Algèbre bilinéaire et Intégration

par

Emmanuel Hebey

Université de Cergy-Pontoise

Année 2018-2019

On continue de ne considérer que le cas d'espaces vectoriels réels. Formellement, une matrice réelle à p lignes et q colonnes est une application de $\{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\}$ dans $\mathbb{R}$. Concrètement, il s'agit de la donnée de $p \times q$ réels a_{ij}, $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$, et si M est une telle matrice, on écrit $M = (a_{ij})$ ou $M = (a_{ij})_{i,j}$ ou encore

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

Le terme à la $i$ème ligne et $j$ème colonne est a_{ij}. On dit que a_{ij} est le terme général de M. On note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à p lignes et q colonnes. Si $p = q$, on note aussi $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$, et on parle de matrices carrées.

1. Opérations élémentaires sur les matrices

On définit la somme de deux matrices réelles de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ par

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1q}+b_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1}+b_{p1} & \dots & a_{pq}+b_{pq} \end{pmatrix}$$

ce que l'on peut encore écrire sous la forme

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \ ,$$

et on définit la multiplication d'une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ par un réel λ en posant

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{p1} & \dots & \lambda a_{pq} \end{pmatrix}$$

ce que l'on peut encore écrire sous la forme

$$\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}) \ .$$

L'espace $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ muni des deux opération internes $+$ et externes $\times$ a une structure naturelle d'espace vectoriel (de dimension pq).

Définition (Transposée)

La transposée d'une matrice M de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, notée ${}^tM$, est la matrice de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ dont les coefficients b_{ij} sont donnés par $b_{ij} = a_{ji}$ pour tous $i = 1, \ldots, q$ et $j = 1, \ldots, p$.

L'opération de transposition réalise un isomorphisme de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$. Lorsque $p = q$ la transposition revient à faire une symétrie par rapport à la diagonale $\backslash$.

Définition (Produit de deux matrices)

Le produit d'une matrice $A = (a_{ij})$ à p lignes et q colonnes, avec une matrice $B = (b_{ij})$ à q lignes et r colonnes, est la matrice $AB = (c_{ij})$ à p lignes et r colonnes dont les coéfficients sont définis par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}$$

pour tous $i = 1, \ldots, p$, et $j = 1, \ldots, r$.

Pour multiplier une matrice A par une matrice B, et donc pour pouvoir écrire le produit AB, il faut que A ait autant de colonnes que B a de lignes. A titre d'exemple :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{pmatrix}$$

Proposition

Le produit de matrices est distributif par rapport à l'addition : $A(B+C) = AB + AC$*. Il est aussi associatif :* $(AB)C = A(BC)$ *et on a enfin que* ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$*.*

Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, on peut parler des matrices AB et BA. Attention le produit de deux matrices n'est pas commutatif au sens où on peut très bien avoir $AB \neq BA$. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

tandis que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Dans le même ordre d'idée, on peut avoir $AB = 0$ (matrice nulle) sans pour autant que soit $A = 0$ soit $B = 0$. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

2. Matrices et applications linéaires

On illustre ici l'idée fondamentale suivante : étant donnés E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies,

à une application linéaire $f \in L(E, F)$, et à deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement de E et F correspondent une matrice ayant dim(F) lignes et dim(E) colonnes qui représente f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

En d'autres termes : une matrice s'intérprète comme la lecture d'une application linéaire dans deux bases, une au départ, une à l'arrivée. De façon plus précise, notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m)$ une base de E, et $\mathcal{B}' = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ une base de F. Soit de plus $f \in L(E, F)$ une application linéaire de E dans F. Pour tout $j = 1, \ldots, m$, notons a_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, les coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathcal{B}'$, de sorte que

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \tilde{e}_i \ .$$

La matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de F, notée $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$, est alors la matrice à n ligne et m colonnes constituée des a_{ij}.

Définition

La matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de F, notée $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$ et encore appelée matrice de représentation de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, est la matrice dont les colonnes sont constituées des coordonnées dans la base d'arrivée $\mathcal{B}'$ des images par f des vecteurs de la base de départ $\mathcal{B}$.

Avec une telle lecture de f, si $x \in E$ est un vecteur de E de coordonnées $(x_1, \ldots, x_m)$ dans la base $\mathcal{B}$, alors les coordonnées $(f(x)_1, \ldots, f(x)_n)$ de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont données par le produit

$$\begin{pmatrix} f(x)_1 \\ \vdots \\ f(x)_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

où $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) = (a_{ij})_{i,j}$ est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Preuve : On a

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m) \\ &= \sum_{j=1}^{m} x_j f(e_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \Big) \tilde{e}_i \end{aligned}$$

puisque $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \tilde{e}_i$. Donc,

$$f(x)_i = a_{i1} x_1 + \cdots + a_{im} x_m$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$, ce qui correspond bien à la formule énoncée ci-dessus. CQFD

Des propriétés élémentaires vérifiées par es matrices de représentations $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$ sont les suivantes :
(i) $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f + g) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) + M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(g)$, et
(ii) $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$
pour toutes applications linéaires f et g, et tout réel λ.

Théorème

Soient E_1, E_2, E_3 trois espaces vectoriels de dimensions finies, et soient $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ trois bases respectivement de E_1, E_2, et E_3. Soient $f \in L(E_1, E_2)$ et $g \in L(E_2, E_3)$ deux applications linéaires. Alors $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}(g)M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(f)$.

Preuve : Cette propriété se vérifie assez facilement. On note $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(f) = (a_{ij})_{i,j}$ et $M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}(g) = (b_{ij})_{i,j}$, et on note $\mathcal{B}_1 = (e^1_1, \dots, e^1_{n_1})$, $\mathcal{B}_2 = (e^2_1, \dots, e^2_{n_2})$, et $\mathcal{B}_3 = (e^3_1, \dots, e^3_{n_3})$. Alors pour tout $j = 1, \dots, n_1$,

$$f(e^1_j) = \sum_{k=1}^{n_2} a_{kj} e^2_k$$

tandis que pour tout $k = 1, \dots, n_2$,

$$g(e^2_k) = \sum_{i=1}^{n_3} b_{ik} e^3_i \ .$$

Preuve suite et fin : On en déduit que pour tout $j = 1, \ldots, n_1$,

$$\big(g \circ f\big)(e_j^1) = \sum_{i=1}^{n_3} \big(\sum_{k=1}^{n_2} b_{ik} a_{kj}\big) e_i^3$$

de sorte que

$$M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_3}\big(g \circ f\big)_{ij} = \sum_{k=1}^{n_2} b_{ik} a_{kj}$$

ce qui correspond bien au produit des deux matrices $M_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_3}(g)$ et $M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}(f)$. Cela prouve le théorème. CQFD.

3. Matrices inversibles. Première approche

On ne parle de matrice inversible que pour les matrices carrées. Soit donc A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = BA = \mathrm{Id}_n$$

où Id_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à savoir

$$\mathrm{Id}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

encore définie par $\mathrm{Id}_n = (\delta_{ij})_{i,j}$ où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Les δ_{ij} sont appelés symboles de Kroenecker. On note $B = A^{-1}$. La matrice identité Id_n a la propriété que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Id}_n A = A\mathrm{Id}_n = A$.

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de même dimension n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases respectivement de E et F, et $f \in L(E,F)$. Alors f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$ est une matrice inversible. De plus, dans ce cas, $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)^{-1} = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f^{-1})$.

Preuve : (1) Supposons pour commencer que f est un isomorphisme de E sur F. Alors il existe $g = f^{-1} \in L(F,E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, où Id_E et Id_F sont les applications linéaires identités de E et de F. De ces deux formules, et de la formule de composition des matrices de représentations on tire que

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_n &= M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(g) M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f), \\ \mathrm{Id}_n &= M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_F) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(g) \end{aligned}$$

Par suite, $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$ est une matrice inversible, et $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)^{-1} = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f^{-1})$.

Preuve suite et fin : (2) A l'inverse, supposons que $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$ est inversible. Notons $(b_{ij})_{i,j}$ la matrice inverse de $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$, et notons e_i les vecteurs de $\mathcal{B}$ et e'_i les vecteurs de $\mathcal{B}'$. On construit une application linéaire $g \in L(F,E)$ en posant

$$g(e'_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} e_j$$

pour tout $i = 1, \dots, n$. Alors, par construction même de g,

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(g) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)^{-1} \ .$$

De la formule de composition des matrices de représentations on tire alors que

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g \circ f) &= M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(g) M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Id}_n, \\ M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f \circ g) &= M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(g) = \mathrm{Id}_n \ . \end{aligned}$$

Donc, $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, ce qui prouve que f est un isomorphisme. D'où le théorème. CQFD.

Avec les idées développées dans la preuve ci-dessus (à une matrice et deux bases correspondent une application linéaire ayant cette matrice pour lecture dans les bases) on peut montrer qu'il suffit de demander une seule des deux relations $AB = \mathrm{Id}_n$ ou $BA = \mathrm{Id}_n$ dans la définition de l'inversibilité d'une matrice.

Corollaire

S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = Id_n$, alors $BA = Id_n$ (et vis versa). En particulier, A est inversible et $B = A^{-1}$.

Preuve : Posons $E = \mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$, et on considère $f \in End(\mathbb{R}^n)$ et $g \in End(\mathbb{R}^n)$ tels que $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = A$ et $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g) = B$. Supposons que $BA = \mathrm{Id}_n$. Alors $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$, et il s'ensuit que f est nécessairement injective (on remarque que $f(x) = f(y) \Rightarrow g \circ f(x) = g \circ f(y) \Rightarrow x = y$). Donc, cf. le dernier corollaire du Chapitre 1, f est un isomorphisme et (cf. théorème précédent) A est inversible. Même genre de raisonnement si on suppose que $AB = \mathrm{Id}_n$ car alors $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ et f est automatiquement surjective. CQFD.

Théorème

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont deux matrices inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Preuve : On a

$$\begin{aligned} AB \times (B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\ &= (A\mathrm{Id}_n)A^{-1} \\ &= AA^{-1} \\ &= \mathrm{Id}_n \ , \end{aligned}$$

ce qui prouve le théorème. CQFD.

Définition (Matrice de changement de base)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ deux bases de E. On note $\Phi_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}$ l'isomorphisme (endomorphisme bijectif) de E défini par :

$$\Phi_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(e_i) = \tilde{e}_i$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\tilde{\mathcal{B}}$, notée $M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}$, est, par définition, la matrice $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}})$, représentant la lecture de $\Phi_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}$ dans la base $\mathcal{B}$.

En d'autres termes, la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\tilde{\mathcal{B}}$ est la matrice de lecture dans $\mathcal{B}$ de l'isomorphisme qui envoie les vecteurs de $\mathcal{B}$ sur les vecteurs de $\tilde{\mathcal{B}}$.

Les colonnes de $M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}$ sont constituées des coordonnées des vecteurs de $\tilde{\mathcal{B}}$ dans $\mathcal{B}$.

Avec les notations précédente, soit $\Phi_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ l'isomorphisme de E défini par : $\Phi_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}(\tilde{e}_i) = e_i$, pour tout $i = 1, \ldots, n$. On a alors $\Phi_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}} \circ \Phi_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = \Phi_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} \circ \Phi_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}} = \mathrm{Id}_E$. En particulier :

Lemme

$M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}$ est inversible et $M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}^{-1} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}) = M_{\tilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}}$.

Preuve : Seule la dernière égalité est à démontrer. Posons $M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}} = (a_{ij})_{i,j}$ et $M_{\tilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}} = (b_{ij})_{i,j}$. Alors $\tilde{e}_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j$ pour tout i et $e_i = \sum_{j=1}^n b_{ji} \tilde{e}_j$ pour tout i. Donc

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j &= \sum_{j=1}^n a_{ji} \sum_{k=1}^n b_{kj} \tilde{e}_k \\ &= \sum_k \left(\sum_j b_{kj} a_{ji} \right) \tilde{e}_k \ , \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\sum_{j=1}^n b_{kj} a_{ji} = \delta_{ki}$ pour tous i, k. Donc $M_{\tilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}} \times M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}} = \mathrm{Id}_n$ et le lemme est démontré. CQFD.

Lemme

La matrice de passage $M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}$ envoie les coordonnées d'un vecteur x dans $\tilde{\mathcal{B}}$ sur les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.

En d'autres termes, pour tout $x \in E$ de coordonnées x_i dans $\mathcal{B}$ et $\tilde{x}_i$ dans $\tilde{\mathcal{B}}$, on a que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$$

où, dans cette relation, la matrice des a_{ij} est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathcal{B}}$, à savoir

$$M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Attention à l'inversion (la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathcal{B}}$ envoie les coordonnées des vecteurs dans $\tilde{\mathcal{B}}$ sur leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$).

Preuve : Puisque $M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}})$, on a que

$$\tilde{e}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

pour tout j. On écrit alors que

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \tilde{e}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{x}_j \right) e_i \end{aligned}$$

de sorte que $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{x}_j$, ce qui démontre le lemme. CQFD.

Théorème (Théorème de changement de base)

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ deux bases de E, et $\mathcal{B}'_1$, $\mathcal{B}'_2$ deux bases de F. Soit aussi $f \in L(E, F)$ une application linéaire de E dans F. Alors

$$M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}'_2}(f) = M^{-1}_{\mathcal{B}'_1 \to \mathcal{B}'_2} M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}'_1}(f) M_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$$

où $M_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$, et $M_{\mathcal{B}'_1 \to \mathcal{B}'_2}$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'_1$ à la base $\mathcal{B}'_2$.

On pourra se souvenir de l'ordre des matrices dans ce théorème à l'aide du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_1 \arrow[r, "M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}'_1}(f)"] & \mathcal{B}'_1 \\
\mathcal{B}_2 \arrow[u, "M_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}"] \arrow[r, "M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}'_2}(f)"] & \mathcal{B}'_2 \arrow[u, "M_{\mathcal{B}'_1 \to \mathcal{B}'_2}"']
\end{tikzcd}$$

Preuve : Soit x un vecteur de E. Notons V_x^1 la matrice colonne composée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}_1$, et V_x^2 la matrice colonne composée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}_2$. Si $y \in F$, on note de même V_y^1 la matrice colonne composée des coordonnées de y dans la base $\mathcal{B}_1'$, et V_y^2 la matrice colonne composée des coordonnées de y dans la base $\mathcal{B}_2'$. On a alors

$$V_x^1 = M_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} V_x^2 \quad \text{et} \quad V_y^1 = M_{\mathcal{B}_1' \to \mathcal{B}_2'} V_y^2 \ .$$

Dans le même ordre d'idées on a que

$$V_{f(x)}^1 = M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_1'}(f) V_x^1 \quad \text{et} \quad V_{f(x)}^2 = M_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_2'}(f) V_x^2 \ .$$

On écrit alors que

$$\begin{aligned}
V_{f(x)}^2 &= M_{\mathcal{B}_1' \to \mathcal{B}_2'}^{-1} V_{f(x)}^1 \quad \text{puisque } V_y^1 = M_{\mathcal{B}_1' \to \mathcal{B}_2'} V_y^2 \\
&= M_{\mathcal{B}_1' \to \mathcal{B}_2'}^{-1} M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_1'}(f) V_x^1 \quad \text{puisque } V_{f(x)}^1 = M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_1'}(f) V_x^1 \\
&= M_{\mathcal{B}_1' \to \mathcal{B}_2'}^{-1} M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_1'}(f) M_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} V_x^2 \quad \text{puisque } V_x^1 = M_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} V_x^2
\end{aligned}$$

Preuve suite et fin : Donc, pour tout x de E,

$$M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_2'}(f)V_x^2 = M^{-1}_{\mathcal{B}_1'\to\mathcal{B}_2'}M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1'}(f)M_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}V_x^2$$

puisque $V^2_{f(x)} = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_2'}(f)V_x^2$. En prenant successivement x tel que x a pour coordonnées $(1,0,\ldots,0)$, $(0,1,\ldots,0)$, $\ldots$, $(0,\ldots,0,1)$ dans $\mathcal{B}_2$, on en déduit que

$$M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_2'}(f) = M^{-1}_{\mathcal{B}_1'\to\mathcal{B}_2'}M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1'}(f)M_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}$$

ce qui prouve le théorème. CQFD.

Un cas particulier du théorème est donné par le résultat suivant.

Théorème (Théorème de changement de base dans le cas $F = E$)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, et $f \in End(E)$ un endomorphisme de E. Alors

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f) = M^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$$

où $M_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

5. Matrices inversibles. Déterminants

Pour ne pas perdre trop de temps, on énonce les résultat de cette section sans preuve. On renvoie au cours de première année pour plus de détails.

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Par définition, une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ est une application bijective de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$. On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. L'ensemble $\mathcal{P}_n$ a $n!$ éléments. Si $\sigma \in \mathcal{P}_n$, le signe $\varepsilon(\sigma)$ de σ est le réel valant -1 ou $+1$ défini par

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} \big(\sigma(i) - \sigma(j)\big)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (i - j)} .$$

Si $\varepsilon(\sigma) = -1$, on parle de permutation impaire. Si $\varepsilon(\sigma) = +1$, on parle de permutation paire.

On vérifie que $\varepsilon(\tau \circ \sigma) = \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)$. Une transposition de $\mathcal{P}_n$ est une permutation qui n'échange que deux éléments. Le signe d'une transposition est toujours -1.

Lemme

Toute permutation de $\mathcal{P}_n$ se décompose (de façon non unique) en composition de transpositions. Le signe de la permutation est alors $(-1)^k$ où k est la nombre de transpositions qui interviennent dans cette décomposition.

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{i,j}$ une matrice carrée réelle d'ordre n. Par définition, le déterminant de A est le réel $det(A)$ défini par

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

soit encore $det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right)$.

A partir de cette formule on obtient par le calcul les déterminants suivants (cas $n = 2$ et $n = 3$). A savoir :

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Pour le voir on remarque que les permutations de $\mathcal{P}_2$ sont au nombre de 2 et données par

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \; .$$

Deux permutations de signes respectifs $+1$ et -1. De même

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Pour démontrer cette formule on remarque que les permutations de $\mathcal{P}_3$ sont au nombre de 6 et données par

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} ,$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

qui sont de signes respéctifs $+1$, -1, -1, -1, $+1$, $+1$.

Un moyen mnémotechnique pour ce souvenir de cette formule :

$$
\begin{aligned}
\det(A) \;=\; & \begin{vmatrix} \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \bullet \\ \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \\ \bullet & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \\
& - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \bullet \\ \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \\ \cdot & \bullet & \cdot \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Des propriétés élémentaires du déterminant sont les suivantes :
(i) $det(Id_n) = 1$,
(ii) $det(AB) = det(A)det(B)$,
(iii) $det({}^tA) = det(A)$.
En particulier, on déduit de (i) et (ii) que si A est inversible, alors $det(A) \neq 0$ et
(iv) $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.

Théorème

Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$.

D'autres propriétés des déterminants sont les suivantes. Notons $A = (a_{ij})_{i,j}$ une matrice réelle carrée d'ordre n, i.e. un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit de plus σ une permutation de $\mathcal{P}_n$. On note

$$A^\sigma = (a_{i\sigma(j)})_{i,j} \quad \text{et} \quad A_\sigma = (a_{\sigma(i)j})_{i,j}$$

de sorte que A^σ consiste à effectuer une permutation sur les colonnes de A suivant σ, tandis que A_σ consiste à effectuer une permutation sur les lignes de A suivant σ.

Alors

$$\det(A^\sigma) = \det(A_\sigma) = \varepsilon(\sigma)\det(A)\ .$$

Indépendamment, on pourra montrer qu'on ne change pas un déterminant en ajoutant à une des lignes (resp. colonnes) de la matrice un multiple d'une autre ligne (resp. colonne).

Pour finir, si λ est un réel, et si A est une matrice carrée d'ordre n, on a que $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, tandis que si l'on se contente de ne multiplier qu'une ligne ou qu'une colonne de A par λ alors le déterminant de cette nouvelle matrice vaut $\lambda \det(A)$.

Avec ces règles on peut se débrouiller pour placer des zéros sur une ligne donnée de la matrice sans affecter le calcul de son déterminant.

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{i,j}$ une matrice réelle carrée d'ordre n, i.e. un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Etant donnés $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on appelle mineur de a_{ij}, et on note Δ_{ij}, le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue à partir de A en supprimant la ième ligne et la jème colonne de A. On appelle cofacteur de a_{ij}, le réel $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

Théorème

Soit $A = (a_{ij})_{i,j}$ une matrice réelle carrée d'ordre n. Etant donnés $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} \quad et \quad det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} \ .$$

Dans la première formule on développe le déterminant suivant la ième ligne, et dans la seconde on développe le déterminant suivant la jème colonne.

On aura bien sûr tout intérêt à choisir la ligne ou la colonne qui comporte le plus de zéros. A partir de ces formules, et de la formule générale donnant le déterminant d'une matrice d'ordre 3, on calculera facilement le déterminant d'une matrice d'ordre 4 (et ainsi de suite...)

Théorème

Si $(A_{ij})_{i,j}$ est la matrice des cofacteurs, donc $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, et si A est inversible, donc si $det(A) \neq 0$, l'inverse de A est donnée par la formule suivante :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\ {}^t(A_{ij})_{i,j}$$

où ${}^t(A_{ij})_{i,j}$ est la transposée de la matrice des cofacteurs.

6. Trace d'un endomorphisme

Si $A = (a_{ij})_{i,j}$ est une matrice carrée réelle d'ordre n, i.e. un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la trace de A comme étant le réel donné par la relation

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \ .$$

On considère maintenant E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme de E. On affirme que $\mathrm{tr}\big(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)\big) = \mathrm{tr}\big(M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f)\big)$ une formule qui se démontre sans trop de difficulté (à faire en exercice) à partir de la relation

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f) = M^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$$

de la section 4. On définit alors la trace de f en posant :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}\big(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)\big)$$

où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E.

Fin du chapitre 2