

Algèbre bilinéaire et Intégration

par

Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise

Année 2018-2019

Chapitre 3

Diagonalisation

On continue de ne considérer que le cas d'espaces vectoriels réels. Là encore (là surtout) une théorie analogue existe pour les espaces vectoriels complexes. On commence par traiter du point de vue des endomorphismes, pour traiter ensuite du point de vue des matrices. La question générale qui est posée est la suivante :

Question

Etant donné un endomorphisme f d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension finie, parmi toutes les représentations possibles $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ de f , où \mathcal{B} est une base de E , y en a-t-il une qui soit plus pertinente, plus esthétique, plus facile à manier que les autres ?

Dans une théorie de diagonalisation, la représentation plus pertinente que l'on cherche est une représentation diagonale. La question devient donc : “parmi toutes les représentations possibles $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ de f , y en a-t-il une qui soit diagonale” ?

1. Le cas des endomorphismes

Définition

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \text{End}(E)$ un endomorphisme de E . On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur $u \in E$, $u \neq 0$, tel que

$$f(u) = \lambda u .$$

Dans ce cas, u est dit vecteur propre de f associé à la valeur propre λ . Si λ est une valeur propre de f , on note E_λ l'espace propre de f associé à λ , défini par $E_\lambda = \{u \in E / f(u) = \lambda u\}$.

Proposition

E_λ est un sous espace vectoriel de E .

Preuve : Soient $x, y \in E_\lambda$ et $t \in \mathbb{R}$ quelconques, alors $f(x + ty) = f(x) + tf(y) = \lambda x + t\lambda y = \lambda(x + ty)$ et donc $x + ty \in E_\lambda$. CQFD.

Théorème

Un réel λ est valeur propre d'un endomorphisme f si et seulement si l'endomorphisme $f - \lambda Id_E$ n'est pas inversible. Dans ce cas,

$$E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda Id_E) ,$$

où $f - \lambda Id_E$ est l'endomorphisme de E défini pour tout $x \in E$ par $(f - \lambda Id_E)(x) = f(x) - \lambda x$.

Preuve : Il suffit de se souvenir qu'un endomorphisme $g \in \text{End}(E)$ (ici $g = f - \lambda Id_E$) est inversible si et seulement si il est injectif, et donc si et seulement si $\text{Ker}(g) = \{0\}$. Et bien évidemment dire qu'il existe $u \neq 0$ tel que $f(u) = \lambda u$ équivaut à dire que $\text{Ker}(f - \lambda Id_E) \neq \{0\}$. Il est ensuite facile de voir que $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda Id_E)$. CQFD.

Définition

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \text{End}(E)$ un endomorphisme de E . Soit \mathcal{B} une base de E . On appelle polynôme caractéristique de f le polynôme

$$P(X) = \det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) - X\text{Id}_n)$$

pour tout $X \in \mathbb{R}$.

Théorème

Le polynôme caractéristique de f ne dépend pas du choix de la base \mathcal{B} . C'est un polynôme de degré n dont le terme dominant est $(-1)^n X^n$. Il est suivi du terme $(-1)^{n-1} \text{tr}(f) X^{n-1}$, où $\text{tr}(f)$ est la trace de l'endomorphisme f , et son terme constant vaut $\det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f))$, une quantité qui ne dépend pas de \mathcal{B} .

Puisque la quantité ne dépend pas du choix de \mathcal{B} , notons $\det(f)$ pour $\det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f))$. On a alors

$$P(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(f) X^{n-1} + a_{n-2} X^{n-2} + \dots + a_1 X + \det(f)$$

pour tout $X \in \mathbb{R}$, où les a_1, a_2, \dots, a_{n-2} sont des réels qui ne dépendent que de f .

Preuve : (1) On montre que P ne dépend pas de \mathcal{B} et donc que $\det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)) = P(0)$ ne dépend pas non plus de \mathcal{B} . Si $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont deux bases de E , et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} \det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) - \lambda \operatorname{Id}_n) &= \det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)) , \\ \det(M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f) - \lambda \operatorname{Id}_n) &= \det(M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)) . \end{aligned}$$

On remarquera ici que $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\operatorname{Id}_E) = \operatorname{Id}_n$ pour toute base \mathcal{B} . Si $g \in \operatorname{End}(E)$ est un endomorphisme de E on a, cf. Chapitre 2, que

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(g) = M_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g) M_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} .$$

On en déduit que

Preuve suite :

$$\begin{aligned}\det(M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(g)) &= \det(M_{\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{B}'}^{-1}) \det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g)) \det(M_{\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{B}'}) \\ &= \frac{1}{\det(M_{\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{B}'})} \det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g)) \det(M_{\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{B}'}) \\ &= \det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g)) .\end{aligned}$$

D'où l'affirmation que ni P ni $\det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f))$ ne dépendent de \mathcal{B} .

(2) On montre que P est bien un polynôme de degré n et on calcule les coefficients a_n , a_{n-1} et a_0 de P . On a

$$P(X) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} \varepsilon(\sigma) (a_{1\sigma(1)} - X\delta_{1\sigma(1)}) \cdots (a_{n\sigma(n)} - X\delta_{n\sigma(n)}) ,$$

où les a_{ij} sont les coefficients de $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$. Donc P est bien un polynôme de degré n . Le terme en X^n et aussi le terme en X^{n-1} sont forcément donnés par la permutation $\sigma = \text{identité}$. En effet, sinon (si $\sigma \neq \text{identité}$) alors au moins deux éléments bougent, donc il existe $i \neq j$ tels que $\sigma(i) \neq i$ et $\sigma(j) \neq j$, donc $\delta_{i\sigma(i)} = \delta_{j\sigma(j)} = 0$ pour ces deux i et j , et alors le produit correspondant $(a_{1\sigma(1)} - X\delta_{1\sigma(1)}) \cdots (a_{n\sigma(n)} - X\delta_{n\sigma(n)})$ est au plus de degré $n-2$.

Preuve suite et fin : Une fois identifié que les termes d'ordres n et $n - 1$ proviennent de $\sigma = \text{identité}$ on a que

$$(a_{1\sigma(1)} - X\delta_{1\sigma(1)}) \dots (a_{n\sigma(n)} - X\delta_{n\sigma(n)}) = (a_{11} - X) \dots (a_{nn} - X)$$

et on voit que le terme d'ordre n est $(-1)^n X^n$ tandis que le terme d'ordre $n - 1$ est $(-1)^{n-1} (\sum_{i=1}^n a_{ii}) X^{n-1}$. Il est enfin facile de voir que le terme constant a_0 dans P est $P(0)$, qui vaut $\det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f))$. D'où le théorème. CQFD

Théorème

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n , $f \in \text{End}(E)$ un endomorphisme de E et P son polynôme caractéristique. Alors $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de f si et seulement si λ est racine de P (donc si et seulement si $P(\lambda) = 0$). En particulier, f a au plus n valeurs propres distinctes.

Preuve : On sait que λ est valeur propre de f si et seulement si $f - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas inversible. Etant donné \mathcal{B} une base de E , un

Preuve suite : endomorphisme $g \in \text{End}(E)$ est inversible si et seulement si $\det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g)) \neq 0$. Donc $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de f si et seulement si $\det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) - \lambda \text{Id}_n) = 0$, ce qui revient à dire que λ est une racine de P . Un polynôme de degré n ayant au plus n racines distinctes, le théorème est démontré. CQFD.

Remarque : une grosse différence avec la théorie complexe est que \mathbb{C} est un corps algébriquement clos. En d'autres termes, un polynôme se factorise toujours dans \mathbb{C} et a donc toujours n racines (distinctes ou pas) dans \mathbb{C} , alors qu'un polynôme peut très bien n'avoir aucune racine dans \mathbb{R} (c'est le cas de $P(X) = X^2 + 1$). Un endomorphisme peut du coup ne pas avoir de valeurs propres dans \mathbb{R} . Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 dont la matrice de représentation $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ dans la base canonique de \mathbb{R}^2 vaut

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Cet endomorphisme a pour polynôme caractéristique $P(X) = X^2 + 1$, et il n'a donc pas de valeurs propres dans \mathbb{R} .

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice. On dit que A est diagonale si $a_{ij} = 0$ dès que $i \neq j$. Donc A est une matrice diagonale si A ne comporte que des termes diagonaux...

Définition

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, et soit $f \in \text{End}(E)$ un endomorphisme de E . L'endomorphisme f est dit diagonalisable s'il existe une base \mathcal{B} de E pour laquelle $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ est une matrice diagonale.

Remarque : Si f est diagonalisable, alors le polynôme caractéristique P de f a toutes ses racines dans \mathbb{R} . En effet, en travaillant dans la base \mathcal{B} qui diagonalise f , et si on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les termes diagonaux de $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$, on récupère que

$$P(X) = (\lambda_1 - X) \dots (\lambda_n - X) .$$

Donc P a bien toutes ses racines dans \mathbb{R} et ces racines sont les termes diagonaux λ_i de f (qui peuvent très bien être égaux entre eux pour certains d'entre eux).

Théorème (Théorème fondamental de la théorie de la diagonalisation sur \mathbb{R})

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, et soit $f \in \text{End}(E)$ un endomorphisme de E . Soit de plus $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de f (donc les racines distinctes dans \mathbb{R} du polynôme caractéristique de f), et soit E_{λ_i} , $i = 1, \dots, k$, les espaces propres correspondant. La somme $E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_k}$ est toujours directe, donc on a toujours

$$E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_k} = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k} ,$$

et f est diagonalisable si et seulement si E est somme (directe) des E_{λ_i} , $i = 1, \dots, k$, donc si et seulement si $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$.

Preuve : (1) On commence par montrer que la somme des E_{λ_i} est directe. Sans perdre en généralité, on peut supposer que $k \geq 2$. On doit alors montrer que pour tout $i = 2, \dots, k$,

$$E_{\lambda_i} \cap \left(\sum_{j < i} E_{\lambda_j} \right) = \{0\} .$$

On vérifie facilement que $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$. Si ce n'était pas le cas, il existerait $u \neq 0$ tel que $u \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$. Or $u \in E_{\lambda_1}$ entraîne que $f(u) = \lambda_1 u$, tandis que $u \in E_{\lambda_2}$ entraîne que $f(u) = \lambda_2 u$. Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ces deux relations ne peuvent avoir lieu simultanément. La somme $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$ est donc directe. On montre maintenant que la somme $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus E_{\lambda_3}$ est directe. Sans perdre en généralité on pourra supposer que

(i) soit $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| < |\lambda_3|$,

(ii) soit $|\lambda_1| < |\lambda_2| = |\lambda_3|$.

On veut montrer que

$$E_{\lambda_3} \cap (E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2}) = \{0\} .$$

Preuve suite : Si tel n'était pas le cas on en déduirait l'existence d'un $u \in E_{\lambda_3}$, $u \neq 0$, et de $u_1 \in E_{\lambda_1}$ et $u_2 \in E_{\lambda_2}$ tels que $u = u_1 + u_2$. Mais alors $f(u) = f(u_1) + f(u_2)$, et donc $\lambda_3 u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$. En appliquant de nouveau f à cette égalité, et ainsi de suite, on arrive à $\lambda_3^k u = \lambda_1^k u_1 + \lambda_2^k u_2$ pour tout k entier. En particulier,

$$u = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^k u_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)^k u_2 .$$

Dans le cas (i), en faisant $k \rightarrow +\infty$ on obtient que $u = 0$. D'ou $E_{\lambda_3} \cap (E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2}) = \{0\}$. Dans le cas (ii), en prenant $k = 2p$ et en faisant tendre $k \rightarrow +\infty$ on obtient que $u = u_2$. Or $E_{\lambda_2} \cap E_{\lambda_3} = \{0\}$ pour les mêmes raisons que $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$. Dans les deux cas on en déduit que $u = 0$. Donc

$$E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + E_{\lambda_3} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus E_{\lambda_3} .$$

La relation générale s'obtient de la même façon.

Preuve suite : (2) On montre que f est diagonalisable ssi

$$E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}$$

est somme directe des sous espaces propres de f . Cette condition est nécessaire dans la mesure où si f est diagonalisable, alors il existe une base \mathcal{B} de E formée de vecteurs propres, donc de vecteurs dans la somme des E_{λ_i} . En effet, si on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, et si on note λ'_i les valeurs propres de f pour $i = 1, \dots, n$ (avec répétition des valeurs propres égales puisque $\{\lambda'_1, \dots, \lambda'_n\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$) alors la relation

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda'_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda'_n \end{pmatrix}$$

entraîne que $f(e_i) = \lambda'_i e_i$ pour tout i , et donc que les e_i sont tous des vecteurs propres de f . Donc ils sont tous dans la somme $E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_k}$. D'où $E = E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_k}$ (et on sait que la somme est directe d'après ce qui a été dit plus haut).

Preuve suite et fin : On montre qu'à l'inverse, la condition est suffisante. Pour le voir, on considère $\mathcal{B}_i = (e_1^i, \dots, e_{m_i}^i)$ une base de E_{λ_i} , $i = 1, \dots, k$, et on pose

$$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k)$$

la famille constitué des vecteurs de \mathcal{B}_1 suivis des vecteurs de \mathcal{B}_2 , etc., suivis des vecteurs de \mathcal{B}_k . Puisque

$$E = E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_k} ,$$

la famille \mathcal{B} est une famille génératrice de E (tout vecteur de E s'écrit comme somme de vecteurs des E_{λ_i} qui eux-mêmes s'écrivent comme combinaison linéaire de vecteurs de \mathcal{B} . . . de sorte que tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de \mathcal{B}). Par ailleurs, puisque la somme est directe, $\dim E = \sum_{i=1}^k \dim E_{\lambda_i}$ de sorte que \mathcal{B} a exactement $\dim E$ vecteurs. Donc \mathcal{B} est une base de E . Comme elle est constituée uniquement de vecteurs propres, f est de ce fait diagonalisable. D'où le théorème. CQFD

Corollaire

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n , et soit $f \in \text{End}(E)$ un endomorphisme de E . Soit de plus $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les racines distinctes dans \mathbb{R} du polynôme caractéristique P de f , et soit E_{λ_i} , $i = 1, \dots, k$, les espaces propres correspondant. Alors f est diagonalisable si et seulement si

$$\dim E = \sum_{i=1}^k \dim E_{\lambda_i} .$$

En particulier, si P a n racines distinctes dans \mathbb{R} , avec $n = \dim E$, alors f est diagonalisable.

Preuve : Puisque la somme est directe,

$$\dim(E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}) = \sum_{i=1}^k \dim E_{\lambda_i} .$$

Si $\dim E = \sum_{i=1}^k \dim E_{\lambda_i}$, on en déduit que $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$.

Preuve suite : Donc f est diagonalisable d'après le théorème précédent. Si maintenant $k = n$, sachant que $\dim E_{\lambda_i} \geq 1$ pour tout i , on trouve que $\sum_{i=1}^n \dim E_{\lambda_i} \geq n$. Comme on a aussi que

$$\sum_{i=1}^n \dim E_{\lambda_i} = \dim(E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}) \leq \dim E$$

il suit que $\dim E = \sum_{i=1}^n \dim E_{\lambda_i}$, ce qui démontre le corollaire. En particulier, on a aussi dans ce cas que $\dim E_{\lambda_i} = 1$ pour tout $i = 1, \dots, n$. CQFD

2. Deux résultats utiles donnés sans démonstration

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, et soit $f \in \text{End}(E)$ un endomorphisme de E . Soit P le polynôme caractéristique de f . Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f , donc une racine de P , alors

$$P(X) = (X - \lambda)^k Q(X)$$

où Q est un polynôme de degré $n - k$ avec $Q(\lambda) \neq 0$. On dit que k est l'ordre de multiplicité de la racine λ . Si E_λ est l'espace propre associé à la valeur propre λ , on peut montrer que forcément

$$\dim E_\lambda \leq k .$$

Indépendamment, il s'agit là du théorème de Cayley-Hamilton, si P est le polynôme caractéristique de f , alors pour toute base \mathcal{B} de E ,

$$P(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)) = 0 .$$

On dit que le polynôme caractéristique annule les matrices de représentations $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ de f . Le terme a_0 de P est ici à comprendre comme $a_0 \text{Id}_n$.

3. Dans la pratique

On part avec les données suivantes :

E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n ,
 \mathcal{B} une base de E , $f \in \text{End}(E)$ et $A = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$.



Calcul du polynôme caractéristique

$$P(X) = \det(A - X\text{Id}_n)$$

de f où Id_n est la matrice identité $n \times n$



Recherche des racines de P dans \mathbb{R}



Il y a des racines de P qui sont dans \mathbb{C} mais pas dans \mathbb{R} . Alors f n'est pas diagonalisable.

P a n racines distinctes dans \mathbb{R} . Alors f est diagonalisable.



Sinon soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les racines distinctes de P dans \mathbb{R} . On détermine les bases \mathcal{B}_i des sous espaces propres définis pour $i = 1, \dots, k$ par

$$E_{\lambda_i} = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E)$$

La famille $\tilde{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k)$ est une famille libre de E puisque la somme des E_{λ_i} est directe.



Si $\text{Card}\tilde{\mathcal{B}} = n$, donc si $\tilde{\mathcal{B}}$ est une base de E , alors f est diagonalisable et $M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$ est une matrice diagonale dont la diagonale est constituée des λ_i .



Si $\text{Card}\tilde{\mathcal{B}} < n$, donc si $\tilde{\mathcal{B}}$ n'est pas une base de E , alors f n'est pas diagonalisable.

4. Le cas des matrices

Définition

Soit A une matrice $n \times n$, $n \in \mathbb{N}$. On dit que A est une matrice diagonalisable s'il existe M une matrice inversible $n \times n$ avec la propriété que $M^{-1}AM$ est une matrice diagonale.

On se donne E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n , et \mathcal{B} une base de E . Par exemple $E = \mathbb{R}^n$ et \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^n constituée des vecteurs $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, \dots, 0), \dots$, et $(0, \dots, 0, 1)$. Il existe (on l'a déjà vu) un unique endomorphisme f de E qui est tel que

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = A .$$

Si (e_1, \dots, e_n) sont les vecteurs de \mathcal{B} , f est caractérisé par le fait que les coordonnées de $f(e_i)$ dans la base \mathcal{B} sont les composantes de la i ème colonne de A . On suppose que A est diagonalisable. On note $\tilde{\mathcal{B}}$ la famille de vecteurs de E qui est telle que

$$M_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}} = M .$$

Si φ est l'endomorphisme de E défini par le fait que

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi) = M ,$$

les vecteurs \tilde{e}_i de $\tilde{\mathcal{B}}$ sont données par les relations $\varphi(e_i) = \tilde{e}_i$, et φ est un isomorphisme puisque M est inversible, de sorte que $\tilde{\mathcal{B}}$ est une base. On a alors que

$$\begin{aligned} M^{-1}AM &= M_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}}^{-1} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}} \\ &= M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f) . \end{aligned}$$

Par suite, dire que A est diagonalisable entraîne que f est diagonalisable. La réciproque est vraie, et A est diagonalisable si et seulement si f l'est. On a $M^{-1}AM = D$ avec $A = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ qui équivaut alors à $M = M_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}}$ et $D = M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$. Dans la pratique, nul n'est besoin de déterminer f . On calcule le polynôme caractéristique $P(X) = \det(A - XId_n)$, où Id_n est la matrice identité $n \times n$. On calcule les racines réelles de P , et on récupère ce qui a été dit dans la section précédente.

5. Un exemple

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E , et $f \in \text{End}(E)$ l'endomorphisme de E défini par

$$f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = (2x_1 - 2x_2 + x_3) e_1 \\ + (2x_1 - 3x_2 + 2x_3) e_2 - (x_1 - 2x_2) e_3$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Sa matrice de représentation dans \mathcal{B} est donnée par

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Son polynôme caractéristique est alors donné par

$$\begin{aligned}
P(X) &= \det \begin{pmatrix} 2-X & -2 & 1 \\ 2 & -3-X & 2 \\ -1 & 2 & -X \end{pmatrix} \\
&= (2-X) \times (3+X) \times X + 2 \times 2 \times 1 + (-2) \times 2 \times (-1) \\
&\quad - 1 \times (3+X) \times 1 - 2 \times 2 \times (2-X) - 2 \times (-2) \times (-X) \\
&= -X(X-2)(X+3) - (X+3) \\
&= -(X+3) \times (X^2 - 2X + 1) \\
&= -(X-1)^2(X+3) .
\end{aligned}$$

L'endomorphisme f a donc deux valeurs propres qui sont -3 et 1 . Soient E_{-3} et E_1 les espaces propres de f associés à ces valeurs propres. On a

$$E_{-3} = \left\{ x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \mid f(x) = -3x \right\}$$

et on écrit que $f(x) = -3x$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

On trouve pour système d'équations

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -3x_1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3x_2 \\ -x_1 + 2x_2 = -3x_3 \end{cases}$$

On a les équivalences suivantes

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -3x_1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3x_2 \\ -x_1 + 2x_2 = -3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 = -x_1 \\ -4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = -x_1 \end{cases} .$$

Donc

$$\begin{aligned} E_{-3} &= \left\{ x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \mid x_2 = 2x_1 \text{ et } x_3 = -x_1 \right\} \\ &= \left\{ x_1 e_1 + 2x_1 e_2 - x_1 e_3 \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_1 (e_1 + 2e_2 - e_3) \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

et si on pose

$$\tilde{e}_1 = e_1 + 2e_2 - e_3$$

alors E_{-3} est la droite vectorielle de base (\tilde{e}_1) . On a de même que

$$E_1 = \left\{ x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \mid f(x) = x \right\}$$

et on écrit que $f(x) = x$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

On trouve pour système d'équations

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = x_1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = x_2 \\ -x_1 + 2x_2 = x_3 \end{cases}$$

On a les équivalences suivantes

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = x_1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = x_2 \\ -x_1 + 2x_2 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 .$$

Donc

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \left\{ x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\} \\
 &= \left\{ x_1 e_1 + x_2 e_2 - x_1 e_3 + 2x_2 e_3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\{ x_1 (e_1 - e_3) + x_2 (e_2 + 2e_3) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}
 \end{aligned}$$

et si on pose

$$\tilde{e}_2 = e_1 - e_3 \quad \text{et} \quad \tilde{e}_3 = e_2 + 2e_3$$

alors $(\tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est une famille génératrice de E_1 . Il est facile de vérifier que cette famille est aussi libre car

$$\begin{aligned}
 \lambda \tilde{e}_2 + \mu \tilde{e}_3 = 0 &\Rightarrow \lambda e_1 + \mu e_2 + (2\mu - \lambda) e_3 = 0 \\
 &\Rightarrow \lambda = \mu = 0
 \end{aligned}$$

puisque (e_1, e_2, e_3) est une base. Donc $(\tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est une base de E_1 .

On en déduit que f a deux valeurs propres -3 et 1 , que $\dim E_{-3} = 1$ et que $\dim E_1 = 2$. Comme $1 + 2 = 3$, on a que $E = E_{-3} + E_1$ et f est diagonalisable.

Si on note $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$, alors $\tilde{\mathcal{B}}$ est une base de E et on a que

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus

$$M_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour inverser $M_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}}$ on peut remarquer que

$$\begin{cases} x + y = X \\ 2x + z = Y \\ -x - y + 2z = Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = X \\ 2x + z = Y \\ 2z = X + Z \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Z \\ x = -\frac{1}{4}X + \frac{1}{2}Y - \frac{1}{4}Z \\ y = \frac{5}{4}X - \frac{1}{2}Y + \frac{1}{4}Z \end{cases}$$

Donc :

$$M_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

et on a que

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f) = M_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}}^{-1} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}},$$

soit encore

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}} M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f) M_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}}^{-1}.$$

Il s'ensuit que pour n'importe quel entier k ,

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^k = M_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}} M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)^k M_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}}^{-1}, \quad (1)$$

et comme

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)^k = \begin{pmatrix} (-3)^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on va pouvoir facilement calculer $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^3$, $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^4$, $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^5$ etc. à partir de la formule (1).

Fin du chapitre 3