

Algèbre bilinéaire et Intégration

par

Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise

Année 2018-2019

Chapitre 5

Formes bilinéaires et quadratiques

1. Premières définitions

Définition

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Par définition, une forme bilinéaire sur E est une application $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie que pour tout $x_0 \in E$ et tout $y_0 \in E$, les applications

$$x \rightarrow B(x, y_0) \quad \text{et} \quad y \rightarrow B(x_0, y)$$

sont linéaires de E dans \mathbb{R} . La forme bilinéaire B est dite symétrique si $B(x, y) = B(y, x)$ pour tous $x, y \in E$.

En d'autres termes, une fonction $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire si la fonction est linéaire par rapport à chacune de ses variables. La plus simple des formes bilinéaires est la fonction $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $B(x, y) = xy$.

Une forme bilinéaire (non identiquement nulle) n'est jamais linéaire par rapport au couple (x, y) . Par exemple, pour $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $B(x, y) = xy$, on a que

$$B(x + x', y + y') \neq B(x, y) + B(x', y')$$

dès que $x'y + xy' \neq 0$ car

$$B(x + x', y + y') - B(x, y) - B(x', y') = x'y + xy' .$$

En dimension finie, ce qui sera notre cas, les formes bilinéaires sont par contre, comme les applications linéaires, représentables par des matrices. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n , et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit de plus $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E , et soit B_{ij} les réels

$$B_{ij} = B(e_i, e_j)$$

où $i, j = 1, \dots, n$. Si x et y sont deux vecteurs de E de coordonnées respectives (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) dans \mathcal{B} , donc $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, alors

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^n B_{ij}x_iy_j .$$

Pour démontrer cette relation on écrit que

$$\begin{aligned} B(x, y) &= B\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i B\left(e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j B(e_i, e_j) \end{aligned}$$

puisque pour tout $x_0 \in E$ et tout $y_0 \in E$, les applications

$$x \rightarrow B(x, y_0) \quad \text{et} \quad y \rightarrow B(x_0, y)$$

sont linéaires sur E . D'un point de vue matriciel cela donne lieu à la définition suivante.

Définition

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n , et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit de plus $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E . Par définition, la matrice de B dans la base \mathcal{B} , notée $M_{\mathcal{B}}(B)$, est la matrice $M_{\mathcal{B}}(B) = (B_{ij})_{i,j}$ carrée d'ordre n composée des

$$B_{ij} = B(e_i, e_j) .$$

Elle caractérise B en ce sens que pour tous x et y dans E ,

$$B(x, y) = {}^t V_{\mathcal{B}}(x) M_{\mathcal{B}}(B) V_{\mathcal{B}}(y) ,$$

où $V_{\mathcal{B}}(x)$ et $V_{\mathcal{B}}(y)$ représentent les matrices colonnes composées respectivement des coordonnées de x et y dans \mathcal{B} , et où ${}^t V_{\mathcal{B}}(x)$ est la matrice ligne transposée de $V_{\mathcal{B}}(x)$.

D'un point de vue matriciel on a écrit que

$$B(x, y) = (x_1 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & \dots & B_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

et , comme on s'en convaincra facilement, on retrouve la relation déjà vue

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^n B_{ij} x_i y_j .$$

2. Changement de base

Théorème

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ deux bases de E , et $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E . Soit $P = M_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}}$ la matrice de passage de \mathcal{B} à $\tilde{\mathcal{B}}$. Alors

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}}(B) = {}^t P M_{\mathcal{B}}(B) P ,$$

où $M_{\mathcal{B}}(B)$ est la matrice de B dans la base \mathcal{B} , et $M_{\tilde{\mathcal{B}}}(B)$ est la matrice de B dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$.

Preuve : Etant donné $x \in E$, soient $V_{\mathcal{B}}(x)$ et $V_{\tilde{\mathcal{B}}}(x)$ les matrices colonnes composées respectivement des coordonnées de x dans \mathcal{B} et des coordonnées de x dans $\tilde{\mathcal{B}}$. Pour x et y deux vecteurs quelconques de E , on a

$$B(x, y) = {}^t V_{\mathcal{B}}(x) M_{\mathcal{B}}(B) V_{\mathcal{B}}(y) ,$$

Preuve suite et fin : et

$$B(x, y) = {}^t V_{\tilde{B}}(x) M_{\tilde{B}}(B) V_{\tilde{B}}(y) .$$

De plus, $V_B(x) = P V_{\tilde{B}}(x)$, et $V_B(y) = P V_{\tilde{B}}(y)$. On peut ainsi écrire que

$$\begin{aligned} B(x, y) &= {}^t V_B(x) M_B(B) V_B(y) \\ &= {}^t V_{\tilde{B}}(x) ({}^t P M_B(B) P) V_{\tilde{B}}(y) \\ &= {}^t V_{\tilde{B}}(x) M_{\tilde{B}}(B) V_{\tilde{B}}(y) . \end{aligned}$$

Puisque x et y sont quelconques, cela impose

$$M_{\tilde{B}}(B) = {}^t P M_B(B) P ,$$

comme on le voit en prenant successivement des x et y de coordonnées dans \tilde{B} des n -uplets du type $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Le théorème est démontré. CQFD.

3. Dualité

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Le dual de E , noté E^* , est par définition l'espace $L(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur E .

Théorème

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n , et soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . Pour $i = 1, \dots, n$, on définit les éléments $e_i^ \in E^*$ par :*

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$$

pour tout $j = 1, \dots, n$, où les δ_{ij} sont les symboles de Kroenecker. La famille (e_1^, \dots, e_n^*) est alors une base de E^* , dite base duale de la base (e_1, \dots, e_n) . En particulier, E et E^* ont même dimension.*

Preuve : Il suffit de montrer que la famille (e_1^*, \dots, e_n^*) est à la fois libre et génératrice dans E^* . On montre tout d'abord que la famille est libre. Supposons que pour des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$,

$$\lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^* = 0 .$$

Preuve suite et fin : Alors pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$\lambda_1 e_1^*(e_i) + \dots + \lambda_n e_n^*(e_i) = 0 ,$$

ce qui donne que $\lambda_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$ puisque $e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$. La famille est donc bien libre. On vérifie par ailleurs que la famille est génératrice en remarquant que pour tout $f \in E^*$,

$$f = \sum_{i=1}^n f(e_i) e_i^* .$$

Le membre de gauche et le membre de droite de cette identité sont en effet deux applications linéaires qui coïncident sur la base (e_1, \dots, e_n) , et si deux applications linéaires coïncident sur une même base, alors elles sont identiquement égales. Le théorème est démontré. CQFD.

Théorème

*Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Alors E^{**} s'assimile naturellement à E au sens où il existe un isomorphisme naturel de E dans E^{**} . Cet isomorphisme Φ est défini par : pour tout $x \in E$, $\Phi(x)$ est l'élément de $E^{**} = L(E^*, \mathbb{R})$ défini par la relation $\Phi(x).(f) = f(x)$ pour tout $f \in E^*$.*

Preuve : Il suit du théorème précédent que E^{**} a même dimension que E^* , qui a à son tour même dimension que E . Donc E et E^{**} ont mêmes dimensions. Pour montrer que $\Phi : E \rightarrow E^{**}$ est un isomorphisme de E sur E^{**} il nous suffit donc de montrer que Φ est injective (on passe sur le fait que Φ est bien linéaire, ce qui est immédiat). Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , et soit (e_1^*, \dots, e_n^*) sa base duale. Si $x = \sum_j x_j e_j$ est tel que $\Phi(x) = 0$, alors $\Phi(x).(e_i^*) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Donc $e_i^*(x) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Or $e_i^*(x) = x_i$, de sorte que si $\Phi(x) = 0$, alors $x = 0$. D'où le théorème. CQFD.

3. Rang d'une forme bilinéaire

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel, et $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E . On note B_1 et B_2 les applications de E dans E^* définies par : pour tout $x \in E$, $B_1(x)$ est défini par

$$B_1(x).(y) = B(x, y), \quad \forall y \in E$$

et, pour tout $y \in E$, $B_2(y)$ est défini par

$$B_2(y).(x) = B(x, y), \quad \forall x \in E.$$

On vérifie facilement que B_1 et B_2 sont linéaires, ce que l'on peut encore écrire sous la forme $B_1 \in L(E, E^*)$ et $B_2 \in L(E, E^*)$.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de \mathcal{B} . Soit $\eta \in E^*$, et soient η_1, \dots, η_n les coordonnées de η dans \mathcal{B}^* . On a alors l'égalité $\eta = \sum_{j=1}^n \eta_j e_j^*$, et on obtient que $\eta(e_i) = \eta_i$ pour tout i (puisque $e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$). Les coordonnées d'une forme η dans la base duale \mathcal{B}^* sont les $\eta_i = \eta(e_i)$. On démontre la proposition suivante.

Proposition

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, \mathcal{B} une base de E , et $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E . Les trois quantités r_1, r_2, r_3 définies par :

- (i) r_1 vaut le rang de B_1 , application linéaire de E dans E^* ,
 - (ii) r_2 vaut le rang de B_2 , application linéaire de E dans E^* , et
 - (iii) r_3 vaut le rang de la matrice de B dans \mathcal{B} ,
- sont en fait égales.

Preuve : Notons \mathcal{B}^* la base duale de \mathcal{B} , et $M_{\mathcal{B}}(B)$ la matrice de B dans \mathcal{B} . On vérifie facilement que

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}^*}(B_1) = M_{\mathcal{B}}(B) ,$$

où $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}^*}(B_1)$ est la matrice de représentation de B_1 dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}^* . En effet, les coordonnées de $B_1(e_i)$ dans \mathcal{B}^* sont (cf. ci-dessus) les $B_1(e_i).(e_j)$, à savoir exactement les B_{ij} .

Preuve suite et fin : De la même façon, on vérifie facilement que

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}^*}(B_2) = {}^t M_{\mathcal{B}}(B) ,$$

où $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}^*}(B_2)$ est la matrice de représentation de B_2 dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}^* . En remarquant que les rangs d'une matrice et de sa transposée sont égaux (c'est évident avec la définition du rang via le déterminant des sous matrices), on obtient la proposition avec ce qui a été dit au chapitre précédent sur les rangs d'une application linéaire et de ses matrices de représentations. CQFD.

Définition

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, \mathcal{B} une base de E , et $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E . Le rang de B , noté $Rg(B)$, est l'une des trois quantités équivalentes de la proposition précédente. Il ne dépend pas du choix de la base \mathcal{B} si on applique (iii).

4. Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Définition

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Une forme quadratique sur E est une application $Q : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui s'exprime, dans chaque base de E , sous la forme d'un polynôme homogène de degré 2 des variables coordonnées.

En d'autres termes, $Q : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique si, pour tout base \mathcal{B} de E , il existe des réels a_{ij} tels que

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j, \quad (*)$$

où n est la dimension de E , et les x_i sont les coordonnées de x dans \mathcal{B} . On vérifie facilement que si $(*)$ est vérifiée dans une base \mathcal{B} , elle l'est aussi (avec des a_{ij} différents !) dans toute autre base $\tilde{\mathcal{B}}$ de E . En effet, l'expression de coordonnées \tilde{x}_i dans une base, en fonction des coordonnées x_i dans une autre base, est linéaire.

Théorème

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Une fonction $Q : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique sur E si et seulement si :

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$, et

(ii) l'application $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$B(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y))$$

est bilinéaire sur E .

Dans ce cas, B est symétrique, on a $B(x, x) = Q(x)$ pour tout x , et on dit que B est la forme bilinéaire associée à Q .

Un modèle de forme quadratique est $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $Q(x) = x^2$. La forme bilinéaire associée est $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $B(x, y) = xy$. L'identité de (ii) est l'identité remarquable

$$xy = \frac{1}{2} ((x + y)^2 - x^2 - y^2) .$$

Une identité comme (ii) nous dit que l'on connaît tous les doubles produits dès lors que l'on connaît tous les carrés.

Preuve : Si Q est une forme quadratique, (i) est bien évidemment vérifiée. Par ailleurs, si \mathcal{B} est une base de E , et si Q s'écrit dans \mathcal{B} sous la forme (\star) , alors le B donné par (ii) vaut

$$B(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} + a_{ji}) x_i y_j$$

où les x_i et y_j sont les coordonnées de x et y dans \mathcal{B} . Il suit que (ii) est elle aussi vérifiée, à savoir que B est bien bilinéaire, si Q est quadratique. Réciproquement, supposons que (i) et (ii) soient vérifiées. En écrivant que

$$B(x, x) = \frac{1}{2} (Q(2x) - 2Q(x)) ,$$

et en utilisant (i), on voit que $Q(x) = B(x, x)$. Etant donnée une base \mathcal{B} de E , composée de vecteurs e_i , et puisque B est bilinéaire, il existe des $a_{ij} = B(e_i, e_j)$ tels que

$$B(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j ,$$

où les x_i et y_j sont les coordonnées de x et y dans \mathcal{B} .

Preuve suite et fin : Il s'ensuit que

$$Q(x) = \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j ,$$

ce qui montre que Q est bien une forme quadratique. Le théorème est démontré. CQFD.

Avec ce théorème on obtient une autre définition possible des formes quadratiques. A savoir : une application $Q : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique sur E s'il existe une forme bilinéaire symétrique B sur E pour laquelle $Q(x) = B(x, x)$. Dans ce cas B est unique et on dit alors que B est la forme bilinéaire associée à la forme quadratique Q , ou que Q est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire B .

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n . On vérifie facilement qu'une forme bilinéaire B sur E est symétrique si et seulement si, pour toute base de E , sa matrice dans cette base est symétrique.

5. Orthogonalité

Définition

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et B une forme bilinéaire symétrique sur E . On dit que deux vecteurs x et y de E sont B -orthogonaux si $B(x, y) = 0$. Si A est un sous ensemble de E , le B -orthogonal de A , noté $A^{\perp B}$, est défini par

$$A^{\perp B} = \{y \in E / \forall x \in A, B(x, y) = 0\} .$$

En d'autres termes, $A^{\perp B}$ est l'ensemble des vecteurs de E qui sont B -orthogonaux à tous les vecteurs de A .

On vérifie facilement que pour tout sous ensemble A de E , $A^{\perp B}$ est un sous espace vectoriel de E . On pourra par ailleurs vérifier que les relations suivantes sont vraies :

- (i) $\forall A \subset B \subset E, B^{\perp B} \subset A^{\perp B},$
- (ii) $\forall A, B \subset E, (A \cup B)^{\perp B} = A^{\perp B} \cap B^{\perp B},$
- (iii) $\forall A, B \subset E, A^{\perp B} + B^{\perp B} \subset (A \cap B)^{\perp B},$
- (iv) $\forall A \subset E, A^{\perp B} = \text{Vect}(A)^{\perp B},$ et
- (v) $\forall A \subset E, A \subset (A^{\perp B})^{\perp B}.$

Définition

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, (e_1, \dots, e_n) une base de E , et B une forme bilinéaire symétrique sur E . On dit que la base (e_1, \dots, e_n) est B -orthogonale si pour tous $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$, $B(e_i, e_j) = 0$. La base est dite B -orthonormale si pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $B(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, où les δ_{ij} sont les symboles de Kroenecker.

Une base B -orthonormale est une base B -orthogonale pour laquelle on a en plus que $B(e_i, e_i) = 1$ pour tout i .

Théorème

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Pour toute forme bilinéaire symétrique B sur E , il existe une base de E qui est B -orthogonale.

Preuve : Notons n la dimension de E . On démontre le théorème par récurrence sur n . Si $n = 1$, le théorème est trivialement vrai. On suppose maintenant que pour tout \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n , et toute forme bilinéaire symétrique B sur cet espace, il existe une base de l'espace qui soit B -orthogonale. On considère alors E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $n + 1$, et B une forme bilinéaire symétrique sur E . On veut montrer que E possède une base B -orthogonale. Sans perdre en généralité, on pourra supposer que B n'est pas la forme bilinéaire nulle (auquel cas le résultat est vrai, toute base de E étant B -orthogonale). Si B n'est pas identiquement nulle, il existe un vecteur e_{n+1} de E pour lequel $Q(e_{n+1}) \neq 0$, où Q est la forme quadratique associée à B . En effet, si $Q \equiv 0$ alors $B \equiv 0$. On note F le sous espace vectoriel

Preuve suite : (la droite vectorielle) de E de base e_{n+1} , et on note $F^{\perp B}$ le B -orthogonal de F . Alors

$$F^{\perp B} = \{x \in E / B(e_{n+1}, x) = 0\} ,$$

de sorte que $F^{\perp B} = \text{Ker}B(e_{n+1}, \cdot)$, où $B(e_{n+1}, \cdot)$ est la forme linéaire sur E qui à x associe $B(e_{n+1}, x)$. Cette forme linéaire est surjective, puisque non nulle, et donc de rang 1. Il suit du théorème du rang que son noyau est de dimension n , et donc que $F^{\perp B}$ est de dimension n . On vérifie facilement que $F \cap F^{\perp B} = \{0\}$. En effet, si $x \in F \cap F^{\perp B}$, alors $x \in F$ entraîne que $x = \lambda e_{n+1}$, tandis que $x \in F$ et $x \in F^{\perp B}$ entraînent que x doit être B -orthogonal à lui-même, et donc que $B(x, x) = 0$. Or $B(\lambda e_{n+1}, \lambda e_{n+1}) = \lambda^2 B(e_{n+1}, e_{n+1})$ de sorte que nécessairement $\lambda = 0$, et donc $x = 0$ (puisque $Q(e_{n+1}) = B(e_{n+1}, e_{n+1}) \neq 0$). Comme $\dim F = 1$, $\dim F^{\perp B} = n$, $\dim E = n + 1$, et $F \cap F^{\perp B} = \{0\}$, on a que

$$E = F \oplus F^{\perp B} .$$

Preuve suite et fin : Par hypothèse de récurrence, il existe une base (e_1, \dots, e_n) de $F^{\perp B}$ qui est B -orthogonale. Puisque $E = F \oplus F^{\perp B}$, (e_1, \dots, e_{n+1}) est une base de E . Par ailleurs, cette base est B -orthogonale puisque $e_{n+1} \in F$ et les e_i , $i = 1, \dots, n$, sont dans $F^{\perp B}$. On a donc montré que si la propriété d'existence d'une base B -orthogonale est vraie en dimension n , alors elle l'est aussi en dimension $n + 1$. Cela démontre le théorème par récurrence. CQFD.

A titre de remarque, il n'existe pas toujours, pas forcément de base B -orthonormale. Un contre exemple (extrême) est donné par le cas de la forme bilinéaire nulle.

Définition

Si Q est une forme quadratique sur un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, on appelle rang de Q le rang de la forme bilinéaire symétrique qui lui est associée.

6. Le théorème de Sylvester

Théorème (Loi d'inertie de Sylvester)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n , et Q une forme quadratique de rang r sur E . Il existe alors un entier $p \leq r$, et une base \mathcal{B} de E , de sorte que, pour tout $x \in E$ de coordonnées (x_1, \dots, x_n) dans \mathcal{B} ,

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 .$$

De plus, p ne dépend que de Q et pas de \mathcal{B} au sens où s'il existe une autre base $\tilde{\mathcal{B}}$ de E , et un entier $\tilde{p} \leq r$, tels que pour tout $x \in E$ de coordonnées $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ dans $\tilde{\mathcal{B}}$,

$$Q(x) = \tilde{x}_1^2 + \dots + \tilde{x}_{\tilde{p}}^2 - \tilde{x}_{\tilde{p}+1}^2 - \dots - \tilde{x}_r^2 ,$$

alors, nécessairement, $\tilde{p} = p$.

En d'autres termes, pour toute forme quadratique sur un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension finie, il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle Q s'écrit sous la forme

$$Q(x) = \sum_{\text{sur certains } i} x_i^2 - \sum_{\text{sur d'autres } i} x_i^2 .$$

En ce qui concerne la terminologie, l'entier p du théorème permet de définir ce que l'on appelle la signature de Q .

Définition

Une forme quadratique Q est dite de signature (p, q) si $p + q = \text{Rg}(Q)$, et s'il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle

$$Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2 .$$

La signature est indépendante de la base.

On démontre maintenant le théorème de Sylvester.

Preuve : (1) On montre pour commencer qu'il existe un entier $p \leq r$ et une base de E de sorte que, dans cette base, Q s'écrive comme dans le théorème de Sylvester. Pour cela, on note B la forme bilinéaire associée à Q , et on considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base B -orthogonale de E . La matrice de B dans \mathcal{B} est alors diagonale, puisque $B(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$. Notons $\lambda_i = Q(e_i)$, $i = 1, \dots, n$, les termes sur la diagonale de la matrice $M_{\mathcal{B}}(B)$ de B dans \mathcal{B} . Il est clair que

$$\text{Rg}(M_{\mathcal{B}}(B)) = \text{Nombre de } \lambda_i \text{ non nuls.}$$

Si on note $r = \text{Rg}(B)$, et quitte à permuter les vecteurs e_i , on peut supposer que $\lambda_i \neq 0$ si $i \leq r$, et $\lambda_i = 0$ si $i = r + 1, \dots, n$. Si x a pour coordonnées (x_1, \dots, x_n) dans \mathcal{B} , on a que

$$Q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2.$$

Preuve suite : Soit p le nombre de λ_i strictement positifs. Toujours quitte à permuter les e_i , on peut supposer que

$$\lambda_i > 0 \text{ si } 1 \leq i \leq p,$$

$$\lambda_i < 0 \text{ si } p + 1 \leq i \leq r .$$

On pose

$$\mu_i = \sqrt{\lambda_i} \text{ si } 1 \leq i \leq p,$$

$$\mu_i = \sqrt{-\lambda_i} \text{ si } p + 1 \leq i \leq r .$$

et on pose ensuite

$$\tilde{e}_i = \frac{1}{\mu_i} e_i \text{ si } 1 \leq i \leq r,$$

$$\tilde{e}_i = e_i \text{ si } r + 1 \leq i \leq n .$$

Alors $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ est une base B -orthogonale de E , ce qui se vérifie facilement en se souvenant que \mathcal{B} l'est.

Preuve suite : Par suite, si x a pour coordonnées $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ dans $\tilde{\mathcal{B}}$, alors,

$$Q(x) = \sum_{i=1}^p \tilde{x}_i^2 - \sum_{i=p+1}^r \tilde{x}_i^2$$

puisque $Q(\tilde{e}_i) = 1$ si $1 \leq i \leq p$, et $Q(\tilde{e}_i) = -1$ si $p+1 \leq i \leq r$.
Cela démontre la première partie du théorème de Sylvester.

(2) On démontre maintenant la seconde partie du théorème de Sylvester. On suppose qu'il existe deux entiers p, \tilde{p} , et deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ de E tels que, dans \mathcal{B} et dans $\tilde{\mathcal{B}}$,

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$$

et

$$Q(x) = \tilde{x}_1^2 + \dots + \tilde{x}_{\tilde{p}}^2 - \tilde{x}_{\tilde{p}+1}^2 - \dots - \tilde{x}_r^2 .$$

Preuve suite et fin : On note

E_1 le sous espace vectoriel de E de base (e_1, \dots, e_p) ,

E_2 le sous espace vectoriel de E de base (e_{p+1}, \dots, e_n) ,

\tilde{E}_1 le sous espace vectoriel de E de base $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{\tilde{p}})$,

\tilde{E}_2 le sous espace vectoriel de E de base $(\tilde{e}_{\tilde{p}+1}, \dots, \tilde{e}_n)$.

On a clairement que

$$Q(x) > 0 \text{ si } x \in E_1 \setminus \{0\},$$

$$Q(x) \leq 0 \text{ si } x \in E_2,$$

$$Q(x) > 0 \text{ si } x \in \tilde{E}_1 \setminus \{0\},$$

$$Q(x) \leq 0 \text{ si } x \in \tilde{E}_2.$$

On en déduit que

$$E_1 \cap \tilde{E}_2 = \{0\} \quad \text{et} \quad \tilde{E}_1 \cap E_2 = \{0\},$$

de sorte que, par propriété de la dimension d'une somme directe,

$$\dim E_1 + \dim \tilde{E}_2 \leq n \quad \text{et} \quad \dim \tilde{E}_1 + \dim E_2 \leq n.$$

La première de ces deux inégalités entraîne que $p \leq \tilde{p}$. La seconde entraîne que $\tilde{p} \leq p$. On en déduit que $\tilde{p} = p$. La seconde partie du théorème de Sylvester est démontrée. CQFD.

Corollaire

Si Q_1 et Q_2 sont deux formes quadratiques sur un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, et si Q_1 et Q_2 ont même signature, alors il existe $\Phi \in \text{End}(E)$ un isomorphisme de E tel que $Q_2(x) = Q_1(\Phi(x))$ pour tout $x \in E$. Réciproquement, s'il existe un isomorphisme Φ de E tel que $Q_2(x) = Q_1(\Phi(x))$ pour tout $x \in E$, alors Q_1 et Q_2 ont même signature.

Preuve : Si Q_1 et Q_2 ont même signature (p, q) , il existe, en vertu du théorème de Sylvester, deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ de E telles que, dans ces bases,

$$Q_1(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2,$$

$$Q_2(x) = \tilde{x}_1^2 + \dots + \tilde{x}_p^2 - \tilde{x}_{p+1}^2 - \dots - \tilde{x}_r^2.$$

Soit Φ l'isomorphisme de E qui envoie \tilde{e}_i sur e_i . Alors pour tout $x = \sum_i \tilde{x}_i \tilde{e}_i$ dans E ,

$$Q_1(\Phi(x)) = Q_2(x).$$

Cela démontre la première partie du corollaire.

Preuve suite : Réciproquement, on considère Q_1 et Q_2 deux formes quadratiques sur E , et Φ un isomorphisme de E tels que $Q_2(x) = Q_1(\Phi(x))$ pour tout $x \in E$. Soit (p, q) la signature de Q_2 . Soit de plus $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ une base de E telle que, dans cette base,

$$Q_2(x) = \tilde{x}_1^2 + \dots + \tilde{x}_p^2 - \tilde{x}_{p+1}^2 - \dots - \tilde{x}_r^2 .$$

On note \mathcal{B} la base de E formée des $e_i = \Phi(\tilde{e}_i)$. C'est bien une base puisque (cf. les cours précédents) les isomorphismes envoient les bases sur des bases. On a alors

$$\begin{aligned} Q_1\left(\sum_i x_i e_i\right) &= Q_1\left(\Phi\left(\sum_i x_i \tilde{e}_i\right)\right) \\ &= Q_2\left(\sum_i x_i \tilde{e}_i\right) \\ &= x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 . \end{aligned}$$

Preuve suite et fin : On en déduit que, dans \mathcal{B} , Q_1 s'écrit sous la forme

$$Q_1(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2 ,$$

et donc que Q_1 est aussi de signature (p, q) . Cela démontre la seconde partie du corollaire. CQFD.

Deux formes quadratiques Q_1 et Q_2 sur un \mathbb{R} -espace vectoriel E sont dites **équivalentes** s'il existe un isomorphisme $\Phi \in \text{End}(E)$ de E qui est tel que $Q_2(x) = Q_1(\Phi(x))$ pour tout $x \in E$. Une formulation équivalente du corollaire est que : **deux formes quadratiques sur un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes si et seulement si elles ont même signature.**

Fin du chapitre 5