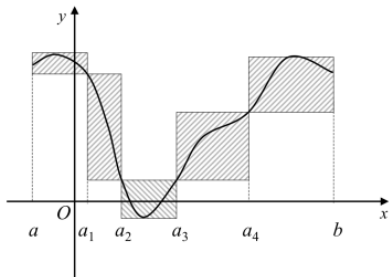
et donc que

Preuve suite et fin :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \hat{\varphi}_n(x) dx .$$

D'où l'indépendance de la définition par rapport au choix des suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$. CQFD.

Dans le graphique qui suit, f est encadrée par deux fonctions en escalier : $\psi_1 \leq f \leq \psi_2$, et si $\phi = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)$ et $\psi = \frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1)$, alors $|f - \phi| \leq \psi$ (un encadrement du type de ceux rencontrés ici).



1. Sommes de Riemann

On appelle **subdivision pointée** de $[a, b]$ tout couple (σ, ξ) constitué d'une subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ et d'une famille $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ de points de $[a, b]$ tels que

$$a_{i-1} \leq \xi_i \leq a_i$$

pour tout $i = 1, \dots, n$. On appelle **pas d'une subdivision** $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ le réel positif

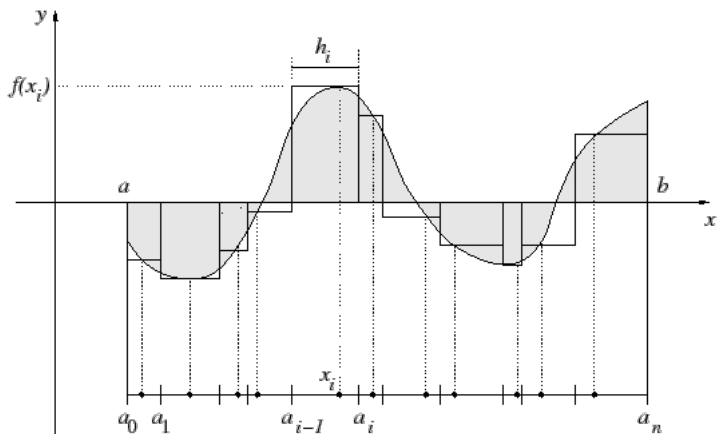
$$\delta(\sigma) = \max_{i=1, \dots, n} |a_i - a_{i-1}| .$$

Si maintenant $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, et (σ, ξ) est une subdivision pointée de $[a, b]$, on définit

$$S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) f(\xi_i) .$$

On dit que $S(f, \sigma, \xi)$ est la **somme de Riemann** de f associée à (σ, ξ) .

Sur un graphique, les sommes de Riemann ressemblent à cela (ici, par rapport à nos notations, $x_i = \xi_i$) :



On donne le théorème fondamental suivant sans preuve.

Théorème

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall (\sigma, \xi) \in \mathcal{S}, \delta(\sigma) < \eta \\ \Rightarrow \left| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon ,$$

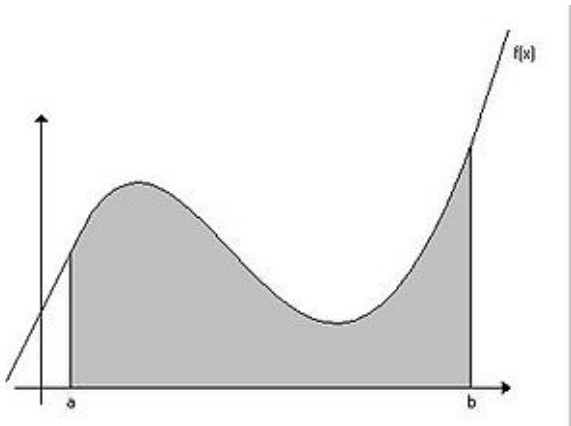
où \mathcal{S} parcourt l'ensemble des subdivisions pointées de $[a, b]$.

Il suit de ce théorème que si f est intégrable au sens de Riemann, alors pour toute suite $((\sigma_n, \xi_n))_n$ de subdivisions pointées de $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, \sigma_n, \xi_n)$$

dès que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(\sigma_n) = 0$.

En vertu de ce qui a été dit, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est en fait (peut être pensée) comme l'aire (signée) de la surface bloquée entre l'axe des x et le graphe de la fonction :



2. Continuité et intégrabilité

Théorème

Soient $a < b$ deux réels. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.

Preuve : On utilise qu'une fonction continue sur un compact (ici un intervalle fermé borné de \mathbb{R}) y est en fait uniformément continue. Donc on a, en vertu de ce résultat, que

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x, y \in [a, b], |y - x| < \eta \\ \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon . \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$ de pas $\delta(\sigma) < \eta$. On définit la fonction en escalier

$$\varphi_\varepsilon \equiv f(a_{i-1}) \text{ sur } [a_{i-1}, a_i[$$

pour tout $i = 1, \dots, n$.

Preuve suite : On a

$$|f - \varphi_\varepsilon| < \varepsilon$$

sur $[a, b]$ en vertu de l'uniforme continuité. La fonction $\psi_\varepsilon \equiv \varepsilon$ sur $[a, b]$ est elle aussi en escalier sur $[a, b]$ (puisque constante). On a

$$\int_a^b \psi_\varepsilon(x) dx = \varepsilon(b - a) .$$

Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, f est bien intégrable au sens de Riemann. CQFD.

3. Propriétés élémentaires des intégrales

Lemme

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$. Alors f est bornée au sens où il existe $K > 0$ telle que $|f(x)| \leq K$ pour tout $x \in [a, b]$.

Preuve : La propriété est évidente puisque, en particulier, il existe $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions en escalier (donc bornées) telles que $|f - \varphi| \leq \psi$ sur $[a, b]$ (et $\int_a^b \psi(x) dx < 1$ par exemple). Donc $|f| \leq |\varphi| + \psi$ sur $[a, b]$, et si $K > 0$ est tel que $|\varphi| + \psi \leq K$ sur $[a, b]$, on récupère le résultat. CQFD.

Lemme (Relation de Chasles)

Soient $a < b < c$ trois réels. Une fonction $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, c]$ si et seulement si f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$. De plus on a la relation de Chasles : $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.

Preuve : On peut toujours insérer b dans une subdivision de $[a, c]$. On en déduit facilement que si f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, c]$ alors f est aussi intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$. La réciproque est tout aussi évidente. Pour des fonctions en escalier $\varphi : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ on vérifie facilement que $\int_a^c \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx + \int_b^c \varphi(x) dx$. On en déduit (il n'y a pas de difficulté) que l'identité s'étend aux fonctions intégrables au sens de Riemann. CQFD.

Lemme

Soient $a < b$ deux réels. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$. Si $f \leq g$ alors

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx .$$

En particulier, l'intégrale d'une fonction positive ou nulle est positive ou nulle.

Preuve : Soient $(\varphi_n)_n, (\psi_n)_n$ et $(\hat{\varphi}_n)_n, (\hat{\psi}_n)_n$ des suites de fonctions en escalier telles que

$$|f - \varphi_n| \leq \psi_n \text{ et } |g - \hat{\varphi}_n| \leq \hat{\psi}_n \text{ dans } [a, b], \text{ pour tout } n,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \hat{\psi}_n(x) dx = 0 .$$

On écrit que

$$\begin{aligned} \varphi_n &\leq \varphi_n - f + f \\ &\leq |f - \varphi_n| + g \\ &\leq |f - \varphi_n| + |g - \hat{\varphi}_n| + \hat{\varphi}_n \\ &\leq \psi_n + \hat{\psi}_n + \hat{\varphi}_n \end{aligned}$$

sur $[a, b]$. Comme il n'y a là que des fonctions en escalier, on peut écrire que

$$\int_a^b \varphi_n(x) dx \leq \int_a^b \psi_n(x) dx + \int_a^b \hat{\psi}_n(x) dx + \int_a^b \hat{\varphi}_n(x) dx ,$$

et en passant à la limite en $n \rightarrow +\infty$, on obtient l'inégalité recherchée. CQFD.

Lemme

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$. Alors $|f|$ est aussi intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, et $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Preuve : L'intégrabilité de $|f|$ s'obtient en remarquant que si $|f - \varphi| \leq \psi$ sur $[a, b]$ alors $||f| - |\varphi|| \leq \psi$ sur $[a, b]$, et en remarquant que si φ est en escalier, alors $|\varphi|$ l'est aussi. Pour l'inégalité on remarque que $f \leq |f|$ et $-f \leq |f|$ de sorte que, avec le lemme précédent,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\leq \int_a^b |f(x)| dx \text{ et} \\ - \int_a^b f(x) dx &\leq \int_a^b |f(x)| dx . \end{aligned}$$

Ce n'est rien d'autre que l'inégalité voulue. CQFD.

Lemme

Soient $a < b$ deux réels et $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$. La fonction $\Phi : \mathcal{L}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(f) = \int_a^b f(x) dx$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Preuve : L'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ hérite d'une structure naturelle d'espace vectoriel en tant que sous espace vectoriel de l'espace de toutes les fonctions de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . Il est clair que si $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont en escalier, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_a^b (\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(x) dx = \int_a^b \varphi_1(x) dx + \lambda \int_a^b \varphi_2(x) dx .$$

L'égalité passe ensuite facilement aux fonctions de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. CQFD.

4. Primitives et intégrales

Théorème (Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral)

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann. Pour $t \in [a, b]$, on pose

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx ,$$

avec la convention que $F(a) = 0$. Alors $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$. Si de plus f est continue sur $[a, b]$, alors F est dérivable sur $]a, b[$ et $F'(t) = f(t)$ pour tout $t \in]a, b[$.

Pour mémoire une primitive d'une fonction f est une fonction F qui est dérivable de dérivée f . Ce théorème a ceci de remarquable qu'il établit un lien entre primitives et aires des surfaces délimitées par l'axe des abscisses et les graphes des fonctions continues.

Preuve : (1) On démontre la continuité de F . Pour fixer les idées, soit $t_0 \in]a, b[$. Par relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^t f(x) dx - \int_a^{t_0} f(x) dx \right| &\leq \left| \int_{t_0}^t f(x) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(x)| dx \right| , \end{aligned}$$

où l'on adopte la convention que $\int_{t_0}^t = -\int_t^{t_0}$ si $t < t_0$. On sait que f est bornée sur $[a, b]$, et donc il existe $K > 0$ telle que $|f(x)| \leq K$ pour tout $x \in [a, b]$. Par suite

$$\left| \int_a^t f(x) dx - \int_a^{t_0} f(x) dx \right| \leq K |t - t_0| ,$$

et on voit que F est continue en t_0 . Elle est même lipschitzienne sur $[a, b]$.

Preuve suite : (2) On démontre la différentiabilité de F , et le fait que F soit une primitive de f , sous l'hypothèse supplémentaire que f est continue sur $[a, b]$. Soit $t_0 \in]a, b[$. On écrit que

$$\begin{aligned} & \int_a^t f(x)dx - \int_a^{t_0} f(x)dx - (t - t_0)f(t_0) \\ &= \int_{t_0}^t (f(x) - f(t_0)) dx . \end{aligned}$$

Comme f est continue sur $[a, b]$,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \sup_{\{x/|x-t_0|<\eta\}} |f(x) - f(t_0)| = 0 .$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\left| \int_{t_0}^t (f(x) - f(t_0)) dx \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(x) - f(t_0)| dx \right| \leq \varepsilon |t - t_0|$$

pour tout t tel que $|t - t_0| < \eta$. On en déduit que

Preuve suite et fin :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall t \in]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$$
$$\left| \int_a^t f(x) dx - \int_a^{t_0} f(x) dx - (t - t_0)f(t_0) \right| < \varepsilon |t - t_0| .$$

Cela entraîne que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall t \in]t_0 - \eta, t_0 + \eta[, t \neq t_0,$$
$$\left| \frac{\int_a^t f(x) dx - \int_a^{t_0} f(x) dx}{t - t_0} - f(t_0) \right| < \varepsilon .$$

En particulier,

$$\lim_{t \rightarrow t_0, t \neq t_0} \frac{\int_a^t f(x) dx - \int_a^{t_0} f(x) dx}{t - t_0} = f(t_0) ,$$

ce qui prouve que F est dérivable en t_0 de dérivée en ce point $F'(t_0) = f(t_0)$. CQFD.

Corollaire

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$ (au sens classique où f est en fait définie et C^1 sur un intervalle ouvert un peu plus grand que $[a, b]$). Alors

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Preuve : Les fonctions f et $t \rightarrow \int_a^t f'(x)dx$ sont deux primitives de f' . Deux primitives d'une même fonction diffèrent forcément d'une constante. Donc il existe C telle que

$$f(t) = \int_a^t f'(x)dx + C$$

pour tout $t \in [a, b]$. En prenant $t = a$ (ou $t \rightarrow a^+$) on voit que $C = f(a)$. En prenant ensuite $t = b$ on récupère le corollaire. CQFD.

Corollaire (Formule d'intégration par parties)

Soient $a < b$ deux réelles et $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$ (au sens classique où u et v sont en fait définies et C^1 sur un intervalle ouvert un peu plus grand que $[a, b]$). Alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx ,$$

$$\text{où } [uv]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

Preuve : On a la formule de dérivation produit

$$(uv)' = u'v + uv' .$$

Le corollaire précédent permet d'écrire que

$$\int_a^b (uv)'(x)dx = [uv]_a^b .$$

D'où le résultat. CQFD.

5. Quelques primitives usuelles

$$\int x^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \text{ pour } n \neq -1 ,$$

$$\int \cos(x) = \sin(x) , \quad \int \sin(x) = -\cos(x) ,$$

$$\int e^x = e^x ,$$

$$\int \frac{1}{x} = \ln(x) \text{ sur } \mathbb{R}^{+\ast} .$$

Fin du chapitre 8