Algèbre bilinéaire et Intégration

par

Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise

Année 2018-2019

Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $f \in End(E)$ un endomorphisme de E. Il existe alors un unique endomorphisme $f^\star \in End(E)$, appelé adjoint de f (sous entendu pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$), tel que pour tous $x, y \in E$,

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^\star(y) \rangle \ .$$

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E, $f^\star$ est caractérisé par le fait que sa matrice dans $\mathcal{B}$ est la transposée de la matrice de f dans $\mathcal{B}$. En d'autres termes, $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f^\star) = {}^t M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E.

Preuve : Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E, et notons a_{ij} les coefficients de la matrice de représentation de f dans $\mathcal{B}$ de sorte que $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = (a_{ij})$. Donc

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

On construit l'endomorphisme $f^\star \in \mathrm{End}(E)$ de E par

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f^\star) = {}^t M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$$

de sorte que $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f^\star) = (a_{ji})$. Donc

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f^\star) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Soient maintenant x et y deux vecteurs de E de coordonnées respectives x_i et y_i dans $\mathcal{B}$.

Preuve suite : Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j e_i \ , \end{aligned}$$

et donc, puisque $\mathcal{B}$ est une base orthonormale,

$$\langle f(x), y \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i x_j \ .$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} f^\star(y) &= \sum_{j=1}^{n} y_j f^\star(e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji} y_j e_i \ , \end{aligned}$$

et donc, toujours puisque $\mathcal{B}$ est une base orthonormale, Preuve suite :

$$\langle x, f^\star(y)\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji} y_j x_i \ .$$

On trouve donc bien que pour tous $x, y \in E$,

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^\star(y)\rangle \ .$$

Il reste à ce stade à montrer que $f^\star$ est unique (et cela suffira à démontrer le théorème). Or

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^\star(y)\rangle$$

entraîne en particulier que

$$\langle f(e_i), e_j\rangle = \langle e_i, f^\star(e_j)\rangle$$

pour tous i, j. Mais si X est un vecteur de E, ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont exactement les $X_i = \langle X, e_i\rangle$. Il suit que

$$\langle f(e_i), e_j\rangle = a_{ji}$$

pour tous i, j, puis que pour tout j, Preuve suite et fin :

$$f^\star(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} e_i \ .$$

Par suite $f^\star$ est uniquement déterminée, et donc unique. Le théorème est démontré. CQFD.

On rappelle que si

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, alors pour tout j,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \ .$$

2. Endomorphismes symétriques

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. On dit qu'un endomorphisme $f \in End(E)$ est symétrique (ou encore auto-adjoint) si $f = f^\star$, où $f^\star$ est l'adjoint de f (pour le produit scalaire).

Dire que f est symétrique revient encore à dire que pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est symétrique. L'objectif de cette section est de démontrer le théorème très important suivant.

Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire, et soit $f \in End(E)$ un endomorphisme symétrique de E, donc tel que $f = f^\star$. Alors f est diagonalisable, qui plus est dans une base orthonormale de E.

En d'autres termes, pour tout endomorphisme symétrique $f \in \mathrm{End}(E)$ de E, il existe une base orthonormale de E qui soit composée de vecteurs propres de f.

Pour simplifier on démontre le théorème dans le cas simple où $n = 2$. On montre successivement les trois points suivants :

1 - Les valeurs propres de f sont réelles,

2 - Les sous espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux,

3 - f est diagonalisable dans une base orthonormale,

de sorte que f est diagonalisable, qui plus est dans une base orthonormale de E, ce qui démontre le théorème.

On suppose donc dans la suite que $n = 2$. La preuve dans le cas général $n \geq 3$ est proposée à la dernière section de ce chapitre.

Preuve de l'étape 1 : On affirme que si $f \in \mathrm{End}(E)$ est un endomorphisme symétrique de E, alors les valeurs propres de f sont toutes réelles. Pour le voir, dans ce cas "simple" où $n = 2$, on considère une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E. Alors la matrice de représentation de f dans cette base est symétrique, et donc du type

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} .$$

Par suite, le polynôme caractéristique de f vaut

$$\begin{aligned} P(X) &= (a - X)(c - X) - b^2 \\ &= X^2 - (a + c)X + (ac - b^2) . \end{aligned}$$

Son discriminant vaut $\Delta = (a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2$ qui est toujours positif ou nul. Donc P a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$. En d'autres termes, les valeurs propres de f sont toutes réelles.

Preuve de l'étape 2 : On affirme que si $f \in \mathrm{End}(E)$ est un endomorphisme symétrique de E, alors les sous espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux. Dans ce cas particulier où $n = 2$, soit f a une seule valeur propre, et il n'y a rien à démontrer, soit f a deux valeurs propres distinctes. On note λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres distinctes de f, et x et y deux vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2. Puisque f est symétrique,

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle \ ,$$

et donc

$$\big(\lambda_1 - \lambda_2\big)\langle x, y\rangle = 0$$

puisque

$$f(x) = \lambda_1 x \quad \text{et} \quad f(y) = \lambda_2 y \ .$$

Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, il suit que

$$\langle x, y\rangle = 0 \ .$$

D'où l'affirmation.

Preuve de l'étape 3 : On affirme que si $f \in \mathrm{End}(E)$ est un endomorphisme symétrique de E, alors E est la somme dirècte des sous espaces propres de f. Si f a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2, alors on sait déjà que E est somme (dirècte) des sous espaces propres de f. Si e_1 est un vecteur de norme 1 de E_{λ_1} et e_2 est un vecteur de norme 1 de E_{λ_2}, alors d'après l'étape 2, (e_1, e_2) est une base orthonormale de E. Dans cette base $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ est diagonale. Le théorème est démontré dans ce cas. Si maintenant f a une seule valeur propre λ_1, alors le discriminant Δ du polynôme caractéristique de f doit être nul. Etant donnée une base orthonormale $\mathcal{B}$, on a vu que dans cette base

$$\Delta = (a - c)^2 + 4b^2 \; .$$

Donc $a = c$ et $b = 0$. En d'autres termes,

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \; ,$$

et f est diagonalisable dans $\mathcal{B}$ qui est orthonormale. Le théorème est démontré. CQFD.

On commence par démontrer le résultat suivant.

Lemme

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Si $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$ sont deux bases orthonormales de E, alors la matrice $M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}$ de passage de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathcal{B}}$ est telle que $M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}^{-1} = {}^t M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}$. On dit encore que $M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}$ est une matrice orthogonale.

Preuve : Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de E. Pour $i, j = 1, \ldots, n$, on note de même

$$a_{ij} = \langle e_i, \tilde{e}_j \rangle$$

et on note Φ et Ψ les endomorphismes de E définis par

$$\Phi(e_i) = \tilde{e}_i \quad \text{et} \quad \Psi(\tilde{e}_i) = e_i$$

pour tout i. Alors

$$M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi) \quad \text{tandis que} \quad M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}^{-1} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Psi)\ .$$

Preuve suite et fin : Sachant que les coordonnées d'un vecteur X dans une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ sont exactement les $X_i = \langle X, e_i \rangle$, on voit que $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi) = (a_{ij})$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} e_j &= \sum_{i=1}^{n} \langle e_j, \tilde{e}_i \rangle \tilde{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \tilde{e}_i \end{aligned}$$

de sorte que

$$\Psi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} e_i \ .$$

On en déduit que $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Psi) = (a_{ji})$. Donc

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Psi) = {}^t M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi) \ ,$$

et le lemme est démontré. CQFD.

La transcription du théorème de ce chapitre, du language des endomorphismes symétriques au language des matrices, donne lieu au théorème suivant.

Théorème

Soit A une matrice réelle symétrique. Il existe alors une matrice orthogonale P, donc telle que $P^{-1} = {}^tP$, pour laquelle la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale. En particulier, une matrice symétrique est diagonalisable.

Preuve : Soit A une matrice symétrique $n \times n$. On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E, et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Par exemple, $E = \mathbb{R}^n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien, et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On construit l'endomorphisme $f \in \mathrm{End}(E)$ de E par

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = A \ .$$

Puisque A est symétrique, et $\mathcal{B}$ est orthonormale, f est aussi symétrique. Il existe donc, en vertue du théorème vu plus haut, Preuve suite et fin : une base orthonormale $\tilde{\mathcal{B}}$ de E qui diagonalise f, et donc pour laquelle $M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$ est diagonale. En vertue de la formule du changement de base vue dans les chapitres précédents,

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f) = M^{-1}_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}} \,.$$

Si $P = M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}$, alors P est orthogonale, à savoir $P^{-1} = {}^tP$, et la formule précédente nous dit que $P^{-1}AP$ est diagonale. D'où le théorème. CQFD.

A titre de remarque, il faut faire attention au language des matrices. En général on ne retient que la dernière affirmation du théorème (une matrice symétrique est diagonalisable) en oubliant l'information supplémentaire importante que la matrice qui "la diagonalise" peut-être choisie de sorte qu'elle soit orthogonale. Cela correspond au fait qu'un endomorphisme symétrique est diagonalisable <u>dans une base qui peut être choisie orthonormale</u>.

Lemme

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n muni d'un produit scalaire. Si $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$ sont deux bases de E, si $\mathcal{B}$ est orthonormale, et si $M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}$ est une matrice orthogonale, alors $\tilde{\mathcal{B}}$ est aussi une base orthonormale.

Preuve : On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire placé sur E, et on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$. Soit de plus Φ et Ψ les endomorphismes de E définis par

$$\Phi(e_i) = \tilde{e}_i \quad \text{et} \quad \Psi(\tilde{e}_i) = e_i$$

pour tout i. Alors $\Psi = \Phi^{-1}$, et $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi) = M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}$. En particulier,

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Psi) &= M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi)^{-1} && \text{(puisque } \Psi = \Phi^{-1}\text{)} \\ &= {}^t M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi) && \text{(puisque } M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}} \text{ est orthogonale)} \end{aligned}$$

et il suit que l'on a aussi $\Psi = \Phi^\star$, l'adjoint de Φ. Donc, pour tous $x, y \in E$,

$$\langle \Phi(x), y \rangle = \langle x, \Psi(y) \rangle \ .$$

Preuve suite et fin : En particulier, pour tous $i, j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_j \rangle &= \langle \Phi(e_i), \tilde{e}_j \rangle \\ &= \langle e_i, \Psi(\tilde{e}_j) \rangle \\ &= \langle e_i, e_j \rangle \ ,\end{aligned}$$

et puisque $\mathcal{B}$ est orthonormale, $\tilde{\mathcal{B}}$ l'est aussi. D'où la preuve du lemme. CQFD.

4. Preuve du théorème de diagonalisation dans le cas général

Une des principales difficultés dans le cas général, où la dimension n est quelconque, est de montrer que les valeurs propres d'un endomorphisme symétrique f sont toutes réelles. A titre de remarque, on donne une preuve "à la main " de ce fait lorsque $n = 3$.

Si $n = 3$, le polynôme caractéristique P de f est de degré 3. Donc de degré impair, de sorte que $P(x) \to \pm\infty$ lorsque $x \to \pm\infty$. De plus P est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit qu'il existe forcément $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ telle que $P(\lambda_1) = 0$. En particulier, f a au moins une valeur propre réelle. Soit e_1 un vecteur propre (non nul) associé à cette valeur propre λ_1. On complète e_1 par des vecteurs e_2, e_3 pour obtenir une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E. Si D est la droite vectorielle de base e_1, et si $F = Vect(e_2, e_3)$, alors

$$E = D \oplus F$$

Par ailleurs, puisque f est symétrique, et puisque $\mathcal{B}$ est orthonormale,

$$\begin{aligned}\langle f(e_2), e_1\rangle &= \langle e_2, f(e_1)\rangle \\ &= \lambda_1\langle e_2, e_1\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

De même

$$\langle f(e_3), e_1\rangle = 0$$

et on en déduit que la restriction $f_{|F}$ de f à F définit un endomorphisme de F. Notons $\tilde{\mathcal{B}} = (e_2, e_3)$. Alors $\tilde{\mathcal{B}}$ est une base orthonormale de F, et on vérifie facilement que

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f_{|F}) & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Comme f est symétrique, $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ est symétrique. On en déduit que $M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f_{|F})$ est aussi symétrique, et donc que $f_{|F}$ est un endomorphisme symétrique (car $\tilde{\mathcal{B}}$ est une base orthonormale).

Par ailleurs on voit que si P_E désigne le polynôme caractéristique de f, et si P_F désigne le polynôme caractéristique de $f_{|F}$, alors

$$P_E(X) = -(X - \lambda_1)P_F(X)$$

On ramène ainsi le cas de la dimension 3 à celui de la dimension 2, déjà traité ci-dessus. Puisque $M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f_{|F})$ est symétrique, P_F a toutes ses racines réelles. Par suite, P_E a aussi toutes ses racines réelles.

On revient au cas n quelconque et on montre successivement les trois points suivants :

Etape 1 - Les valeurs propres de f sont réelles
Etape 2 - Les sous espaces propres de f sont 2 à 2 orthogonaux
Etape 3 - E est somme (dirècte) des sous espaces propres de f

Par suite f est diagonalisable, qui plus est dans une base orthonormale de E.

Etape 1 : On affirme que si $f \in End(E)$ est un endomorphisme symétrique de E, alors les valeurs propres de f sont toutes réelles au sens où il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et des entiers $k_1, \dots, k_p$ pour lesquels le polynôme caractéristique P de f se décompose en

$$P(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{k_i}$$

Pour démonter cette affirmation, on fait un petit détour par les nombres complexes. Le tout est assez naturel dans la mesure où $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos, à savoir tel que les polynômes sur $\mathbb{C}$ ont toutes leurs racines dans $\mathbb{C}$. Le principe de preuve est alors le suivant : par le choix d'une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E,
1 - on définit un espace vectoriel complexe E^c qui étend E des réels aux complexes,
2 - on définit un endomorphisme f^c de E^c qui étend f,
3 - on construit le tout pour que f et f^c aient même polynôme caractéristique, et
4 - on montre que les valeurs propres de f^c, à priori complexes, sont en fait réelles.

Soit donc $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. On note E^c le "compléxifié" de E défini par

$$E^c = \left\{ \sum_{i=1}^{n} z_i e_i \ , \ z_i \in \mathbb{C} \right\}$$

que l'on munit des opérations

$$\left(\sum_{i=1}^{n} z_i e_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{z}_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (z_i + \hat{z}_i) e_i$$

$$\lambda \left(\sum_{i=1}^{n} z_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda z_i) e_i$$

pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors E^c muni de ces deux opérations est un espace vectoriel complexe (même définition que les espaces vectoriels réels, mais on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$). Clairement, E est un sous ensemble de E^c. On étend alors f de E à E^c en définissant un endomorphisme f^c de E^c (là encore, même définition que pour le cas réel, mais on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$). On pose

$$f^c\left(\sum_{i=1}^n z_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n z_i f(e_i)$$

Si $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = (a_{ij})$, de sorte que $f(e_j) = \sum_i a_{ij} e_i$, on a encore que

$$f^c\left(\sum_{i=1}^n z_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j\right) e_i$$

La restriction de f^c à E vaut f. On définit maintenant la forme hermitienne $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ sur E^c par

$$\langle \sum_{i=1}^n z_i^1 e_i, \sum_{i=1}^n z_i^2 e_i \rangle_c = \sum_{i=1}^n \overline{z_i^1} z_i^2$$

où si $z \in \mathbb{C}$, $\overline{z}$ est le conjugué de z. La restriction de $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ à $E \times E$ coïncide avec $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Comme f est symétrique, les a_{ij} sont symétriques au sens où $a_{ij} = a_{ji}$ (cf. section 1). Par définition même de tous ces objets, on a alors que

$$\langle f^c(\sum_{i=1}^n z_i^1 e_i), \sum_{i=1}^n z_i^2 e_i\rangle_c = \langle \sum_{i=1}^n z_i^1 e_i, f^c(\sum_{i=1}^n z_i^2 e_i)\rangle_c$$

pour tous $\sum_{i=1}^n z_i^1 e_i, \sum_{i=1}^n z_i^2 e_i \in E^c$. On trouve en effet que

$$\begin{aligned}\langle f^c(\sum_{i=1}^n z_i^1 e_i), \sum_{i=1}^n z_i^2 e_i\rangle_c &= \sum_{i,j=1}^n \overline{a_{ij} z_j^1} z_i^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \overline{z_i^1} z_j^2 \\ &= \langle \sum_{i=1}^n z_i^1 e_i, f^c(\sum_{i=1}^n z_i^2 e_i)\rangle_c\end{aligned}$$

Pour en finir avec ces généralités, $\mathcal{B}$ est encore une base de E^c (c'est fait pour), et on a que

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f^c) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$$

On admet ici le résultat suivant (l'analogue pour les espaces vectoriels complexes du résultat déjà vu dans ce cours pour les espaces vectoriels réels) : *Si E^c est un espace vectoriel complexe de dimension finie n, si $\mathcal{B}$ est une base de E^c, et si f^c est un endomorphisme de E^c, un nombre complexe λ est une valeur propre de f^c, au sens où il existe $x \in E^c \backslash \{0\}$ pour lequel $f^c(x) = \lambda x$, si et seulement si*

$$det\big(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f^c) - \lambda Id_n\big) = 0$$

où Id_n est la matrice identité $n \times n$. En d'autres termes, on admet que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de f^c si et seulement si elle annule le polynôme caractéristique de f^c. Dans notre cas, $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f^c) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$, et le polynôme caractéristique de f^c vaut donc le polynôme caractéristique de f. Un polynôme complexe a toutes ses racines dans $\mathbb{C}$ car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme caractéristique de f^c, ou encore de f (ce qui revient au même). Démontrer l'étape 1 consiste à démontrer que les $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont en fait des réels. Pour $j = 1, \ldots, p$, notons $x_j = \sum_{i=1}^n z_i^j e_i \in E^c \backslash \{0\}$ un vecteur propre de f^c associé à la valeur propre λ_j. On a vu que

$$\langle f^c(\sum_{i=1}^n z_i^j e_i), \sum_{i=1}^n z_i^j e_i\rangle_c = \langle \sum_{i=1}^n z_i^j e_i, f^c(\sum_{i=1}^n z_i^j e_i)\rangle_c$$

Or, par définition même de $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$, et puisque $f(x_j) = \lambda_j x_j$, on a que

$$\langle f^c(\sum_{i=1}^n z_i^j e_i), \sum_{i=1}^n z_i^j e_i\rangle_c = \overline{\lambda_j} \sum_{i=1}^n |z_i^j|^2$$

$$\langle \sum_{i=1}^n z_i^j e_i, f^c(\sum_{i=1}^n z_i^j e_i)\rangle_c = \lambda_j \sum_{i=1}^n |z_i^j|^2$$

Sachant que $\sum_{i=1}^n |z_i^j|^2 \neq 0$ puisque $x_j \neq 0$, on obtient que $\lambda_j = \overline{\lambda_j}$, et donc que λ_j est réel. Comme j est quelconque dans $\{1, \ldots, p\}$, il suit que les valeurs propres de f sont toutes réelles.

Etape 2 : On affirme que les sous espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux. Il s'agit là d'une affirmation simple à démontrer. Pour le voir, on note λ et μ deux valeurs propres distinctes de f, et x et y deux vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres λ et μ. Alors, puisque f est symétrique,

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$$

et donc

$$(\lambda - \mu)\langle x, y \rangle = 0$$

puisque $f(x) = \lambda x$ et $f(y) = \mu y$. Comme $\lambda \neq \mu$, c'est que $\langle x, y \rangle = 0$. L'affirmation suit.

Etape 3 : On affirme que si $f \in End(E)$ est un endomorphisme symétrique de E, alors E est la somme dirècte des sous espaces propres de f. On démontre cette affirmation par récurrence sur la dimension n de E. Pour mémoire, cf. le chapitre 3, on sait déjà que la somme des sous espaces propres est toujours dirècte. La seule chose qu'il y ait à démontrer est que cette somme vaut l'espace tout entier.

3.1. On démontre l'affirmation pour $n = 2$ (on l'a déjà fait, mais répétons tout de même l'argument). Soit donc E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 muni d'un produit scalaire, et $f \in End(E)$ un endomorphisme symétrique de E. Si f a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2, alors on sait déjà, cf. encore le chapitre 3, que E est somme (dirècte) des sous espaces propres de f. Si maintenant f a une seule valeur propre λ_1, et si E_1 est le sous espace propre associé à λ_1, on veut montrer que $E = E_1$. Notons e_1 un vecteur propre de f (pour λ_1). Sans perdre en généralité, quitte à diviser e_1 par sa norme, on peut supposer que $\|e_1\| = 1$ (où $\| \cdot \|$ est la norme associée au produit scalaire). On complète e_1

par un vecteur e_2 pour obtenir une base orthonormale (e_1, e_2) de E. Alors

$$\begin{aligned}\langle f(e_2), e_1\rangle &= \langle e_2, f(e_1)\rangle \\ &= \lambda_1\langle e_2, e_1\rangle\end{aligned}$$

puisque d'une part f est symétrique, et d'autre part e_1 est un vecteur propre de f pour λ_1. Par suite

$$\langle f(e_2), e_1\rangle = 0$$

et donc la première coordonnée de $f(e_2)$ dans (e_1, e_2) est nulle. On en déduit que

$$f(e_2) = \lambda e_2$$

pour un certain λ réel. Il suit que λ est valeur propre de f, et que e_2 est un vecteur propre de f. Donc $\lambda = \lambda_1$, puisque nous avons supposé que f a une seule valeur propre, et on a tout à la fois que $e_1 \in E_1$ et que $e_2 \in E_1$, de sorte que $E = E_1$. L'affirmation est vraie lorsque $n = 2$.

3.2. On suppose que l'affirmation est vraie pour tout espace vectoriel E de dimension $k \leq n$ et tout endomorphisme symétrique de E, et on démontre qu'elle est encore vraie pour tout espace vectoriel E de dimension $n+1$ et tout endomorphisme symétrique de E. On note E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n+1$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur E, $f \in End(E)$ un endomorphisme symétrique de E, et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de f. Soit E_1 le sous espace propre associé à la valeur propre λ_1. On note $F = E_1^\perp$ l'orthogonal de E_1. Alors

$$E = E_1 \oplus F$$

comme on l'a démontré au chapitre précédent. En particulier, $dimF \leq n$ (car $dimE_1 \geq 1$). Une affirmation simple est que la restriction $f_{|F}$ de f à F définit un endomorphisme de F. En d'autres termes que si $x \in F$ alors $f(x) \in F$. Pour le voir on considère une base orthonormale $(e_1, \dots, e_{n+1})$ de E ayant la propriété suivante : les premiers vecteurs de la base, disons les $(e_1, \dots, e_k)$, forment une base de E_1. Alors, on l'a déjà vu au chapitre précédent, les $(e_{k+1}, \dots, e_n)$ forment une base de F.

Dès lors, pour $i = 1, \ldots, k$ et pour $j = k+1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} \langle f(e_j), e_i \rangle &= \langle e_j, f(e_i) \rangle \\ &= \lambda_1 \langle e_j, e_i \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque f est symétrique, $f(e_i) = \lambda_1 e_i$, et la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormale. Une autre façon de dire les choses est que pour tout $j = k+1, \ldots, n$,

$$f(e_j) \in Vect(e_{k+1}, \ldots, e_n)$$

et donc que $f_{|F}$ réalise un endomorphisme de F. Par hypothèse de récurrence, puisque $dim F \leq n$, F est somme dirècte des espaces propres de $f_{|F}$. Afin de finir de démontrer l'affirmation de l'étape 3, puisque $E = E_1 \oplus F$, il nous reste donc à montrer que

(1) Valeurs propres de $f_{|F} = \left\{\lambda_2, \ldots, \lambda_p\right\}$, à savoir les valeurs propres de f hors λ_1,

et que pour tout $i = 2, \ldots, p$,

(2) Espace propre de $f_{|F}$ associé à $\lambda_i =$ Espace propre de f associé à λ_i.

Pour démontrer (1) et (2) on procède comme suit. Tout d'abord on remarque que les inclusions

(i) Valeurs propres de $f_{|F} \subset \{\lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$

(ii) Espace propre de $f_{|F}$ associé à $\lambda_i \subset$ Espace propre de f associé à λ_i

sont immédiates. Réciproquement, notons λ un des λ_i pour $i = 2, \ldots, p$. Soit de plus x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. On a vu à l'étape précédente que les sous espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux. Donc x est orthogonal à tous les vecteurs de E_1, ce qui signifie que $x \in F$. Donc x est aussi un vecteur propre de $f_{|F}$, et λ est valeur propre de $f_{|F}$. On en déduit, puisque x est un vecteur propre quelconque de f associé à l'une quelconque des valeurs propres $\lambda_2, \ldots, \lambda_p$ que les inclusions réciproques de (i) et (ii) sont vraies. Donc (1) et (2) sont vraies, et l'étape 3 est démontrée.

Reste pour démontrer le théorème 2.1 à collecter les informations des étapes 1 à 3. D'après l'étape 1, si f est un endomorphisme symétrique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, alors f a toutes ses valeurs propres réelles. D'après l'étape 2, les sous espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux. D'après l'étape 3, E est somme dirècte des sous espaces propres de f. On en déduit que f est diagonalisable. De plus, si les E_i, $i = 1, \dots, p$, sont les sous espaces propres de f, en notant $\mathcal{B}_i$ une base orthonormale de E_i, on obtient que

$$\mathcal{B} = \Big(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p\Big)$$

est une base orthonormale de E. Cette base diagonalise f : en d'autres termes, la matrice $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ de représentation de f dans $\mathcal{B}$ est diagonale. Le théorème est démontré.

Fin du chapitre 7